

VERZAMELING

VAN

NIEUWE WISKUNDIGE

VOORSTELLEN,

DOOR

DE LEDEN



VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

EERSTE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

WEIJTINGH EN VAN DER HAART,

Boekverkoopers, in de Warmoesstraat bij de Wijde Kerksteeg, No. 54.

1841.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van N. W. VAN NIFTERICK, te Amsterdam.

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

TE AMSTERDAM,

In den Jare *MDCCCXLI.*

BESTUURDERS.

D. W. Hinse, *Voorzitter.* . . . . (*) 1834
H. van Wessem, Jacobusz. 1814
A. van der Swan 1818
J. van der Linden 1821
C. F. Julius 1826
Jacob Swart, Bestuurder en Bewaarder der Zee-Instrumenten van Z. M. den Koning der Nederlanden, Lector in de Zeevaartkunde, Examinator der Zee-Officieren, Lid der Commissie voor den Zee-Almanak, enz., enz., te Amsterdam 1832
J. Badon Ghijben, Eerste Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda, *Eerste Secretaris* 1835
H. G. Witlage, *Tweede Secretaris* 1818
H. Weijting, *Penningmeester* 1825

(*) *Jaartallen van de eerste Verkiezing als Lid van het Bestuur.*

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET WETENSCHAPPELIJKE VAK.

A. VAN DEN ENDE, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., te Haarlem . (*) 1814

JACOB DE GELDER, Ridder der Orde van den Nederlandsche Leeuw, Math. Mag. en Phil. Nat. Doctor, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Faculteit aan 's Rijks Hoogeschool, te Leyden, enz., enz. . 1817

KLAAS SMIT, Oud-Bestuurder, Oud-Boekhouder en Oud-Secretaris des Genootschaps, te Amsterdam . . 1829

J. P. DELPRAT, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, Majoor-Ingenieur, Directeur der Studiën van de Kadets der Genie aan de Koninkl. Militaire Akademie te Breda, Correspondent der Eerste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, en van het Bataafsch Genootschap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, te Breda 1829

J. BADON GHIJBEN, Eerste Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda, Eerste Secretaris des Genootschaps . : 1835

W. S. SWART, Math. Mag. en Phil. Nat. Doctor, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkunde aan de Doorluchtige School, te Amsterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten 1839

R. LOBATTO, Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor, Adviseur wegens de Maten en Gewigten bij het Ministerie van Binnenlandsche Zaken, enz., enz., te 's Gravenhage. . 1839

(*) *Jaartallen van de benoeming tot Lid van Verdienste, enz.*

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET HUISHOUDELIJKE VAK.

H. van Wessem, Jacobusz, te Amsterdam 1813
H. G. Witlage, te Amsterdam, Tweede Secretaris. 1828
H Weijting, te Amsterdam, Penningmeester 1829
P. Houttuin, Gz., te Hoorn. 1837

LEDEN VAN DE WETENSCHAPPELIJKE COMMISSIE.

J. de Gelder, te Leyden (zie boven) 1813
J. P. Delprat, te Breda. (zie boven) 1821
J. Badon Ghijben, te Breda. (zie boven) 1830
W. S. Swart, te Amsterdam. (zie boven) 1840
G. A. van Kerkwijk, 1e Kapitein Ingenieur, aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda 1840
R. Lobatto, te 's Gravenhage. (zie boven) 1840

BIBLIOTHECARIS.

J. van der Linden, *te Amsterdam*. 1827

LID VAN VERDIENSTE DER EERSTE KLASSE.

R. Lobatto, te 's Gravenhage. (zie boven) 1832

LEDEN VAN VERDIENSTE DER TWEEDE KLASSE.

A. L. Hector, Onderwijzer, te Middelburg 1812
A. Fock, *Oud-Bestuurder*, te Amsterdam 1812
P. van Eeghen, Chz, *Oud-Bestuurder*, te Amsterdam. 1812
F. J. Stamkart, Arrondissements-IJker, te Amsterdam. 1824
W. Top, Wzn., Kostschoolhouder, te Zierikzee . . . 1824
J. Bassan, Onderw. in de Wiskunde, enz., te Amsterdam 1827
J. Jonkheet, Math. et Phil. Nat. Cand., en Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde aan de Kweekschool voor de Zeevaart, te Amsterdam 1827
H. van Blanken, Stads Lector in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, te Zwolle 1833

D. Hoola van Nooten, te Amsterdam 1834
J. Acquoy, Onderwijzer, te Amsterdam. 1837

CORRESPONDENTEN.

A. Harrebomée, te Heemstede, voor *Haarlem* . . . 1802
J. G. Abbon, Examinator der Stuurlieden, in dienst van Z. M. den Koning der Nederlanden, Lector in de Zeevaartkunde, te Rotterdam, voor *Rotterdam* . . 1813
A. L. Hector, te Middelburg, voor de Provincie *Zeeland* (zie boven) 1827
J. Deelèman, *Oud-* 2ᵉ *Secretaris*, te Deventer, voor de Provincie *Overijsel* 1837
C. J. Bolten, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Leeuwarden, voor de Provincie *Friesland* 1837
A. Tollus, Architect en Landmeter, te 's Gravenhage voor *'s Gravenhage* 1839
J. A. Krajenbrink, Ingenieur van den Waterstaat in Neêrlandsch Indië, te Batavia, voor *Neêrl. O. Indië*. 1841

GEWONE LEDEN.

P. Houttuin, Gz., te Hoorn. (zie boven) . . . . (*) 1788
L. Koops, *Oud-Bestuurder*, te Zwolle 1789
Klaas Smit, *Oud-Bestuurder*, enz., te Amsterdam. (zie boven) 1790
A. Volkerse, Notaris, te Monnikendam 1794
A. Harrebomée, te Heemstede. (zie boven) 1798
A. Horstman, te Amsterdam 1799
H. G. Witlage, 2ᵉ *Secretaris*, te Amsterdam. (zie boven). 1804
A. L. Hector, Onderw., te Middelburg. (zie boven) . 1806
Jacob de Gelder, Hoogleeraar, te Leyden. (zie boven). 1806
A. van der Swan, *Bestuurder*, te Amsterdam. (zie boven) 1807
A. Fock, *Oud-Bestuurder*, te Amsterdam. (zie boven). 1808
L. van Heusden, Opzigter bij de Werken van 's Rijks Droogmakerijën, aan den Uithoorn 1808

(*) *Jaartallen van den aanvang van het Lidmaatschap.*

D. S. Waterman, te Gouda 1808
P. van Eeghen, Chz., *Oud-Bestuurder*, te Amsterdam. (zie boven) 1809
J. P. Baudet, Onderwijzer, te Utrecht 1810
A. van der Spuij, Oud-Onderwijzer van de Konink. Prinsen, te 's Gravenhage 1811
R. Lobatto, te 's Gravenhage. (zie boven) 1812
J. Deeleman, *Oud- 2e Secretaris*, te Deventer . . 1813
S. J. Mulder, Beëedigd Translateur, te Amsterdam . 1813
H. van Wessem, Jzn. *Bestuurder*, te Amsterdam. (zie boven) 1813
A. Tollus, te 's Gravenhage. (zie boven) 1813
H. F. Fijnje, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Groningen 1813
J. van der Linden, *Bibliotecaris* des Genootschaps, te Amsterdam 1813
J. G. Arbon, te Rotterdam. (zie boven) 1813
P. Preijer, *Oud-Bestuurder*, te Amsterdam 1814
C. I. Glavimans, Onder Constructeur bij het Departement der Marine van de Maas, te Rotterdam . . . 1814
J. M. Pauw, Kapitein Ingenieur, te Groningen . . . 1817
J. van Wijk, Roeldz., Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, enz., enz., en Hoofd-Onderwijzer aan het Stads Instituut van Opvoeding en Onderwijs, te Kampen 1817
C. J. Bolten, te Leeuwarden. (zie boven) 1818
P. J. Prinsen, Directeur en Onderwijzer aan de Koninklijke Kweekschool voor Onderwijzers, te Haarlem. 1819
S. Klijnsma, Kapitein-Ingenieur, te 's Gravenhage . 1819
C. J. de Jong, Kostschoolhouder, te Arnhem . . . 1819
J. P. Delprat, *Oud- 2e Secretaris*, te Breda. (zie boven) 1819
W. Top, Wz., Kostschoolhouder, te Zierikzee. (zie boven) 1819
C. F. Julius, *Bestuurder*, Onderwijzer, te Amsterdam. 1820
G. A. van Kerkwijk, te Breda. (zie boven) 1820
C. van Heijnsbergen, Art. Lib. Mag. Phil. et Med. Doctor, eerste Hoogleeraar der Wiskunde aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik. 1821

P. T. Grinwis, Hoofd-Ingenieur van den Waterstaat in de Provincie N. Holland, te Haarlem 1822
H. Weijting, *Penningmeester*, te Amsterdam. (zie boven) 1822
J. Bassan, te Amsterdam. (zie boven) 1822
J. Kohler, Kostschoolhouder, te Amsterdam . . . 1822
J. Acquoy, Onderwijzer, te Amsterdam. (zie boven). 1822
H. Strootman, 1e Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda 1823
F. J. Stamkart, te Amsterdam. (zie boven) . . . 1823
J. Jonkheer, te Amsterdam. (zie boven) 1823
J. Lagerweij, Kostschoolhouder, te Geertruidenberg . 1824
P. M. van der Meulen, 1e Luitenant der Artillerie, te Nijmegen 1824
P. Doorman, Kapitein der Veld-Artillerie, te Bergen op Zoom 1825
J. Doorman, 1e Luitenant Instructeur bij het 3e Bat. Veld-Artillerie Nat. Militie, te Delft 1825
N. J. Singels, Kostschoolhouder, te Leeuwarden . 1825
G. H. Maassen, Onderwijzer, te Amsterdam 1826
P. Huidekoper, te Amsterdam 1826
G. Graafland, te 's Gravenhage 1826
E. Olivier, Dz., Landmeter, te Dordrecht 1827
Jonkh. W. J. C. Rammelman Elsevier, 2e Luitenant bij de 9e Afdeeling Infanterie, te Utrecht 1827
M. G. Snoek, Onderwijzer, te Amsterdam 1828
D. Ouwersloot, Kostschoolhouder, te Amsterdam. . 1828
W. A. Froger, 2e Luitenant Ingenieur en Onderwijzer bij de Koninklijke Militaire Akademie, te Breda. 1828
J. Badon Ghijben. 1e *Secretaris*, te Breda. (zie boven). 1828
N. L. Barends, te Amsterdam 1828
L. J. Ulman, Arrondissements-IJker, enz., enz., te Amsterdam 1829
Jacob Swart, *Bestuurder*, te Amsterdam. (zie boven). 1829
Isaac Warnsinck, Architect, te Amsterdam 1829
R. Spruit, Ie Leermeester bij de Diaconie Scholen, te Amsterdam 1829
D. Hoola van Nooten, te Amsterdan. (zie boven) . 1829
J. G. W. Merkes, Adjudant van Z. M. den Koning

der Nederlanden, Lid van het Bataafsch Genootschap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, te 's Hage 1830
J. S. Speijer, Onderwijzer, te Amsterdam 1830
H. van Blanken, te Zwolle. (zie boven) 1830
J. Kollewijn, Kostschoolhouder, te Bommel . . . 1830
A. Vos, Onderwijzer, te Amsterdam 1830
J. J. Gefken, te Leyden 1831
H. L. van Hooff, Ie Luiten. Ingenieur, te Zutphen. 1831
S. T. Boas, te Amsterdam 1831
H. W. Bloem, Onderwijzer, te Haarlem 1831
E. Boas, te Amsterdam 1831
S. Dik, Cornsz., Ingenieur van den Waterstaat in Nederlandsch O. Indië, te Batavia 1831
I. J. de Koning, te Haarlem 1831
Mr. G. W. de Bruin Korps, Agent van den Algem. Rijks-Kassier, te Hoorn 1832
J. Jansz. Alberda, Hoofdonderwijzer in het Instituut voor Blinden, te Amsterdam 1832
D. van Lankeren Matthes, te Amsterdam. 1832
M. A. L. Bousquet, 1e Kapt. Ingenieur, in N. O. Indië. 1833
H. C. Begeer, *Kostschoolhouder, te Hasselt* 1833
P. G. Crombet, Ridder van het Legioen van Eer, Kapit. Luitenant ter Zee, bij het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik 1833
T. Kuijper, Ezn., te Haarlem 1833
F. C. Radijs, te Amsterdam 1833
H. Kloos, te Amsterdam 1833
D. W. Hinse, *Bestuurder*, Onderwijzer, te Amsterdam. 1833
W. G. van Delden, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, te Amsterdam 1833
D. N. Geelhoed, Onderwijzer, te Amsterdam 1833
J. van Maurik, te Amsterdam. 1833
C. J. de Leeuw, Direct. van Stads Aarde Werk. en Wateren, te Amsterdam 1833
H. A. van der Spek Obreen, Onder-Constructeur der 2e Klasse, te Willemsoord 1834
Adrianus. Hoen, Kostschoolhouder, te Hattem . . . 1834
T. de Vet, Arrondissement-IJker, te Delft 1834

H. W. Weijtingh, Boekhandelaar, te Amsterdam . . 1834
F. Stuart, Kostschoolhouder, te Vianen 1834
G. J. Kapteijn, Kostschoolhouder, te Bodegraven . 1834
K. Dekker, Lzn., Onderwijzer, te Nieuwendam . . 1834
J. C. G. van Benthem, te Hengelo, in Overijssel. . 1834
Jacobus Sjoenis, Mr. Timmerman, te 's Graveland. 1834
Dirk Bas Backer, te Amsterdam 1834
L. van de Kasteele, Assistent bij den Waterstaat, te 's Gravenhage 1834
J. F. van de Laar, Junior, te Amsterdam 1834
W. van Loon, te Amsterdam 1834
J. R. R. Ortt, te Amsterdam 1834
J. M. Obreen, Onderwijzer in het Regtlijning en Zeevaartkundig Teekenen, aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik 1834
Herman Hallo, Instituteur, te Amsterdam 1834
B. P. G. van Diggelen, Aspirant Ingenieur van den Waterstaat, te Zwolle 1835
Gerrit Koster, Onderwijzer, te Schoorldam 1835
P. J. L. Quant, Onder-Constructeur der Marine te Amsterdam 1835
J. G. J. van Roosmalen, Onderwijzer aan de Stads-Teekenschool, te Zwolle 1835
H. J. Barnekate, Openbaar Onderwijzer, te Almelo . 1836
A. D. Teyler van Hall, Aspirant der Artillerie in Garnizoen, te Naarden 1836
A. A. Holst, Onderwijzer, te Amsterdam 1836
W. Hagenzieker, te Amsterdam 1836
J. C. Olivier, te Zierikzee 1836
J. G. Ottema, Praeceptor der Latijnsche School, te Leeuwarden 1836
Mr. J. Heemskerk, Az., Advocaat, te Amsterdam . . 1836
P. Krom, Onderwijzer, te Amsterdam 1837
C. H. J. van Berchuijs, Math. et Phil. Nat. Candidaat en Arrondissement-IJker, te Deventer . . . 1837
W. ten Entel, Onderwijzer, te Deventer 1837
R. D. Smeding, te Leeuwarden 1837
J. M. J. Pantekoek, Leeraar voor de Wiskunde aan de Latijnsche School, te Leeuwarden 1837

E. van der Oudermeulen, te 's Hage 1837
J. A. Krajenbrink, te Batavia, (zie boven) . . . 1838
A. van der Mey, Onderwijzer aan het Instituut, te Doesborgh 1838
J. A. Hansen, Onderwijzer in de Wiskunde, te Deventer. 1838
A. H. Viersen, Onderwijzer, te Zwartsluis 1838
A. B. Brave, Onderwijzer, te Amsterdam 1838
C. H. Muller, te Almelo 1838
L. A. te Winkel, Gouverneur, te Pietersbierum in *Friesland* 1838
W. G. Ribbius, Math. et Phil. Nat. Cand., te Deventer. 1838
I. Teixeira de Mattos, Jr., te Amsterdam . . . 1838
A. Hulscher, Litt. Candidaat, te Deventer 1838
M. van der Haart, Tz., Boedhandelaar, te Amsterdam. 1838
H. Middelburg, Gouverneur, te Middelburg in Zeeland. 1839
Jacob de la Mar, te Amsterdam 1839
A. van Leeuwen, Onderwijzer, te Amsterdam . . 1839
T. A. F. Delprat, Ie Luiten. der Artillerie, te Nijmegen. 1839
Joseph Dernburg, te Amsterdam 1839
R. Bischoffheim, te Amsterdam 1839
J. H. Schäfer, Luitenant van het Korps Mineurs en *Sappeurs, te Nijmegen* 1840
P. J. A. van Rhede van der Kloot, Adjunct Commies bij het Dept. van Financiën, te 's Hage . . . 1840
C. van Heukelom, Philos. Student, te Amsterdam . 1840
J. G. F. Estré, Cand. in de Letteren, te Amsterdam. 1840
J. de Boer, Onderwijzer, te Haarlem 1840
J. H. Otten, Onderwijzer, te Amsterdam 1840
M. M. Melinga, Onderwijzer, te Amsterdam . . . 1840
A. van Otterlo, Onderwijzer, te Amsterdam . . . 1840
B. P. Bogaerts, Arrondissement-IJker, te Breda . . 1840
J. P. A. François, Onder-Constructeur der Marine, te Amsterdam 1840
G. ten Brummeler, Wzn., Onderwijzer in de Wiskunst, te 's Hage 1840
R. van de Weerd, Onderwijzer, te Kampen . . . 1840
F. P. Klijnsma, 2e Luitenant Ingenieur in Garnizoen te Nijmegen 1840
D. Bierens de Haan, te Amsterdam. 1841

Everhardus Godee, te Utrecht 1841
F. Roeff, Onderwijzer, te Monnikendam 1841
W. Corn. Verseput, te Middelburg 1841
C. W. Smith, 2e Luit. der Artillerie, te Delft . . . 1841
G. L. Kepper, Onderwijzer, te Amsterdam 1841
R. Oldeman, Kostschoolhouder, te Wormerveer . . 1841
Alex. Walraven, te Assen 1841
L. Kluit, Onderwijzer, te Amsterdam 1841
K. Scholte, Onderwijzer, te Edam. 1841
A. H. E. Bourdeau, Rijksontvanger, te Ootmaarsum. 1841
Adrianus Jacobus Bos, te Utrecht 1841

NIEUWE
WISKUNDIGE VOORSTELLEN
MET DERZELVER
ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL.
Door J. BADON GHIJBEN.

Gegeven zijnde de reeks

$1,\ 1\times2,\ 1\times2\times3,\ 1\times2\times3\times4,\ 1\times2\times3\times4\times5,$ *enz.*, *welker algemeene term is* $1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n$, *begeert men midden tusschen elke twee termen eenen term te interpoleren; met andere woorden, welke getallen-waarden verkrijgt men, door, in den algemeenen term, aan* n *de gebrokene waarden* $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, *enz., toe te kennen?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Hoezeer de *gevraagde interpolatie onmiddellijk* gevonden wordt, uit de kennis van de eigenschappen der functie Γ van LEGENDRE, (zie deszelfs werk over de *Elliptische functiën*, bepaaldelijk het aanhangsel over de *Euleriaansche Integralen*,) stellen wij ons voor, dezelve uit eenvoudiger beginselen af te leiden.

Zij daartoe

$$F(n)=1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n\ldots\ldots.(\alpha),$$

dan hebben wij door $n+1$ in plaats van n te stellen, ook

$$F(n+1)=1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n\times(n+1)$$

en, deze vergelijking door de vergelijking (α) deelende, vinden wij

$$\frac{F(n+1)}{F(n)}=n+1,$$

waaruit volgt

$$F(n+1)=(n+1)\,F(n)\ldots\ldots.(\beta);$$

daar nu de eerste term der gegevene reeks de eenheid, en dus $F(1)=1$ is, vinden wij, door in (β) voor n achtervolgens 1, 2, 3, *enz.*, te nemen:

$$F(1) = 1,$$
$$F(2) = 2\,F(1) = 1 \times 2,$$
$$F(3) = 3\,F(2) = 1 \times 2 \times 3,$$
$$F(4) = 4\,F(3) = 1 \times 2 \times 3 \times 4,$$
enz.,

waaruit blijkt, dat de vergelijking (β) genoegzaam is, om de waarde van $F(n)$ voor alle geheele positieve waarden van n te vinden.

Stellen wij in (β) voor n achtervolgens $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, *enz.*, dan komt er

$$F(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\,F(\tfrac{1}{2}),$$
$$F(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}\,F(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}\,F(\tfrac{1}{2}),$$
$$F(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{7}{2}\,F(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{7}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}\,F(\tfrac{1}{2}),$$
enz.

en dus in het algemeen

$$F(n-\tfrac{1}{2}) = F\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}\ldots\tfrac{7}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}F(\tfrac{1}{2})\ldots\ldots(\gamma),$$

zoodat het, om de waarden van $F(n)$, voor $n = 1\tfrac{1}{2}$, $n = 2\tfrac{1}{2}$, $n = 3\tfrac{1}{2}$, *enz.*, te vinden, genoegzaam zal zijn, de waarde van $F(\tfrac{1}{2})$ te bepalen.

Verbeelden wij ons ieder der factoren 1, 2, 3, 4, *enz.* $(n - 1)$, n, uit welker product de termen onzer reeks bestaan, in twee andere factoren ontbonden, stellen wij namelijk

$1 = ab$, $2 = cd$, $3 = ef$, $4 = gh$, *enz.* $n-1 = rs$, $n = tu$,

dan is

$$F(n) = abcdefgh\ldots rstu\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta)$$

en hierin moeten nu, voor eenige waarde van n, de $2n$ eerste factoren van het tweede lid genomen worden; wij hebben alzoo:

$$F(\tfrac{1}{2}) = a,$$
$$F(1) = ab = 1,$$
$$F(\tfrac{3}{2}) = abc = 1 \times c,$$
$$F(2) = abcd = 1 \times 2,$$
$$F(\tfrac{5}{2}) = abcde = 1 \times 2 \times e,$$
$$F(3) = abcdef = 1 \times 2 \times 3,$$
$$F(\tfrac{7}{2}) = abcdefg = 1 \times 2 \times 3 \times g,$$
enz.

$F(n-\frac{1}{2}) = abcdefgh \ldots r = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-2)r,$
$F(n-1) = abcdefgh \ldots rs = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-2)(n-1),$
$F(n-\frac{1}{2}) = abcdefgh \ldots rst = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1)t, \ldots\ldots (\eta)$
$F(n) = abcdefgh \ldots rstu = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1)n.$

Verbinden wij nu de vergelijkingen (γ) en (η) met elkander, dan hebben wij

$$\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \ldots\ldots \tfrac{7}{2} \cdot \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2}\, F(\tfrac{1}{2}) = 1.2.3 \ldots\ldots (n-1)t,$$

waaruit volgt

$$F(\tfrac{1}{2}) = \frac{2.\ 4.\ 6. \ldots\ldots (2n-2)}{3.\ 5.\ 7. \ldots\ldots (2n-1)} t,$$

of ook $\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{16}{25} \cdot \tfrac{36}{49} \ldots\ldots \dfrac{(2n-2)^2}{(2n-1)^2}\, t^2;$

vermenigvuldigen wij nu deze laatste vergelijking, met de vergelijking

$$1 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \ldots\ldots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n},$$

die klaarblijkelijk voor alle waarden van n waar moet zijn, dan komt er

$$\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{48}{49} \ldots\ldots \frac{(2n-1)^2-1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{t^2}{n};$$

maar, omdat $tu = n$ is, hebben wij $\dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{u}$ en dus $\dfrac{t^2}{n} = \dfrac{t}{u}$, hierdoor wordt dan

$$\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{48}{49} \ldots\ldots \frac{(2n-1)^2-1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{t}{u} \ldots (\theta).$$

De factoren der uitdrukking (α) worden hoe langer hoe grooter en het quotient der twee laatste, dat is: $\dfrac{n-1}{n}$ nadert meer en meer tot de eenheid, hoe grooter n wordt, terwijl voor $n = \infty$ de verhouding $\dfrac{n-1}{n}$ gelijk aan de eenheid wordt; bij de factoren der uitdrukking (δ) moet hetzelfde plaats hebben, zoodat voor $n = \infty$, $\dfrac{t}{u} = 1$ moet worden. Nemen wij dus in de formule (θ), die voor alle waarden van n moet doorgaan, $n = \infty$, dan vinden wij terstond

$\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{24}{25} \cdot \tfrac{48}{49}$. *enz. tot in het oneindige*,
waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right) \textit{enz.}$$

In de *Beginselen der Stelkunst* van den Hoogleeraar J. DE GELDER, vindt men § 836 (1e druk) aangetoond, dat het tweede lid der laatste vergelijking, $\frac{1}{4}\pi$ is; wij hebben derhalve

$$\left\{F(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \tfrac{1}{4}\pi$$

of

$$F(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

en hierdoor vinden wij, volgens de vroeger uitgebragte formulen,

$$F(\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\sqrt{\pi},$$

$$F(\tfrac{5}{2}) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\sqrt{\pi},$$

$$F(\tfrac{7}{2}) = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\sqrt{\pi},$$

enz.

hetgeen dan nu de geïnterpoleerde termen zijn, waarnaar in de opgaaf gevraagd was.

II. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

Men vraagt de kromme lijn, welke tot vergelijking heeft $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$, *door punten te construeren, mitsgaders hare voornaamste eigenschappen op te sporen?*

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN *en* L. VAN DE KASTEELE.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

§ 1. Nemen wij XX′ en YY′ (Fig. 1) als assen der coördinaten aan, dan blijkt vooreerst uit het dubbele teeken, in de opgegevene vergelijking voorkomende, dat de kromme lijn boven en beneden de as XX′ denzelfden vorm heeft en dat er voor elke waarden van x niet meer dan twee waarden voor y bestaan.

Schrijvende de vergelijking in de gedaante

$$y = \pm x \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - x},$$

dan is het duidelijk, dat y alleen bestaanbaar kan wezen voor waarden van x, tusschen $x = a$ en $x = -a$ gelegen; nemende dus OA = OB = a, en trekkende door A en B de lijnen PQ en RS, evenwijdig met YY′, dan zal de kromme geheel tusschen deze lijnen gelegen zijn.

§ 2. De vergelijking

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

geeft voor $x = a$, $y = \infty$; bij gevolg is PQ een asymptoot der kromme; voor $x = 0$ en $x = -a$, wordt $y = 0$; bijgevolg gaat de kromme door den oorsprong en is ook B een punt van dezelve.

Stelt men $y = 0$, dan is $x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = 0$, waaraan alleen voldaan kan worden door $x = 0$ en $x = a$ te nemen; de kromme heeft dus met de as XX′ geene andere punten, dan O en B gemeen.

§ 3. Differentiëren wij de vergelijking tweemaal, dan komt er na behoorlijke herleiding

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \pm \frac{a^2 + ax - x^2}{(a-x)\sqrt{(a^2 - x^2)}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

en $$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \pm \frac{a^2(2a + x)}{(a-x)^2 (a+x) \sqrt{(a^2 - x^2)}} \ldots (3).$$

Stellen wij nu $x = 0$, dan wordt $\frac{\delta y}{\delta x} = \pm 1$, bijgevolg heeft de kromme lijn in den oorsprong twee raaklijnen TU en VW, die ieder eenen hoek van 45° met de as XX′ maken en dus onderling regthoekig op elkander staan. Stellen wij $x = a$ en $x = -a$, dan wordt $\frac{\delta x}{\delta y} = \infty$; hierdoor wordt vooreerst het bestaan der asymptoot PQ bevestigd en ten andere aangetoond, dat RS de kromme in het punt B raakt.

Uit de vergelijkingen (1) en (3) blijkt terstond, dat, zoo men x tusschen 0 en a neemt, y en $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ hetzelfde teeken verkrijgen, maar dat de teekens van y en $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ verschillend worden, indien x tusschen 0 en $-a$ wordt genomen; hieruit volgt, dat het gedeelte der kromme lijn tusschen YY′ en PQ begrepen de bolle, maar het gedeelte tusschen YY′ en RS begrepen de holle zijde naar de as XX′ keert.

Uit dit alles blijkt dan reeds, dat de kromme lijn de gedaante moet hebben, die in de figuur is afgebeeld.

§ 4. Om de gevraagde kromme door punten te construëren, beschrijven wij uit O, met OA $= a$ als straal, eenen cirkel, nemen eene zekere waarde OC $= x$ aan, trekken door C eene lijn DE, die XX′ regthoekig snijdt, vereenigen de punten A en D, trekken eindelijk OM′ evenwijdig met AD, en maken CM $=$ CM′, dan zullen M en M′ punten der kromme zijn; want CD is middenevenredig tusschen BC $= a + x$ en AC $= a - x$, en alzoo CD $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$; uit de gelijkvormigheid der driehoeken ACD en OCM′ volgt voorts

$$AC : CD = OC : CM'$$

en derhalve is

$$CM = CM' = \frac{OC \times CD}{AC} = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - x} = x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}.$$

Voor eene negatieve abscis OF is de constructie dezelfde; wij trekken namelijk door F eene lijn GH, die XX′ regthoekig snijdt, vereenigen de punten A en G, trekken ON, evenwijdig met AG en nemen FN′ $=$ FN, dan zullen N en N′ punten der kromme zijn; want nu is OF $= -x$, AF $= a - x$, BF $= a + x$, FG $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ en uit de gelijkvormigheid der driehoeken AFG en OFN volgt de evenredigheid

$$AF : FG = OF : FN,$$

weshalve

$$FN' = FN = \frac{OF \times FG}{AF} = \frac{-x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a - x} = -x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}.$$

Men kan op deze wijze zoo vele punten der kromme bepalen, als men begeert; wij zullen echter later eene nog eenvoudiger constructie leeren kennen.

§ 5. Om de punten te bepalen, waar de kromme door den cirkel ADG gesneden wordt, hebben wij slechts $x^2 + y^2 = a^2$ te stellen; daar, volgens de vergelijking (1), $y^2 = \frac{x^2(a + x)}{a - x}$ is, hebben wij voor de bedoelde snijpunten

$$x^2 + \frac{x^2(a + x)}{a - x} = a^2,$$

waaruit men gemakkelijk vindt

$$x = -a \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2}a;$$

de eerste waarde van x behoort tot het punt B, en de tweede tot de punten K en K′, die alzoo geconstrueerd worden, door de lijn KK′ loodregt door het midden van OA te trekken.

§ 6. Om te onderzoeken, waar de raaklijn evenwijdig aan de as der abscissen loopt, stellen wij $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, waardoor wij volgens (2) hebben

$$a^2 + ax - x^2 = 0;$$

hieruit vindt men op de gewone wijze

$$x = \tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5}),$$

daar echter, het bovenste teeken gebruikende, $x > a$ en dus y onbestaanbaar zou worden, hebben wij alleen

$$x = \tfrac{1}{2}a(1 - \sqrt{5}) = -\tfrac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5});$$

deelen wij dus OB in de uiterste en middelste rede in L, zoodat OL het grootste deel is, dan worden hierdoor de punten I en I′ gevonden, welker raaklijnen evenwijdig met XX′ zijn. Het is uit den aard der zaak duidelijk, dat de ordinaat LI een maximum en de ordinaat LI′ een minimum is, zoodat het onnoodig is het bestaan van dit maximum en minimum, door het teeken dat $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ voor $x = -\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$ verkrijgt, te bevestigen.

§ 7. Uit den vorm der kromme is het reeds af te leiden, dat zij geene buigpunten hebben kan; en inderdaad kan, volgens (3), $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *niet gelijk nul worden, dan door te stellen* $x = -2a$ of $x = \infty$, welke waarden van x beide onbestaanbare waarden voor y zouden geven.

§ 8. Om aan een zeker punt der kromme eene raaklijn te trekken, hebben wij slechts de subtangens te berekenen; deze nu wordt

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{(a-x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{a^2+ax-x^2} \times \frac{x\sqrt{(a^2-x^2)}}{a-x} = \frac{x(a^2-x^2)}{a^2+ax-x^2},$$

welke, in de gedaante $\dfrac{a^2 - x^2}{\frac{a^2}{x} + a - x}$ geschreven wordende, zoo gemakkelijk te construeren is, dat wij er ons niet verder bij zullen ophouden.

§ 9. In de algemeene formule voor de kromtestralen

$$\rho = \pm \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

de gevondene waarden van $\frac{\delta y}{\delta x}$ en $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ substituerende, komt er, na de noodige herleidingen,

$$r = \mp \frac{a(2a^2 - x^2)\surd(2a^2 - x^2)}{(a - x)^2(2a + x)}.$$

Stellende hierin $x = 0$, dan wordt $r = \mp a\surd 2$; de kromtestralen tot het punt O behoorende zijn dus gelijk aan de diagonaal van het vierkant, op den straal des cirkels beschreven; de punten T en V zijn dus de middelpunten der kromtecirkels van het punt O.

Voor $x = -a$, wordt $r = \frac{1}{4}a$; de kromtestraal van het punt B is dus het vierde gedeelte van den straal des cirkels.

Voor $x = a$, wordt $r = \infty$; de oneindig voortloopende takken der kromme nemen dus meer en meer den vorm eener regte lijn aan.

§ 10. Tot het vinden der lengte s van eenen boog der kromme lijn, zoeken wij de waarde die $\delta s = \surd(\delta x^2 + \delta y^2)$ verkrijgt; wij vinden alsdan na de noodige herleidingen

$$\delta s = \frac{a\delta x}{a - x}\surd\frac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2},$$

welke formule door geene substitutie rationaal te maken, en alzoo niet anders dan door eene reeks te integreren is.

Wij gaan dus over tot het berekenen van den inhoud der kromme, uitgedrukt door de formule

$$I = \int y\delta x$$

Voor y alleen de positieve waarde gebruikende, hebben wij dus hier

$$I = \int \delta x \surd\frac{a+x}{a-x} = \int \delta x \frac{a+x}{\surd(a^2-x^2)} = a\int\frac{x\delta x}{\surd(a^2-x^2)} + \int\frac{x^2\delta x}{\surd(a^2-x^2)};$$

nu is $$\int\frac{x\delta x}{\surd(a^2-x^2)} = -\surd(a^2-x^2),$$

$$\int\frac{x^2\delta x}{\surd(a^2-x^2)} = -\tfrac{1}{2}x\surd(a^2-x^2) + \tfrac{1}{2}a^2 \, Boog Sin.\frac{x}{a},$$

en bijgevolg

$$I = -(a+\tfrac{1}{2}x)\surd(a^2-x^2) + \tfrac{1}{2}a^2 \, Boog Sin.\frac{x}{a} + C;$$

Willen wij nu de inhouden van YY' af beginnen te rekenen, dan moet voor $x = 0$, ook $I = 0$ worden; hierdoor vindt men dan $C = a^2$, derhalve is

$$I = a^2 - (a + \tfrac{1}{2}x)\sqrt{(a^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2 Boog Sin. \frac{x}{a}.$$

Stellen wij hierin $x = a$, dan vinden wij voor den inhoud, tusschen de as XX′, de asymptoot AP en den tak OP der kromme begrepen,

$$Inh.\ AOP = a^2 + \tfrac{1}{4}a^2\pi;$$

Stellen wij echter $x = -a$, dan vinden wij, voor den inhoud van den halven knoop,

$$Inh.\ OBI = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2\pi;$$

door verdubbeling dezer uitkomsten, hebben wij ook:

$$Inh.\ OKPQK'O = 2a^2 + \tfrac{1}{2}a^2\pi$$

en $$Inh.\ Knoop. = 2a^2 - \tfrac{1}{2}a^2\pi;$$

derhalve is

$$Inh.\ OKPQK'O + Inh.\ Knoop = 4a^2 = vierk.\ TVUW$$

en $Inh.\ OKPQK'O - Inh.\ Knoop = a^2\pi = cirkel$ ADBE.

§ 11. Om de polaire vergelijking van onze kromme te vinden, nemen wij O als pool en OX als oorsprong der hoeken aan; stellende dus OM $= z$ en *hoek* XOM $= \phi$, zoo hebben wij $y = z\ Sin.\ \phi$ en $x = z\ Cos.\ \phi$, waardoor de vergelijking (1) verandert in

$$z\ Sin.\ \phi = \pm\ z\ Cos.\ \phi \sqrt{\frac{a + z\ Cos.\ \phi}{a - z\ Cos.\ \phi}},$$

door achtervolgende herleidingen volgt hieruit:

$$z^2\ Sin.^2\ \phi = z^2\ Cos.^2\ \phi\ \frac{a + z\ Cos.\ \phi}{a - z\ Cos.\ \phi},$$

$$(a - z\ Cos.\ \phi)\ Sin.^2\ \phi = (a + z\ Cos.\ \phi)\ Cos.^2\ \phi,$$

$$z\ Cos.\ \phi \{Cos.^2\ \phi + Sin.^2\ \phi\} = -a\{Cos.^2\ \phi - Sin.^2\ \phi\},$$

$$z\ Cos.\ \phi = -a\ Cos.\ 2\phi,$$

en eindelijk

$$z = -a\ \frac{Cos.\ 2\phi}{Cos.\ \phi}.$$

Uit deze polaire vergelijking, zouden nu ook al de reeds gevondene eigenschappen der kromme kunnen afgeleid worden; zoo is voor $\phi = 0$, $z = -a$, waardoor het punt B gevonden wordt; voor $\phi = 45°$ is $z = 0$, voor $\phi = 135°$ is mede $z = 0$, hierdoor wordt het punt O met deszelfs raaklijnen TU en VW gevonden; voor $\phi = 60°$ is $z = a$, hierdoor wordt het punt K verkregen; voor $\phi = 90°$ is $z = \infty$, hieruit blijkt, dat er eene asymptoot evenwijdig met YY′ kan zijn, enz.

§ 12. Indien wij de pool in B plaatsen en BX als oorsprong der hoeken behouden, zullen wij, door die nieuwe polaire vergelijking, eene merkwaardige eigenschap der kromme ontdekken. Zij daartoe B n $= z'$, *hoek* XB n $= \phi'$, O f $= x$, n f $= y$, dan blijkt uit de figuur terstond, dat wij hebben:

$$x = z' \, Cos. \, \phi' - a \quad \text{en} \quad y = z' \, Sin. \, \phi';$$

brengende deze waarden in de vergelijking (1), zoo komt er

$$z' \, Sin. \, \phi' = \pm \, (z' \, Cos. \, \phi' - a) \sqrt{\frac{z' \, Cos. \, \phi'}{2a - z' \, Cos. \, \phi'}}$$

of, door achtervolgende herleiding

$$(2a - z' Cos. \phi') z'^2 Sin.^2 \phi' = z' Cos. \phi' (z'^2 Cos.^2 \phi' - 2az' Cos. \phi' + a^2),$$

$$2az' Sin.^2 \phi' - z'^2 Cos. \phi' Sin.^2 \phi' = z'^2 Cos.^3 \phi' - 2az' Cos.^2 \phi' + a^2 Cos. \phi',$$

$$z'^2 Cos. \phi' (Sin.^2 \phi' + Cos.^2 \phi') - 2az (Sin.^2 \phi' + Cos.^2 \phi') = - a^2 Cos. \phi',$$

$$z'^2 - \frac{2a}{Cos. \, \phi'} \, z' = - a^2,$$

waaruit men vindt

$$z' = \frac{a}{Cos. \, \phi'} \pm \sqrt{\left\{\frac{a^2}{Cos.^2 \, \phi'} - a^2\right\}}$$

$$= \frac{a}{Cos. \, \phi'} \pm a \sqrt{\frac{1 - Cos.^2 \, \phi'}{Cos.^2 \, \phi'}}$$

$$= a \, Sec. \, \phi' \pm a \, Tang. \, \phi'.$$

Nu zijn B n en BN de waarden van z', voor $\phi' =$ XB n; voorts is BZ $= a \, Sec. \, \phi'$ en OZ $= a \, Tang. \, \phi'$, en de punten n en N der kromme worden dus gevonden, door op eene polaire ordinaat, uit haar snijpunt Z met de as YY', aan weêrszijden den afstand OZ uit te zetten. De stukken ZN en Z n zijn dus overal even groot en, daar ook altijd BZ $=$ Z b is, zal mede overal BN $=$ n b zijn. Door middel van deze eigenschap, welke eenige overeenkomst heeft, met die der *Conchoide* en *Cissoide*, kan de kromme zeer gemakkelijk geconstrueerd worden, daar men, na de assen XX', YY' getrokken en OB $= a$ genomen te hebben, niets anders te doen heeft, dan uit het punt B een onbepaald aantal lijnen B b te trekken, en op elk dezer lijnen, uit derzelver snijpunt met YY' de afstanden OZ ter wederzijde uit te zetten.

Aanmerking. In de *Differentiaal- en Integraal-Rekening* van I. R. Schmidt, wordt in § 135 tot een voorbeeld den

loop onderzocht der kromme lijn, die $y = x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ tot vergelijking heeft; deze vergelijking heeft veel overeenkomst met de hier behandelde, zoodanig, dat men de waarde van y in de eene slechts met $\sqrt{-1}$ behoeft te vermenigvuldigen, om de waarde van y in de andere te verkrijgen. Waar dus de bestaanbaarheid der waarde van y in de eene vergelijking begint, eindigt die in de andere en omgekeerd. De constructie toont dit ook aan, daar van de aangehaalde kromme niets dan het punt O, overeenkomende met $x = 0$, tusschen PQ en RS valt, maar alle overige punten buiten PQ en RS liggen.

AANMERKING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER. Uit § 16 van het CC. VOORSTEL, II. DEEL der *Verzam. van Wisk. Voorst.* blijkt, dat, indien men de as eener parabool verlengt, op dat verlengde een punt neemt, van den top even ver verwijderd als het brandpunt, en uit dat punt loodlijnen op de raaklijnen dier parabool laat vallen, de meetkunstige plaats van de voetpunten dezer loodlijnen geene andere, dan de in het tegenwoordig voorstel behandelde kromme lijn, zal wezen.

III. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De zijden van eenen regthoekigen driehoek te betekenen en te construeren, zoo gegeven zijn de stralen der cirkels beschreven in de driehoeken, waarin de oorspronkelijke driehoek verdeeld wordt, door eene lijn uit den regten hoek naar het midden der schuinsche zijde getrokken?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, F. C. RADIJS *en* J. G. W. MERKES.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Laat ABC (Fig. 2) de begeerde driehoek zijn, waarin uit den regten hoek B eene lijn BD naar het midden D der schuinsche zijde getrokken is, dan zijn gegeven de stralen der cirkels in de driehoeken ABD en CBD beschreven; stellen wij dus deze stralen EG $= a$, FH $= b$ en zij AD $=$ DC $= x$, dan is AC $= 2x$ en, omdat D het middelpunt is van den cirkel om ABC beschreven, ook BD $= x$; zij verder *hoek* BAC $= \phi$, dan is, in den regt-

hoekigen driehoek ABC, $AB = AC \times Cos.\,BAC = 2x\, Cos.\,\phi$ en $BC = AC \times Sin.\,BAC = 2x\, Sin.\,\phi$.

Voorts is:

$$\begin{aligned} Inh.\ Drieh.\ ABD &= \tfrac{1}{2}EG\{AD + BD + AB\} \\ &= \tfrac{1}{2}a(x + x + 2x\, Cos.\,\phi) \\ &= ax(1 + Cos.\,\phi) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} Inh.\ Drieh.\ CBD &= \tfrac{1}{2}FH\{DC + BD + BC\} \\ &= \tfrac{1}{2}b(x + x + 2x\, Sin.\,\phi) \\ &= bx(1 + Sin.\,\phi); \end{aligned}$$

en, omdat deze driehoeken gelijken inhoud hebben, verkrijgen wij alzoo de vergelijking

$$ax(1 + Cos.\,\phi) = bx(1 + Sin.\,\phi)$$

of door x deelende

$$a(1 + Cos.\,\phi) = b(1 + Sin.\,\phi).$$

Nu is in het algemeen $1 + Cos.\,\phi = 2Cos.^2\,\tfrac{1}{2}\phi$ en $1 + Sin.\,\phi = 1 + Cos.(90° - \phi) = 2Cos.^2(45° - \tfrac{1}{2}\phi)$, waardoor de bovenstaande vergelijking, na deeling door 2, overgaat in

$$a\; Cos.^2\,\tfrac{1}{2}\phi = b\; Cos.^2(45° - \tfrac{1}{2}\phi)$$

of, uit beide leden den vierkants-wortel trekkende,

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi.\,\sqrt{a} = Cos.(45° - \tfrac{1}{2}\phi).\,\sqrt{b}.$$

Ontwikkelen wij $Cos.(45° - \tfrac{1}{2}\phi)$, in het ooghoudende, dat $Sin.\,45° = Cos.\,45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ is, dan komt er

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi.\,\sqrt{a} = (Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi + Sin.\,\tfrac{1}{2}\phi).\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\,\sqrt{b},$$

door $Cos.\,\tfrac{1}{2}\phi$ deelende en met 2 vermenigvuldigende, vinden wij $2\sqrt{a} = (1 + Tang.\,\tfrac{1}{2}\phi)\,\sqrt{2b}$,

waaruit terstond volgt

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2b}} - 1 = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{b}} - 1 = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}},$$

of ook

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{\sqrt{2ab} - b}{b},$$

zoodat dan nu ϕ gevonden is, en dus de hoeken des driehoeks bekend zijn.

Trekken wij vervolgens uit D lijnen DI en DK naar de raakpunten I en K, dan zullen deze lijnen respectievelijk door de punten E en F gaan, alsmede loodregt op het midden van AB en BC staan; trekken wij ook nog AE en CF, dan deelen deze lijnen de hoeken BAC en BCA midden door en wij hebben derhalve, uit de regthoekige driehoeken AEI en CFK,

$2AI = 2EI \times Cot. \frac{1}{2}BAC$ en $2CK = 2FK \times Cot. \frac{1}{2}BCA$,
dat is:

$$AB = 2a\,Cot. \tfrac{1}{2}\phi \qquad \text{en} \qquad BC = 2b\,Cot. (45^\circ - \tfrac{1}{2}\phi)$$

waardoor dan ook de regthoekszijden AB en BC bekend worden.

Wij kunnen deze zijden ook geheel in de gegevens uitdrukken, want wij hebben

$$Cot. \tfrac{1}{2}\phi = \frac{1}{Tang. \frac{1}{2}\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2ab} - b}{b}} = \frac{b}{\sqrt{2ab} - b}$$

$$\text{en } Cot. (45^\circ - \tfrac{1}{2}\phi) = \frac{1 + Tang. \frac{1}{2}\phi}{1 - Tang. \frac{1}{2}\phi} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2ab} - b}{b}}{1 - \frac{\sqrt{2ab} - b}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{2ab}}{2b - \sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b} - \sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{2ab} - a},$$

waardoor de bovenverkregene waarden voor AB en BC overgaan in

$$AB = \frac{2ab}{\sqrt{2ab} - b} \qquad \text{en} \qquad BC = \frac{2ab}{\sqrt{2ab} - a}.$$

De schuinsche zijde AC des driehoeks kan men vervolgens willekeurig door een der formulen $AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)}$ of $AC = AB\ Sec.\ \phi$ berekenen; men zal voor dezelve vinden

$$AC = \frac{2ab(a + b - \sqrt{2ab})}{(\sqrt{2ab} - a)\ (\sqrt{2ab} - b)};$$

en daar $AC = 2x$ is gesteld geworden, blijkt hieruit tevens, dat de gebruikte onbekende x deze waarde heeft:

$$x = \frac{ab(a + b - \sqrt{2ab})}{(\sqrt{2ab} - a)\ (\sqrt{2ab} - b)}.$$

Om den driehoek te construeren nemen wij, op eene onbepaalde regte lijn XY, $LD = DM = b$ en $MN = a$, beschrijven op LN eenen halven cirkel en stellen MP loodregt op LN, dan is $MP = \sqrt{2ab}$; verder nemen wij $PQ = b$ en trekken DQ, dan is *hoek* $QDM = \frac{1}{2}\phi$, want nu is *Tang.* $QDM = \frac{QM}{DM} = \frac{MP - PQ}{DM} = \frac{\sqrt{2ab} - b}{b}$; vervolgens trekken wij DZ, zoodanig, dat *hoek* $ZDY = 4$*hoek* $QDM = 2\phi$ zij en beschrijven, met a als straal in den hoek XDZ, eenen cirkel, trekken uit D, door het middelpunt E van den

cirkel, eene lijn DI en aan dien cirkel in I eene raaklijn AB, hierdoor wordt BD = AD en *hoek* DAB = *hoek* ABD = $\frac{1}{2}$ *hoek* ZDY = ϕ; nemen wij dus eindelijk DC = DA en trekken wij BC, dan zal ABC de gevraagde driehoek zijn.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Om het voorstel in den eigenlijken zin te kunnen oplossen, moeten de stralen a en b zoodanig gegeven zijn, dat de grootste van beide kleiner dan het dubbel van de kleinste is. Want laat a de grootste der beide stralen wezen en tevens $a > 2b$ zijn, dan is:

$$2a > 4b,\ \frac{2a}{b} > 4,\ \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{b}} > 2,\ \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{b}} - 1 > 1,\ Tang.\ \tfrac{1}{2}\phi > 1,$$

$\frac{1}{2}\phi > 45°$ en $\phi > 90°$; voorts volgt uit $a > 2b$ ook nog $a^2 > 2ab$ en $a > \sqrt{2ab}$, zoodat dan BC negatief wordt; AC wordt alsdan mede negatief, omdat $\sqrt{2ab} > b$, en $a + b > \sqrt{2ab}$ is; en dus worden BD = AD = DC = x = $\frac{1}{2}$AC alle insgelijks negatief.

De onderstelling, dat $a > 2b$ is, geeft dus aan den driehoek, met betrekking tot de gegevene cirkels, den stand in Fig. 3 voorgesteld; zoo dat nu de grootste cirkel ook wel de zijden van den driehoek ABD raakt, maar dat deze raking met AB uitwendig is. De opgegevene constructie gaat nu even goed door, zoo als in Fig. 3, waarbij wij dezelfde letters als in Fig. 2 geplaatst hebben, is aangewezen; alleen merken wij op, dat nu, om de vroegere berekening te kunnen behouden, *hoek* BAY = ϕ is; dat *hoek* ZDY = 360° — 4*hoek* QDM genomen en den cirkel met den straal a in den hoek YDZ', over XDZ staande, beschreven moet worden en eindelijk dat nu *hoek* BAD = *hoek* ABD = $\frac{1}{2}$*hoek* ZDY = 180° — 2*hoek* QDM = 180° — ϕ wordt.

Is echter de grootste straal kleiner dan het dubbel van den kleinsten en dus gelijktijdig $a > b$ en $a < 2b$, dan blijft altijd $Tang.\ \frac{1}{2}\phi < 1$ en $\phi < 90°$; als ook blijven dan AB, BC en AC alle positief, zoo dat dan altijd de oplossing in den bedoelden zin plaats kan hebben.

IV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De zijden van eenen regthoekigen driehoek te berekenen en te construeren, zoo gegeven zijn de stralen der cirkels beschreven in de driehoeken, waarin de oorspronkelijke

driehoek verdeeld wordt, door de loodlijn, welke uit den regten hoek op de schuinsche zijde wordt nedergelaten?

Opgelost *door* C. J. Bolten, W. J. C. Rammelman Elsevier, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. G. W. Merkes *en* G. Koster.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Laat ABC (Fig. 4) de begeerde driehoek zijn, uit welks regten hoek B eene loodlijn BD op de schuinsche zijde is nedergelaten, dan zijn gegeven de stralen EF $= a$ en GH $= b$ der cirkels, in de driehoeken ABD en CBD beschreven. Omdat de driehoeken ABD en CBD gelijkvormig en dus hunne gelijkstandige zijden evenredig met de stralen hunner ingeschrevene cirkels zijn, hebben wij terstond

$$AB : BC = a : b;$$

wij kunnen dus stellen

$$AB = ax \text{ en } BC = bx,$$

als wanneer, volgens algemeen bekende eigenschappen der regthoekige driehoeken, terstond gevonden wordt:

$$AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = x\sqrt{(a^2 + b^2)},$$

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2x}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

$$CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{b^2x}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

$$\text{en} \quad BD = \sqrt{AD \times CD} = \frac{abx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Omdat wijders de straal van den ingeschreven cirkel eens driehoeks gevonden wordt, door den omtrek in het dubbel van den inhoud te deelen, zoo hebben wij

$$a = \frac{AD \times BD}{AD + BD + AB} \text{ en } b = \frac{BD \times DC}{BD + DC + BC},$$

en het is genoegzaam, in eene dezer vergelijkingen de bovenstaande waarden der lijnen over te brengen, om onmiddellijk x te vinden; gebruiken wij de eerste, dan verkrijgen wij

$$a = \frac{\frac{a^2x}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \times \frac{abx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}}{\frac{a^2x}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} + \frac{abx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} + ax},$$

waaruit na herleiding volgt

$$x = \frac{\{a + b + \sqrt{(a^2 + b^2)}\}\sqrt{(a^2 + b^2)}}{ab}$$

wordende hierdoor al het overige bekend.

Om den driehoek te construeren, merken wij op, dat uit de gelijkvormigheid der driehoeken ABD en CBD met den geheelen driehoek ABC, volgt,

$$AD : BD = AB : BC \text{ en } BD : CD = AB : BC;$$

maar $AB : BC = a : b$ zijnde, is ook

$$AD : BD = a : b = FD : KD$$

en $$BD : CD = a : b = ID : HD;$$

indien men dus FK en IH trekt, zullen deze lijnen respectievelijk evenwijdig met AB en BC zijn, waaruit onmiddellijk deze constructie volgt.

Stel op eene onbepaalde lijn XY eene loodlijn DZ, beschrijf in de hoeken XDZ en YDZ cirkels met de gegevene stralen, vereenig door regte lijnen de raakpunten F en K, alsmede I en H en trek aan de beschrevene cirkels raaklijnen AB en BC evenwijdig met FK en IH, dan zullen deze raaklijnen elkander in een punt B der lijn DZ snijden, waardoor ABC de begeerde driehoek wordt.

V. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt te bewijzen, dat de som van de vierkanten der stralen, in het laatstvoorgaande voorstel genoemd, gelijk is aan het vierkant van den straal des cirkels, welke in den oorspronkelijken driehoek kan beschreven worden?

Opgelost *door* J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. J. Bolten, F. C. Radijs, G. Koster *en* J. C. Olivier.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat de driehoeken ABD, CBD en ABC (Fig. 4) gelijkvormig zijn, zijn hunne gelijkstandige zijden evenredig met de stralen hunner ingeschrevene cirkels; noemende dus deze stralen respectievelijk a, b en c, dan hebben wij de evenredigheid

$$AB : BC : AC = a : b : c,$$

waaruit terstond volgt

$$AB^2 : BC^2 : AC^2 = a^2 : b^2 : c^2$$

en $$AB^2 + BC^2 : AC^2 = a^2 + b^2 : c^2;$$

maar $AB^2 + BC^2 = AC^2$ zijnde, zoo volgt hieruit het gestelde, namelijk $a^2 + b^2 = c^2$.

Aanmerking van W. J. C. Rammelman Elsevier. In het IV Voorstel, is voor de loodlijn BD gevonden

$$BD = \frac{abx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

en $$x = \frac{\{a + b + \sqrt{(a^2 + b^2)}\}\sqrt{(a^2 + b^2)}}{ab},$$

waaruit volgt $$BD = a + b + \sqrt{(a^2 + b^2)};$$

maar volgens het IV Voorstel is $\sqrt{(a^2 + b^2)} = c$, alzoo is

$$BD = a + b + c;$$

dat is: *de loodlijn, uit den regten hoek eens regthoekigen driehoeks op de hypothenusa vallende, is gelijk aan de som der stralen van de drie cirkels, beschreven in den geheelen driehoek en in de beide kleinere driehoeken, waarin de genoemde loodlijn den geheelen driehoek verdeelt.*

VI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De zijden van eenen driehoek te berekenen, zoo gegeven zijn de inhouden van de driehoeken, waarin de oorspronkelijke driehoek verdeeld wordt, door lijnen, uit het middelpunt des ingeschreven cirkels, naar de hoekpunten te trekken?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, C. J. Bolten, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* G. Koster.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Stellen wij de inhouden, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, door a, b en c voor, de overeenkomstige zijden des driehoeks, door x, y en z, alsmede den straal des ingeschreven cirkels door r, dan hebben wij terstond:

$$rx = 2a, \quad ry = 2b, \quad rz = 2c$$

of $$x = \frac{2a}{r}, \quad y = \frac{2b}{r}, \quad z = \frac{2c}{r} \ldots\ldots (1).$$

Stellen wij nu $x + y + z = 2s$ en $a + b + c = 2I$, dan is, volgens de vergelijking (1),

$$s=\tfrac{1}{2}(x+y+z)=\frac{a+b+c}{r}=\frac{2I}{r},$$

$$s-x=\tfrac{1}{2}(y+z-x)=\frac{b+c-a}{r}=\frac{2(I-a)}{r},$$

$$s-y=\tfrac{1}{2}(x+z-y)=\frac{a+c-b}{r}=\frac{2(I-b)}{r},$$

$$s-z=\tfrac{1}{2}(x+y-z)=\frac{a+b-c}{r}=\frac{2(I-c)}{r};$$

maar de inhoud van den driehoek ten eerste door

$$a+b+c=2I$$

en ten tweede door

$$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

uitgedrukt wordende, hebben wij de vergelijking

$$2I=\sqrt{\frac{16\,I(I-a)(I-b)(I-c)}{r^4}},$$

waaruit volgt

$$r^2=\sqrt{\frac{4(I-a)(I-b)(I-c)}{I}}$$

en

$$r=\sqrt[4]{\frac{4(I-a)(I-b)(I-c)}{I}}.$$

Hierdoor wordt r bekend, en deze waarde van r in de vergelijkingen (1) overbrengende, vindt men dan ook dadelijk de zijden des driehoeks.

VII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt eene harmonische reeks van vier termen, in geheele getallen te vinden, die de volgende eigenschappen heeft: 1°. de som van den eersten en derden term is een vierkant; 2°. de som van den tweeden en vierden term is een vierkant; 3°. de som der vier termen is almede een vierkant; en 4°. de drie genoemde vierkanten zijn drie op elkander volgende termen uit de rij der vierkante getallen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, C. J. BOLTEN, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellen wij x en y voor de beide eerste termen der gevraagde reeks, dan worden de beide laatste, volgens de eigenschappen der harmonische reeksen, voorgesteld door $\frac{xy}{2x-y}$ en $\frac{xy}{3x-2y}$, zoodat dan de reeks is

$$x,\ y,\ \frac{xy}{2x-y} \text{ en } \frac{xy}{3x-2y}.$$

Volgens de opgaaf moeten nu

$$x+\frac{xy}{2x-y},\ y+\frac{xy}{3x-2y} \text{ en } x+y+\frac{xy}{2x-y}+\frac{xy}{3x-2y}$$

drie op elkander volgende vierkante getallen zijn; wij kunnen dus stellen

$$x+\frac{xy}{2x-y}=(a-1)^2 \quad . . (1),$$

$$y+\frac{xy}{3x-2y}=a^2 \quad . . . . (2)$$

$$\text{en } x+y+\frac{xy}{2x-y}+\frac{xy}{3x-2y}=(a+1)^2 . . . (3).$$

Daar het eerste lid der vergelijking (3) juist de som is van de eerste leden der vergelijkingen (1) en (2), moet dit zelfde ten aanzien van de tweede leden dier vergelijkingen plaats hebben; wij hebben dus

$$(a-1)^2+a^2=(a+1)^2$$

of na ontwikkeling en vereenvoudiging

$$a^2-4a=0,$$

waaruit volgt $a=4$ of $a=0$;

daar echter $(a-1)^2$, a^2 en $(a+1)^2$, voor $a=0$ geen drie op elkander volgende vierkanten in den bedoelden zin zouden worden, nemen wij alleen $a=4$, waardoor (1) en (2) overgaan in

$$x+\frac{xy}{2x-y}=9 \text{ en } y+\frac{xy}{3x-2y}=16;$$

de breuken verdrijvende, komt er

$$2x^2=9(2x-y) \text{ en } 2xy-y^2=8(3x-2y);$$

trekken wij nu uit de eerste vergelijking $2x-y=\frac{2}{9}x^2$ en $y=2x-\frac{2}{9}x^2$, en brengen wij deze waarden in de tweede vergelijking over, dezelve daartoe gemakshalve in de gedaante

$$y(2x-y)=8((2x-y)+x-y)$$

schrijvende, dan komt er

$$(2x-\tfrac{2}{9}x^2)\,\tfrac{2}{9}x^2=8(\tfrac{2}{9}x^2+x-2x+\tfrac{2}{9}x^2)$$

of, door achtervolgende herleiding,

$$(2x-\tfrac{2}{9}x^2)\,2x^2=72(\tfrac{4}{9}x^2-x),$$

$$(x-\tfrac{1}{9}x^2)\,x^2=18(\tfrac{4}{9}x^2-x),$$

$$(9x - x^2)\, x^2 = 18(4x^2 - 9x),$$
$$x^4 - 9x^3 + 72x^2 - 162x = 0,$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$x(x - 3)\,(x^2 - 6x + 54) = 0.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door te nemen $x^2 - 6x + 54 = 0$, $x = 0$, of $x - 3 = 0$; uit $x^2 - 6x + 54 = 0$ zou men voor x onbestaanbare waarden verkrijgen; $x = 0$ kan aan de eigenlijke bedoeling des voorstels mede niet beantwoorden; wij hebben dus alleen $x - 3 = 0$ of $x = 3$; hierdoor verkrijgen wij $y = 2x - \frac{2}{9}x^2 = 4$ en bijgevolg vinden wij, voor de gevraagde reeks, de getallen 3, 4, 6 en 12.

VIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar twee drietallen veelhoekige getallen, alle tot denzelfden veelhoek behoorende; elk drietal moet eene rekenkunstige reeks uitmaken, en van deze beide reeksen moeten de uiterste termen verschillend maar de middelste termen en de sommen gelijk zijn?

Opgelost *door* J. S. Speijer, B. Lubbers *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Indien men de algemeene formule voor de n-hoekige getallen

$$y = \frac{(n - 2)\, x^2 - (n - 4)x}{2}$$

aan beide zijden met $8(n - 2)$ vermenigvuldigt en vervolgens aan beide zijden $(n - 4)^2$ optelt, zal men verkrijgen
$8(n-2)y + (n-4)^2 = 4(n-2)^2x^2 - 4(n-2)(n-4)x + (n-4)^2$;
daar het tweede lid nu een volkomen vierkant is, zal men hetzelve door p^2 kunnen voorstellen, men heeft alsdan

$$8(n - 2)\, y + (n - 4)^2 = p^2,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{p^2 - (n - 4)^2}{8(n - 2)};$$

het blijkt dus, dat alle veelhoekige getallen in den vorm $\frac{p^2 - (n - 4)^2}{8(n - 2)}$ begrepen zijn.

Stellen wij dus voor de gevraagde drietallen veelhoekige getallen

$$\frac{q^2-(n-4)^2}{8(n-2)},\ \frac{r^2-(n-4)^2}{8(n-2)} \text{ en } \frac{s^2-(n-4)^2}{8(n-2)} \text{(A)}$$

$$\text{en } \frac{t^2-(n-4)^2}{8(n-2)},\ \frac{r^2-(n-4)^2}{8(n-2)} \text{ en } \frac{u^2-(n-4)^2}{8(n-2)} \text{(B)},$$

dan is aan de voorwaarde voldaan, dat het alle n-hoekige getallen en dat de middelste termen gelijk zijn, zoodat er alleen overblijft te voldoen aan de voorwaarde, dat deze drietallen verschillende rekenkunstige reeksen uitmaken; want de voorwaarde, dat de sommen dezer beide reeksen gelijk zijn, is overtollig, omdat van alle rekenkunstige reeksen van drie termen, die gelijke middelste termen hebben, de sommen van zelf gelijk zijn.

Nu zullen de vormen (A) en (B) klaarblijkelijk verschillende rekenkunstige reeksen uitmaken, indien slechts q^2, r^2 en s^2, alsmede t^2, r^2 en u^2 verschillende rekenkunstige reeksen zijn, en hieraan zal (blijkens het CCXXXIII Voorstel van het VI. Deel der *Verz. van Wisk. Voorst.*) voldaan worden, indien men neemt:

$$r = (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$
$$q = (a^2+b^2)(c^2-d^2-2cd),$$
$$s = (a^2+b^2)(c^2-d^2+2cd),$$
$$t = (c^2+d^2)(a^2-b^2-2ab)$$
$$\text{en } u = (c^2+d^2)(a^2-b^2+2ab);$$

men kan dus voor a, b, c en d willekeurige waarden nemen, en de overeenkomstige waarden van q, r, s, t, u, benevens eene willekeurige waarde voor n, in de vormen (A) en (B) overbrengen, waardoor de begeerde drietallen veelhoekige getallen zullen te voorschijn komen.

Nemen wij bijv. $a=2$, $b=1$, $c=3$ en $d=2$, dan is $r=65$, $q=-35$, $s=85$, $t=-13$, $u=91$; nemen wij verder $n=5$, dan verschaffen (A) en (B) de getallen

51, 176, 301; en 7, 176, 345;

welke alle vijfhoekig zijn en aan al de overige voorwaarden des voorstels voldoen.

Aanmerking. Dewijl in het algemeen:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$\text{en } (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

is, zal de waarde, die wij voor r verkrijgen, altijd op twee

verschillende wijzen in de som van twee vierkanten kunnen verdeeld worden.

Daar nu de wortels van drie vierkanten, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, (blijkens het CCXVII Voorstel van het V Deel der *Verz. van Wisk. Voorst.*) door de vormen

$$h^2 - k^2 - 2kh, \quad h^2 + k^2 \text{ en } h^2 - k^2 + 2kh$$

kunnen worden voorgesteld, zal men, voor h^2 en k^2 de boven aangewezene deelen van r nemende, ook daardoor nog twee rekenkunstige reeksen kunnen verkrijgen, waarvan de termen vierkanten zijn en die r^2 tot middelste term hebben. In de vormen (A) en (B) zal men dus ook kunnen nemen, voor de eene reeks $h^2 = (ac + bd)^2$ en $k^2 = (ad - bc)^2$ stellende:

$$q = (ac + bd)^2 - (ad - bc)^2 - 2(ac + bd)(ad - bc),$$
$$r = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$
$$s = (ac + bd)^2 - (ad - bc)^2 + 2(ac + bd)(ad - bc);$$

en voor de tweede reeks $h^2 = (ac - bd)^2$ en $k^2 = (ad + bc)^2$ stellende:

$$t = (ac - bd)^2 - (ad + bc)^2 - 2(ac - bd)(ad + bc),$$
$$r = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$
$$u = (ac - bd)^2 - (ad + bc)^2 + 2(ac - bd)(ad + bc),$$

zoodat men wel *vier* in plaats van *twee* drietallen veelhoekige getallen kan vinden, die aan de vraag voldoen.

In deze laatste vormen voor a, b, c en d dezelfde getallen als vroeger nemende, vindt men natuurlijk weder $r = 56$, maar nu wordt $q = 47$, $s = 79$, $t = -89$, $u = 23$; en hierdoor verschaffen de vormen (A) en (B), weder $n = 5$ nemende, nog de beide drietallen

92, 176, 260; en 330, 176 en 22;

welke getallen mede alle vijfhoekig zijn en aan de overige voorwaarden des voorstels even goed voldoen, als de twee vroeger gevondene drietallen, die mede 176 tot middelsten term hadden.

IX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welke getallen van twee cijfers zijn er, die de eigenschap hebben, dat, het getal en deszelfs omgekeerde in het vierkant gebragt wordende, het eene dezer vierkanten wederom het omgekeerde van het andere is?

Opgelost door J. S. Speijer, M. G. Snoek, S. T. Boas, C. J. Bolten, B. Lubbers en F. C. Radijs.

Oplossing van J. S. Speijer.

Omdat de vierkanten der getallen van twee cijfers zoowel uit vier als uit drie cijfers bestaan kunnen, zullen wij vooreerst aannemen, dat de vierkanten der begeerde getallen uit vier cijfers bestaan; laat dan $10x + y$ het begeerde getal zijn, zoo stellen wij

$$(10x + y)^2 = 1000p + 100q + 10r + s \ldots (1)$$

en dan zal volgens het voorstel

$$(10y + x)^2 = 1000s + 100r + 10q + p \ldots (2)$$

moeten zijn.

Omdat alle volkomen vierkanten, op de plaats der eenheden, een der cijfers 1, 4, 5, 6, 9 of 0 hebben, en p het cijfer der eenheden van zulk een vierkant $(10y + x)^2$ voorstelt, terwijl de onderstelling, dat $(10x + y)^2$ een getal van vier cijfers is, niet toelaat, dat $p = 0$ zou zijn, kan men alleen hebben $p = 1$, $p = 4$, $p = 5$, $p = 6$ of $p = 9$.

Indien men het cijfer der eenheden van een vierkant kent kan men daaruit besluiten, wat het cijfer der eenheden van den wortel zou kunnen zijn; volgens de vergelijking (2) moet dus overeenstemmen:

met $p = 1$, $x = 1$ of 9,
» $p = 4$, $x = 2$ of 8,
» $p = 5$, $x = 5$,
» $p = 6$, $x = 4$ of 6,
» $p = 9$, $x = 3$ of 7.

Indien men van een getal van vier cijfers het cijfer der duizendtallen kent, kan men daaruit afleiden, wat het cijfer der tientallen van den vierkantswortel zou kunnen zijn; volgens de vergelijking (1) moet dus overeenstemmen:

met $p = 1$, $x = 3$ of 4,
» $p = 4$, $x = 6$ of 7,
» $p = 5$, $x = 7$,
» $p = 6$, $x = 7$ of 8,
» $p = 9$, $x = 9$.

Bij elke mogelijke waarde van p, sluiten dus de waarden, die x volgens (1) en volgens (2) zou moeten hebben, elkander uit; en wij kunnen dus veilig besluiten, dat de begeerde

getallen geene vierkanten van vier cijfers kunnen hebben. Het omgekeerde van die vierkanten, dat is: het vierkant van hun omgekeerde, zal dus mede geene vier cijfers kunnen hebben.

Hieruit volgt onmiddellijk, daar de vierkantswortel uit 1000 tusschen 31 en 32 ligt, dat de begeerde getallen of hun omgekeerde het getal 31 niet mogen te bovengaan, x en y zullen dus geen van beide grooter dan 3, of x^2 en y^2 geen van beide grooter dan 9 kunnen zijn.

Daar nu x^2 en y^2 beide getallen van *één* cijfer zijn, zal de voorwaarde, dat

$$(10y + x)^2 = 100y^2 + 10 \times (2xy) + x^2$$

het omgekeerde is van

$$(10x + y)^2 = 100x^2 + 10 \times (2xy) + y^2.$$

al of niet vervuld zijn, naar gelang ook $2xy$ al of niet een getal van *één* cijfer is. Wij moeten dus hebben

$$x^2 < 10 \quad y^2 < 10 \quad \text{en} \quad 2xy < 10,$$

maar is slechts hieraan voldaan, dan zal ook $10x + y$ een getal zijn, dat aan het voorstel beantwoordt; mits men tevens, om, zoo als gevraagd was, een getal van twee cijfers te bekomen, x niet gelijk nul neme.

Met in het ooghouding dezer voorwaarden, kan

met $x=1$ overeenstemmen $y=0$, $y=1$, $y=2$ of $y=3$;
» $x=2$ » $y=0$, $y=1$ of $y=2$;
» $x=3$ » $y=0$ of $y=1$;

zoo dat de gevraagde getallen kunnen zijn

10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 en 31.

Begeert men, dat de getallen, omgekeerd wordende, getallen van twee cijfers blijven, dan vervallen de getallen 10, 20 en 30; begeert men bovendien, dat de getallen en hun omgekeerde verschillend zijn, dan vervallen 11 en 22, zoodat dan 12 en 21, 13 en 31 de eenigste getallen zijn, die aan het voorstel beantwoorden.

X. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welk getal van twee cijfers heeft de eigenschap, dat de som van het getal en deszelfs omgekeerde een vierkant is, hetwelk de som der cijfers van het getal tot wortel heeft?

Opgelost *door* B. Lubbers, D. Bax Backer, S. T. Boar,

C. J. Bolten, L. van de Kasteele, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, M. G. Snoek en J. S. Speijer.

Oplossing van B. Lubbers.

Het getal zij $10x + y$, dan is deszelfs omgekeerde $10y + x$ en volgens de opgaaf moet men dan hebben

$$10x + y + 10y + x = (x + y)^2$$

of $$11(x + y) = (x + y)^2;$$

daar $x + y$ uit den aard der zaak niet gelijk nul kan zijn, deelen wij deze vergelijking door $x + y$ en verkrijgen dan

$$11 = x + y;$$

de eenige voorwaarde, waaraan het begeerde getal voldoen moet, is dus dat de som van deszelfs cijfers 11 moet wezen; en hetzelve kan dus zijn

29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 of 92,

zoo dat er in het geheel acht antwoorden op het voorstel zijn.

XI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van eenen driehoek, die aan de bazis eenen stompen hoek heeft, is de langste zijde tot de hoogte als 5 *tot* 3; *voorts maken de basis, de hoogte en de derde zijde des driehoeks eene opklimmende rekenkunstige reeks uit, waarvan het verschil* $8\frac{1}{2}$ *lengte eenheden bevat. Welke zijn de afmetingen van dezen driehoek?*

Opgelost *door* C. J. Bolten, S. T. Boas, S. Dik, Cornsz., G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek en J. S. Speijer.

Oplossing van C. J. Bolten.

Laat ABC (Fig. 5) de bedoelde driehoek, B deszelfs stompe hoek en CD deszelfs hoogte zijn, dan is AC de langste zijde; zoo wij dus stellen $AC = 5x$,
is volgens de opgaaf $CD = 3x$,
en alzoo $AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = 4x.$

Daar verder AB, CD en BC eene opklimmende rekenkunstige reeks moeten uitmaken, waarvan $8\frac{1}{2}$ het verschil is, zoo is

$$AB = CD - 8\tfrac{1}{2} = 3x - 8\tfrac{1}{2},$$
$$BC = CD + 8\tfrac{1}{2} = 3x + 8\tfrac{1}{2}$$

en dus ook $BD = AD - AB = x + 8\frac{1}{2}$.

Nu is $$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

of, voor deze lijnen de bovenstaande waarden stellende;

$$(3x + 8\tfrac{1}{2})^2 = (x + 8\tfrac{1}{2})^2 + (3x)^2;$$

deze vergelijking ontwikkelende, heeft men

$$9x^2 + 51x + (8\tfrac{1}{2})^2 = x^2 + 17x + (8\tfrac{1}{2})^2 + 9x^2$$

en vereenvoudigende

$$-x^2 = 34x,$$

waaruit, omdat x niet gelijk nul kan zijn, alleen volgt

$$x = 34.$$

Derhalve zijn de gevraagde afmetingen van den driehoek:

$AB=3x-8\tfrac{1}{2}=93\tfrac{1}{2}$, $BC=3x+8\tfrac{1}{2}=110\tfrac{1}{2}$, $AC=5x=170$
$CD=3x=102$ en $BD=x+8\tfrac{1}{2}=42\tfrac{1}{2}$.

XII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van eenen dergelijken driehoek staat de hoogte tot de basis als 3 tot 1; de langste zijde en de loodlijn verschillen 22, de basis en de derde zijde verschillen 66 lengte eenheden. Men wil ook van dezen driehoek de afmetingen berekenen?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER S. DIK, CORNSZ., G. KOSTER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC (Fig. 5) wederom den bedoelden driehoek voorstellen, en stellen wij nogmaals

$$CD = 3x,$$

dan is

$$AB = x,$$
$$AC = 3x + 22,$$

en

$$BC = x + 66.$$

Volgens eene bekende eigenschap der driehoeken, heeft men nu

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB.\,BD$$

of

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB\,\sqrt{(BC^2 - CD^2)};$$

hierin voor de lijnen de bovenstaande waarden stellende, komt er

$$(3x+22)^2 = x^2 + (x+66)^2 + 2x\sqrt{\{(x+66)^2-(3x)^2\}}$$

of door ontwikkeling en vereenvoudiging

$$7x^2 - 3872 = 2x\sqrt{(4356 + 132x - 8x^2)};$$

deze vergelijking in het vierkant brengende en herleidende, verkrijgt men

$$81x^4 - 528x^3 - 71632x^2 + 14992384 = 0,$$

en hiervan heeft het eerste lid eenen tweeledigen factor, namelijk $3x - 88$, zoodat men heeft

$$(3x - 88)\,(27x^3 + 616\,x^2 - 5808x - 170368) = 0.$$

Den tweeden factor gelijk nul stellende, zal men bevinden, dat de daaruit ontstaande derdemagts-vergelijking slechts éénen positieven wortel tusschen 15 en 16 heeft; maar AC de langste zijde des driehoeks zijnde, moet $AC > BC$ of $3x + 22 > x + 66$ en bijgevolg $x > 22$ zijn, het nul stellen van den tweeden factor levert dus voor x geene bruikbare waarde op. Den eersten factor gelijk nul stellende, heeft men terstond $3x = 88$ of $x = 29\frac{1}{3}$, zoodat wij dan voor de afmetingen des driehoeks hebben

$AB = x = 29\frac{1}{3}$, $BC = x + 66 = 95\frac{1}{3}$, $AC = 3x + 22 = 110$ en $CD = 3x = 88$.

XIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

In een verticaal vlak gegeven zijnde een punt A *en eene regte lijn* MN, (*Fig.* 6) *begeert men den stand van eene regte lijn* AB, MN *in* B *ontmoetende, zoodanig te bepalen, dat een ligchaam, uit* A *beginnende te vallen, in den kortstmogelijken tijd langs* AB, *de lijn* MN *zal bereiken?*

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., L. J. Ulman, C. J. Bolten, L. van de Kasteele, G. Koster, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Laat uit A eene verticale lijn AP, gelijk mede eene lijn AC loodregt op MN, getrokken worden, dan zal de lijn AB den begeerden stand hebben, indien zij den hoek PAC midden door deelt.

Stellen wij, om dit aan te toonen, dat AB den hoek PAC midden door deele en trekken wij BD evenwijdig met AC, dan is *hoek* ABD = *hoek* BAC = *hoek* BAD en dus AD = BD, zoodat de cirkel, uit D als middelpunt met AD als straal beschreven, door het punt B gaat, en, omdat BD loodregt op MN staat, de lijn MN in B raakt. Indien wij dan nu uit A eenige andere lijn Ab naar eenig punt van MN trekken, zal deze lijn den cirkel in eenig punt E snijden; en dan zal een ligchaam, dat uit A begint te vallen de lijnen AB en AE in gelijke tijden doorloopen;

maar het ligchaam heeft meer tijd noodig om Ab, dan om AE te doorloopen, derhalve wordt er meer tijd vereischt om van A langs Ab tot aan MN te komen, dan langs AB; zoodat AB de regte lijn is, langs welke het ligchaam de lijn MN in den kortstmogelijken tijd bereikt.

Aanmerking. Indien de lijn MN den stand van Fig. 7 heeft, blijft de constructie ter bepaling van den stand der lijn AB dezelfde, mits men slechts altijd den hoek midden door deele, dien het naar beneden loopende gedeelte der verticaal AP met de loodlijn AC maakt. Was de lijn MN verticaal, dan zou AB een' hellings-hoek van 45° hebben.

XIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Het zwaartepunt te vinden van den boog eener parabool? (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, S. Dik, Cornsz., W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, S. T. Boas *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat PP′ (Fig. 8) de boog zijn eener parabool, waarvan A de top en AX de as is, dan is, A voor oorsprong en AX voor as der abscissen nemende, de vergelijking dezer parabool

$$y^2 = 2px \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

waarin p de halve parameter beteekent.

Laat Z het zwaartepunt van den boog PP′ zijn, dan hebben wij, ZZ′ loodregt op AX trekkende, ter bepaling van dat zwaartepunt, de algemeen bekende formulen

$$ZZ' = \frac{\int y\delta s}{\int \delta s} \quad \text{en} \quad AZ' = \frac{\int x\delta s}{\int \delta s} \ldots\ldots (2),$$

waarin wij voor δs de waarde uit de vergelijking (1) moeten afleiden en vervolgens de aangewezene integralen tusschen de grenzen $y = PM$ en $y = P'M'$ berekenen.

Uit (1) volgt door differentiatie $2y\delta y = 2p\delta x$, alzoo is:

$$\delta x = \frac{y}{p}\delta y, \delta s = \sqrt{(\delta y^2 + \delta x^2)} = \delta y\sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)} = \frac{1}{p}\delta y\sqrt{(p^2 + y^2)}$$

en derhalve

(*) I. R. Schmidt, *Statica*. 1e Deel, blads. 87.

$$\left.\begin{aligned}\int\delta s &= \frac{1}{p}\int\delta y\,\sqrt{(p^2+y^2)},\\ \int y\delta s &= \frac{1}{p}\int y\delta y\,\sqrt{(p^2+y^2)},\\ \int x\delta s &= \frac{1}{2p^2}\int y^2\delta y\sqrt{(p^2+y^2)}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

Nu is (zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 211)

$$\int\delta y\sqrt{(p^2+y^2)} = \tfrac{1}{2}y(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}p^2 Log.\frac{y+\sqrt{(p^2+y^2)}}{p},$$

$$\int y\delta y\sqrt{(p^2+y^2)} = \tfrac{1}{3}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\int y^2\delta y\sqrt{(p^2+y^2)} = \tfrac{1}{8}y(p^2+2y^2)(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}p^4 Log.\frac{y+\sqrt{(p^2+y^2)}}{p};$$

en stellen wij PM $= a$, P′M′ $= a'$, dan moeten wij deze integralen van $y = a$ tot $y = a'$ nemen, waardoor de vergelijkingen (3) overgaan in:

$$\left.\begin{aligned}\int\delta s &= \frac{1}{2p}\left\{a'(p^2+a'^2)^{\frac{1}{2}} - a(p^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\right\} + \tfrac{1}{2}p Log.\frac{a'+\sqrt{(p^2+a'^2)}}{a+\sqrt{(p^2+a^2)}},\\ \int y\delta s &= \frac{1}{3p}\left\{(p^2+a'^2)^{\frac{3}{2}} - (p^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\right\},\\ \int x\delta s &= \frac{1}{16p^2}\left\{a'(p^2+2a'^2)(p^2+a'^2)^{\frac{1}{2}} - a(p^2+2a^2)(p^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &\qquad - \frac{1}{16}p^2 Log.\frac{a'+\sqrt{(p^2+a'^2)}}{a+\sqrt{(p^2+a^2)}}\end{aligned}\right\}(4);$$

en men heeft slechts deze waarden in (2) over te brengen, om ZZ' en AZ' in de gegevens uit te drukken.

Wij kunnen echter, voor de coördinaten van het zwaartepunt, eenvoudiger uitdrukkingen vinden, door als gegevens aan te nemen, behalve de ordinaten PM $= a$ en P′M′ $= a'$ ook nog de normalen PR en P′R′ der punten P en P′, alsmede de lengte van den boog PP′ zelve; zij alzoo PP′ $= s$, PR $= n$, P′R′ $= n'$, en nemen wij in aanmerking, dat de subnormaal in de parabool standvastig gelijk is aan de halve parameter, zoodat MR $=$ M′R′ $= p$ is, dan hebben wij

$$\sqrt{(p^2+a^2)} = n, \qquad \sqrt{(p^2+a'^2)} = n'$$

en ook $p^2+2a^2 = a^2+n^2$, $p^2+2a'^2 = a'^2+n'^2$, waardoor de vergelijkingen (4) worden:

$$s = \frac{a'n' - an}{2p} + \tfrac{1}{2} p \, Log. \frac{a' + n'}{a + n},$$

$$\int y \partial s = \frac{n'^3 - n^3}{3p}$$

en $$\int x \partial s = \frac{a'n'(a'^2 + n'^2) - an(a^2 + n^2)}{16p^2} - \tfrac{1}{16} p^2 Log. \frac{a' + n'}{a + n};$$

indien wij verder, uit de eerste dezer drie vergelijkingen, $Log. \frac{a' + n'}{a + n}$ afzonderen en die waarde in de laatste overbrengen, komt er achtervolgens:

$$\int x \partial s = \frac{a'n'(a'^2 + n'^2) - an(a^2 + n^2)}{16p^2} + \frac{a'n' - an}{16} - \tfrac{1}{8} ps,$$

$$\int x \partial s = \frac{a'n'(p^2 + a'^2 + n'^2) - an(p^2 + a^2 + n^2)}{16p^2} - \tfrac{1}{8} ps,$$

$$\int x \partial s = \frac{a'n'(2n'^2) - an(2n^2)}{16p^2} - \tfrac{1}{8} ps,$$

$$\int x \partial s = \frac{a'n'^3 - an^3}{8p^2} - \tfrac{1}{8} ps.$$

Brengen wij de nu gevondene eenvoudige uitdrukkingen voor $\int y \partial s$ en $\int x \partial s$ in (2) over, dan hebben wij

$$ZZ' = \frac{n'^3 - n^3}{3ps}$$

en $$AZ' = \frac{a'n'^3 - an^3}{8p^2 s} - \tfrac{1}{8} p.$$

Wilde men het zwaartepunt van den boog AP′ kennen, dan zou men, omdat in het punt A de ordinaat nul en de normaal gelijk aan de halve parameter is, $a = 0$ en $n = p$ moeten stellen, en alzoo hebben

$$ZZ' = \frac{n'^3 - p^3}{3ps} \qquad AZ' = \frac{a'n'^3}{8p^2 s} - \tfrac{1}{8} p,$$

waarin nu s den boog AP′ voorstelt.

Wilde men het zwaartepunt van eenen boog QAP′ vinden, dan zou men moeten opletten, dat, voor een punt Q beneden de as, de ordinaat negatief maar de normaal positief is, zoodat dan de termen in den teller van ZZ′ altijd afgetrokken, maar die in den teller van AZ′ opgeteld zouden moeten worden.

Was de tak AQ even groot als AP′, dan zou $n = n'$ en

$s = -a'$ zijn, zoodat men voor sulk eenen boog QAP'. hebben zou

$$ZZ' = 0 \quad \text{en} \quad AZ' = \frac{a'n'^3}{4p^2s} - \tfrac{1}{8}p,$$

waarin s den geheelen boog QAP' beteekent.

Men zou ook nog kunnen gebruik maken van de kromtestralen der punten P en P' en deze als gegevens invoeren; indien r en r' deze kromtestralen zijn, heeft men, volgens eene bekende eigenschap der kegelsneden,

$$r = \frac{n^3}{p^2} \quad \text{en} \quad r' = \frac{n'^3}{p^2};$$

hierdoor verandert men de gevondene uitkomsten voor den boog PP' gemakkelijk in

$$ZZ' = \frac{p(r' - r)}{3s} \quad \text{en} \quad AZ' = \frac{a'r' - ar}{8s} - \tfrac{1}{8}p;$$

voor den boog AP' zou dan

$$ZZ' = \frac{p(r' - p)}{3s} \quad \text{en} \quad AZ' = \frac{a'r'}{8s} - \tfrac{1}{8}p$$

en voor den boog QAP'

$$ZZ' = 0 \qquad \text{en} \quad AZ' = \frac{a'r'}{4s} - \tfrac{1}{8}p$$

zijn.

XV. Voorstel.

Door J. G. W. Merkes.

Op de regte lijn, die twee lichtende punten A *en* B *vereenigt, begeert men een punt* C *te vinden, dat even sterk door beide verlicht wordt; gegeven zijnde de afstand* d *der punten* A *en* B *en de verhouding* $p : q$ *van hun lichtgevend vermogen?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. G. W. Merkes, W. J. C. Rammelman Elsevier, G. Koster *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

In de natuurkunde wordt geleerd, dat de uitwerking van het licht omgekeerd evenredig is, met het vierkant van den afstand, tusschen het lichtgevend en het verlicht wordend punt begrepen.

Stellen wij dus de afstanden, van het gevraagde punt C, tot de punten A en B, respectievelijk door x en y voor, zoodat $x + y = d$ is, dan zou C, wanneer A en B gelijke

lichtgevende vermogens hadden, door dezelve verlicht worden, in de verhouding van $\frac{1}{x^2} : \frac{1}{y^2}$; terwijl nu, daar de lichtgevende vermogens als $p : q$ zijn, C door A en B in de verhouding van $\frac{p}{x^2} : \frac{q}{y^2}$ zal verlicht worden. Omdat nu C door A en B even sterk moet verlicht worden, zal $\frac{p}{x^2} = \frac{q}{y^2}$ of $py^2 = qx^2$ moeten zijn, en wij hebben dus ter bepaling van het punt C de vergelijkingen

$$x + y = d \quad \text{en} \quad py^2 = qx^2;$$

uit de laatste vergelijking volgt $y = \pm x\sqrt{\frac{q}{p}}$, en deze waarde voor y in de eerste overbrengende, komt er

$$x \pm x\sqrt{\frac{q}{p}} = d$$

of

$$x\sqrt{p} \pm x\sqrt{q} = d\sqrt{p},$$

waaruit volgt

$$x = \frac{d\sqrt{p}}{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}},$$

terwijl dan uit $y = d - x$ gevonden wordt

$$y = \pm \frac{d\sqrt{q}}{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}.$$

Het punt C, waarnaar gevraagd was, kan dus op twee plaatsen gelegen zijn; de eerste wordt gevonden door de bovenste teekens te gebruiken, als wanneer

$$x = \frac{d\sqrt{p}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \quad \text{en} \quad y = \frac{d\sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$$

beide positief zijn; deze plaats van het punt C valt dus tusschen A en B. De tweede plaats van het punt C wordt gevonden, door de onderste teekens te nemen, alsdan zijn

$$x = \frac{d\sqrt{p}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} \quad \text{en} \quad y = -\frac{d\sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}$$

een van beide negatief en wel x of y, naar gelang $p < q$ of $p > q$ is; deze plaats van het punt C ligt dus op het verlengde van de lijn, die de punten A en B vereenigt; en wel aan dien kant waar zich het zwakst lichtende punt bevindt.

Is $p = q$, dan is de eerste plaats van het punt C midden tusschen A en B gelegen; want men heeft dan $x = \frac{1}{2} d$,

en $y = \frac{1}{2} d$; voor de tweede plaats van het punt C is in dit geval $x = \infty$ en $y = -\infty$, zoodat dit punt C oneindig ver van A en B moet zijn, en dus niet aangewezen kan worden.

XVI. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Wanneer men eene gewone breuk, die de eenheid tot teller en een ondeelbaar getal A *tot noemer heeft, in eene tiendeelige breuk ontwikkelt en bevindt, dat het aantal cijfers in het repetendum* $2n$ *is, dan zal de* n^{de} *rest der deeling* A — 1 *zijn. Men vraagt naar het bewijs?*

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, L. J. ULMAN, J. S. SPEIJER, G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Het aantal cijfers in het repetendum $2n$ zijnde, moet $10^{2n} - 1$ of $(10^n - 1)(10^n + 1)$ volkomen door A deelbaar wezen; omdat A een ondeelbaar getal is, moet dus een der factoren $10^n - 1$ of $10^n + 1$ door A deelbaar zijn; maar $10^n - 1$ kan door A niet deelbaar wezen, omdat dan het repetendum slechts uit n en geenszins uit $2n$ cijfers bestaan zou; bij gevolg moet $10^n + 1$ door A zonder overschot kunnen gedeeld worden, dat is: $\frac{10^n + 1}{A} = a$ moet een geheel getal zijn.

Uit deze vergelijking volgt

$$\frac{10^n}{A} = a - \frac{1}{A} = a - 1 + \frac{A - 1}{A},$$

waardoor het gestelde bewezen is.

AANMERKING. Uit de vergelijking $\frac{10^n + 1}{A} = a$ volgt $\frac{10^{2n} - 1}{A} = a(10^n - 1) = a \times 10^n - a$; indien men dus weet, dat bij de ontwikkeling van het gebroken $\frac{1}{A}$ het repetendum $2n$ cijfers zal bevatten, behoeft men slechts de n eerste cijfers van dat repetendum door deeling te vinden, de andere kunnen dan door aftrekking verkregen worden. Weet men dus, dat bijv. $\frac{1}{73}$ acht cijfers in het repetendum geeft,

dan berekene men $a = \frac{10^4 + 1}{73} = 0137$, en dan is $a \times 10^4 - a = 01370000 - 0137 = 01369863$ het repetendum.

XVII. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Uit de vergelijkingen

$$z^2 + x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 = 2c^2 \ (8),$$

$$x^2 + y^2 - \tfrac{1}{2}z^2 = 2a^2 \ (98)$$

en

$$y^2 + z^2 - \tfrac{1}{2}x^2 = 2b^2 \ (50),$$

de waarden van x, y en z te vinden?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. BAS BACKER, S. T. BOAS, O. J. BOLTEN, H. KLOOS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* G. KOSTER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men de drie gegevene vergelijkingen bij elkander optelt, komt er

$$\tfrac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

dus is

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

trekt men van deze laatste vergelijking beurtelings elk der gegevene vergelijkingen af, dan verkrijgt men:

$$\tfrac{3}{2}x^2 = \tfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 2b^2,$$

$$\tfrac{3}{2}y^2 = \tfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 2c^2$$

en

$$\tfrac{3}{2}z^2 = \tfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2,$$

waaruit na herleiding terstond volgt

$$x = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(2a^2 + 2c^2 - b^2)},$$

$$y = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(2b^2 + 2a^2 - c^2)}$$

en

$$z = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{(2c^2 + 2b^2 - a^2)}.$$

Hierin voor a^2, b^2 en c^2 de gegevene getallen stellende, heeft men

$$x = \pm 6,\ y = \pm 8 \text{ en } z = \pm 2.$$

AANMERKING. De gevondene waarden van x, y en z drukken de zijden eens driehoeks uit, indien a, b en c de lijnen zijn, die uit de hoekpunten naar het midden der overstaande zijden getrokken worden. (Men zie het IX VOORSTEL van het II. DEEL der *Verzam. van Wisk. Voorst.*)

XVIII. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Eene rekenkunstige reeks te vinden van drie termen, in geheele positieve getallen, waarvan de eerste term een trigonaal, de tweede een pronik en de derde een vierkant is?

OPGELOST *door* H. KLOOS, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, G. KOSTER, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* H. KLOOS.

Men stelle voor den tweeden term $x^2 + x$ en voor den derden $x^2 + 2x + 1$, dan is, volgens de eigenschap der rekenkunstige reeksen, de eerste term $x^2 - 1$. Door de gestelde vormen is aan de voorwaarden voldaan, dat de tweede term een pronik en de derde een vierkant moet wezen, zoodat er alleen overblijft den eersten term $x^2 - 1$ tot een trigonaal te maken. Nu zal, zoo als genoegzaam bekend is, $x^2 - 1$ een trigonaal zijn, indien slechts $8(x^2 - 1) + 1$ een vierkant is; laat dan $2x + p$ de wortel van dat vierkant zijn, zoo is

$$8(x^2 - 1) + 1 = (2x + p)^2,$$

of na herleiding

$$x^2 - px = \frac{p^2 + 7}{4},$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2p^2 + 7)}$$

Neemt men nu voor p achtervolgens de getallen 1, 3, 9, 19, *enz.*, dan vindt men:

$x = 2$ en dan is de reeks 3, 6 en 9;
$x = 4$ . . . . 15, 20 en 25;
$x = 11$ . . . . 120, 132 en 144;
$x = 23$ . . . . 528, 552 en 576; *enz.*

XIX. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

In eenen zak zijn negen nommers: 1, 2, 3, enz. tot 9; hieruit moeten vijf personen elk een nommer trekken, zullende door hem, die het hoogste nommer trekt, eenen zekeren prijs gewonnen worden. Welk nommer moet nu door den eerst trekkenden persoon getrokken worden, opdat hij evenveel kans verkrijge, om den prijs al of niet te winnen?

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat x het nommer zijn, dat door den eersten persoon moet getrokken worden, dan moeten, indien de eerste persoon het spel zal winnen, alle vier de overige personen een lager nommer trekken. Het aantal nommers, waaruit de tweede persoon moet trekken, is 8, en onder deze 8 zijn er $x - 1$ lager dan x; de kans dat de tweede persoon een van die lagere nommers zal trekken, is dus $\frac{x-1}{8}$; even zoo vindt men voor de kansen, dat de volgende personen lagere nommers zullen trekken $\frac{x-2}{7}$, $\frac{x-3}{6}$ en $\frac{x-4}{5}$.

De kans nu, dat al de vier overige personen achtervolgens lagere nommers zullen trekken, bestaat uit het product der kansen, dat zij dit elk afzonderlijk zullen doen, en is dus

$$\frac{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-4)}{8.\quad 7.\quad 6.\quad 5};$$

deze kans is ook de kans van den eersten persoon, om den prijs te winnen; maar, zal hij even veel kans hebben om den prijs al of niet te winnen, dan moet deze kans door $\frac{1}{2}$ worden uitgedrukt, zoodat wij hebben

$$\frac{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-4)}{8.\quad 7.\quad 6.\quad 5} = \frac{1}{2}$$

of $\quad (x-1)\ (x-2)\ (x-3)\ (x-4) = 7.\ 6.\ 5.\ 4.$

Aan deze vergelijking wordt blijkbaar voldaan door $x = 8$, zoodat de eerste persoon het nommer 8 moet trekken, om even veel kans te verkrijgen van den prijs al of niet te winnen.

XX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

In eenen cirkel, op de middellijn AB *beschreven, (Fig. 9.) is, uit elk punt* C *van den omtrek, eene loodlijn* CM *op die middellijn nedergelaten, en op het verlengde van die loodlijn naar den kant van* C *een stuk* CP *genomen, gelijk aan de overeenkomstige koorde* AC. *Men vraagt naar de voornaamste eigenschappen der kromme lijn, waarin al de hierdoor verkregene punten* P *gelegen zijn?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier *en* L. van de Kasteele.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat O het middelpunt des cirkels zijn en stellen wij den straal AO = OB = a, trekken wij AP en stellen wij AP = z en hoek PAB = ϕ, A tot pool en AB tot oorsprong der hoeken aannemende, dan hebben wij, ter bepaling der polaire vergelijking van de gevraagde kromme lijn,

$$AM = z\,Cos.\,\phi,$$

$$AC = \sqrt{AB \times AM} = \sqrt{2azCos.\,\phi},$$

$$CM = \sqrt{AM \times BM} = \sqrt{zCos.\,\phi(2a - zCos.\,\phi)},$$

$$PM = zSin.\,\phi,$$

en dus, daar volgens de bepaling des voorstels PM=AC+CM is,

$$zSin.\,\phi = \sqrt{2azCos.\,\phi} + \sqrt{zCos.\,\phi(2a - zCos.\,\phi)}.\ (1);$$

deze vergelijking in het vierkant brengende en door z deelende, komt er

$$zSin.^2\phi = 4aCos.\phi - zCos.^2\phi + 2\sqrt{2aCos.^2\phi(2a - 2Cos.\phi)}$$

of $$z - 4aCos.\,\phi = 2\sqrt{2aCos.^2\,\phi(2a - zCos.\,\phi)};$$

deze nogmaals tot de tweede magt verheffende, komt er

$$z^2 - 8azCos.\phi + 16a^2Cos.^2\phi = 16a^2Cos.^2\phi - 8azCos.^3\phi$$

of $$z = 8aCos.\,\phi(1 - Cos.^2\,\phi),$$

dat is: $$z = 8aSin.^2\,\phi\,Cos.\,\phi \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

hetwelk nu de polaire vergelijking is.

Uit deze vergelijking blijkt, dat gelijke positieve en negatieve waarden van ϕ dezelfde waarde voor z geven; de kromme lijn heeft dus boven en beneden AB volmaakt dezelfde gedaante, zoodat wij ons alleen met het gedeelte dat boven AB ligt behoeven bezig te houden.

Dewijl voorts de vergelijking (2) uit (1) is afgeleid, door het verdrijven der wortelteekens, is de betrekking tusschen z en ϕ, door (2) voorgesteld, dezelfde, alsof men in plaats van (1) geschreven had

$$zSin.\phi = \pm\sqrt{2azCos.\phi} \pm \sqrt{zCos.\phi(2a - zCos.\phi)},$$

dat is: PM = ± AC ± CM; zoodra de hoegrootheid van de lijnen AC en CM bepaald is, zijn er alzoo voor PM de vier waarden AC + CM, AC — CM, — AC + CM en — AC — CM, welke alle geconstrueerd worden, door op de loodlijn CC′ de koorde AC ter wederzijde van elk der punten C en C′ uit te zetten.

Voor $\phi = 0$, is $z = 0$ het punt A is dus een punt der kromme en de lijn AB raakt haar in dit punt.

Van $\phi = 0$ tot $\phi = 90^\circ$ is z positief, van $\phi = 90^\circ$ tot $\phi = 270^\circ$ is z negatief; van $\phi = 270^\circ$ tot $\phi = 360^\circ$ is z weder positief, zoodat de kromme lijn geene punten kan hebben ter linkerzijde van de lijn YY', door A loodregt op AB getrokken. Dit was trouwens ook uit de constructie gemakkelijk op te maken, waaruit mede terstond blijkt, dat de kromme geene punten ter regterzijde van de lijn DD', loodregt door B op AB getrokken, hebben kan.

Voor $\phi = 45^\circ$, is $z = 2a\sqrt{2}$; neemt men dus $BD = BD' = 2a$, dan zijn D en D' punten der kromme.

Voor $\phi = 90^\circ$, is $z = 0$; de lijn YY' raakt dus almede de kromme in het punt A.

Om de punten te bepalen, die onze kromme lijn met den cirkel ACB gemeen heeft, merken wij op, dat de polaire vergelijking van dien cirkel, ten opzigte van den aangenomen oorsprong van coördinaten, $z = 2a Cos.\ \phi$ is, en dat dus voor die punten $Cos.\ \phi = \frac{z}{2a}$ moet zijn; stellen wij dus deze waarde voor $Cos.\ \phi$ in de vergelijking (2), dan komt er

$$z = 4z\left(1 - \frac{z^2}{4a^2}\right)$$

of na herleiding

$$z(12a^2 - z^2) = 0,$$

aan welke vergelijking voldaan wordt, door te nemen

$$z = 0 \text{ en } z = \pm 2a\sqrt{3};$$

de bedoelde punten zijn dus vooreerst het punt A en ten andere de punten S en S', die gevonden worden, door in den cirkel de koorden $BS = BS' = a$ uit te zetten.

Om de grootste polaire ordinaat te vinden, maken wij, door het differentieren der vergelijking (2), de waarden van $\frac{\partial z}{\partial \phi}$, en $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ op, hiervoor vinden wij

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = 8a Sin.\ \phi(3 Cos.^2\ \phi - 1) \dots\dots (3)$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = 8a Cos.\ \phi(9 Cos.^2\ \phi - 7) \dots\dots (4);$$

zal nu $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$ zijn, dan moet $Sin.\ \phi = 0$, of $Cos.^2\ \phi = \frac{1}{3}$ wezen, voor $Sin.\ \phi = 0$, is $Cos.\ \phi = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}$ positief en

dus z een minimum; voor $Cos.^2\,\phi = \frac{1}{3}$, is $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \phi}$ negatief en alzoo z een maximum. De waarde van dit maximum wordt gevonden, door in (2) $Cos.\ \phi = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ en dus $Sin.^2\,\phi = \frac{2}{3}$ te stellen; de grootste waarde van z is alzoo

$$z = \pm\tfrac{16}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \pm\tfrac{16}{9}a\sqrt{3}.$$

Deze grootste polaire ordinaat wordt gemakkelijk geconstrueerd, zoo men slechts BE $= \frac{2}{3}a$ neemt, door E eene lijn loodregt op AB trekt en ER $=$ AE maakt, want dan zal AR $= \frac{16}{9}a\sqrt{3}$ zijn. Uit de constructie namelijk volgt

$$ER = AE = \sqrt{(AB^2 - BE^2)} = \sqrt{(4a^2 - \tfrac{4}{9}a^2)} = \tfrac{4}{3}a\sqrt{2},$$

$$EH = \frac{BE \times AE}{AB} = \frac{\frac{2}{3}a \times \frac{4}{3}a\sqrt{2}}{2a} = \tfrac{4}{9}a\sqrt{2}$$

en $AR = \sqrt{(AE^2 + ER^2 + 2ER \times EH)} = \sqrt{(2ER^2 + 2ER \times EH)}$

$$= \sqrt{(\tfrac{64}{9}a^2 + \tfrac{64}{27}a^2)} = \tfrac{16}{9}a\sqrt{3}.$$

Stellen wij den hoek, dien de raaklijn van eenig punt der kromme met den voerstraal van dat punt maakt, door ψ voor, dan is in het algemeen $Tang.\ \psi = \frac{z\partial\phi}{\partial z}$; hierin volgens (2) en (3) de waarden van z en van $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ stellende, vinden wij

$$Tang.\ \psi = \frac{Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi}{3Cos.^2\,\phi - 1} \ldots\ldots\ldots (5).$$

Voor $\phi = 0$, is ook $\psi = 0$; waaruit op nieuw blijkt, dat AB eene gemeenschappelijke raaklijn aan de bogen AS en AS' is; omdat er geene punten der kromme ter linkerzijde van YY' liggen, is dan ook A een keerpunt.

Voor $\phi = 90°$, is alsmede $\psi = 0$; waaruit op nieuw blijkt, dat de lijn YY' de kromme in A raakt.

Voor $\phi = 45°$, is $Tang.\ \psi = 1$ en $\psi = 45°$; de kromme lijn wordt dus in de punten D en D' door de lijn DD' geraakt.

Bij de grootste polaire ordinaat AR is reeds gevonden, dat $Sin.\ \phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ en $Cos.\ \phi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ is; voor deze waarden van $Sin.\ \phi$ en $Cos.\ \phi$, wordt $Tang.\ \psi = \infty$ en $\psi = 90°$; in het punt R staat dus de raaklijn loodregt op den voerstraal.

Voor het punt Q, waarvan de raaklijn evenwijdig met AB

loopt, moet $\psi = 180^\circ - \phi$ zijn; volgens (5) moet men dus voor dat punt hebben

$$-\,Tang.\,\phi = \frac{Sin.\,\phi\;Cos.\,\phi}{3Cos.^2\,\phi - 1},$$

of door $Sin.\,\phi$ deelende

$$-\frac{1}{Cos.\,\phi} = \frac{Cos.\,\phi}{3Cos.^2\,\phi - 1},$$

waaruit gevonden wordt $Cos.^2\,\phi = \frac{1}{4}$, $Cos.\,\phi = \frac{1}{2}$ en $\phi = 60^\circ$; met deze waarde van ϕ stemt volgens (2) overeen $x = 3a$; neemt men dus *hoek* BAQ $= 60^\circ$ en AQ $= 3a$, dan is Q het bedoelde punt der kromme. Voor dat punt is AN $= x Cos.\,\phi = \frac{3}{2}a$, het punt Q ligt dus op de loodlijn, die uit het midden van OB op AB wordt opgerigt, op welke loodlijn ook het vroeger bepaalde punt S gelegen is.

De inhoud van den polairen sector eener kromme lijn in het algemeen uitgedrukt wordende door de formule $I = \frac{1}{2}\int x^2 \partial\phi$, zoo hebben wij, hierin voor x de waarde (2) stellende, voor onze kromme

$$I = 32a^2 \int Sin.^4\phi\; Cos.^2\phi\, \partial\phi,$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$I = 32a^2 \int Sin.^4\,\phi\,\partial\phi - 32a^2 \int Sin.^6\,\phi\,\partial\phi;$$

nu is (volgens I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 245.)

$$\int Sin.^4\phi\,\partial\phi = -\tfrac{1}{4} Sin.^3\phi\, Cos.\phi - \tfrac{3}{8} Sin.\phi\, Cos.\phi + \tfrac{3}{8}\phi$$

en $\int Sin.^6\phi\,\partial\phi = -\tfrac{1}{6} Sin.^5\phi\, Cos.\phi - \tfrac{5}{24} Sin.^3\phi\, Cos.\phi - \tfrac{15}{48} Sin.\phi\, Cos.\phi + \tfrac{15}{48}\phi$;

hierdoor wordt

$$I = 32a^2\left(\tfrac{1}{6} Sin.^5\phi\, Cos.\phi - \tfrac{1}{24} Sin.^3\phi\, Cos.\phi - \tfrac{1}{16} Sin.\phi\, Cos.\phi + \tfrac{1}{16}\phi\right),$$

waarbij wij, de inhouden van AB af willende rekenen, geene standvastige behoeven te voegen.

Neemt men $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, dan vindt men

Inh. AP′DPA $= a^2\pi =$ *Inh. Cirkel* AC′BCA;

de geheele inhoud door de beide bladen der kromme lijn ingesloten, is dus gelijk aan tweemaal den cirkel die AB, of ook gelijk aan den cirkel, die AD tot middellijn heeft.

Neemt men $\phi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$, dan vindt men

Inh. AP′SDQA $= \frac{2}{3}a^2\pi$;

hieruit volgt, dat de voerstraal AQ, het blad AP′DPA in twee deelen verdeelt, die in rede zijn als 2 tot 1.

Neemt men $\phi = 30^\circ = \frac{1}{6}\pi$, dan vindt men

$$Inh.\ AP'SA = \tfrac{1}{6}a^2(2\pi - 3\sqrt{3});$$

daar het cirkelsegment BESB een boog van 60° bevat, zal men voor deszelfs inhoud gemakkelijk vinden

$$Inh.\ Segm.\ BESB = \tfrac{1}{12}a^2(2\pi - 3\sqrt{3}),$$

waaruit volgt

$$Inh.\ AP'SA = 2\ Inh.\ Segm.\ BESB.$$

Dewijl het rectificeren der kromme tot eene differentiaal uitdrukking voert, die in geen' eindigen vorm geïntegreerd kan worden, zullen wij ons daarmede niet ophouden en het aangevoerde als genoegzaam beschouwen, om de voornaamste eigenschappen onzer kromme lijn te leeren kennen.

XXI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Drie geheele positieve getallen te vinden, zoodat, als men hun gedurig product vermindert met hunne producten twee aan twee genomen, de resten volkomen vierkanten zijn? (*)

OPGELOST *door* G. KOSTER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* G. KOSTER.

Stel voor de begeerde getallen x, y^2 en z^2, dan moeten volgens de opgave

$$xy^2z^2 - xy^2 = y^2(xz^2 - x),$$
$$xy^2z^2 - xz^2 = z^2(xy^2 - x)$$

en

$$xy^2z^2 - y^2z^2 = y^2z^2(x - 1)$$

volkomen vierkanten zijn; hiertoe is het genoegzaam x, y en z zoodanig te bepalen, dat

$$xz^2 - x, \quad xy^2 - x \quad \text{en} \quad x - 1$$

vierkanten worden.

Om $x - 1$ tot een vierkant te maken, kan men voor x elk getal nemen, dat 1 meer dan een willekeurig vierkant is, bijv. $x = 2$; de beide andere uitdrukkingen, die nu nog vierkanten moeten worden, zijn dan

$$2z^2 - 2 \quad \text{en} \quad 2y^2 - 2;$$

stellen wij nu $z = a + 1$ en $y = b - 1$, dan veranderen deze uitdrukkingen in

$$2a^2 + 4a \quad \text{en} \quad 2b^2 - 4b$$

en wij kunnen, om dezelve tot vierkanten te maken, stellen

(*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect*, N°. 271.

$$2a^2 + 4a = a^2c^2 \quad \text{en} \quad 2b^2 - 4b = b^2d^2,$$

uit welke vergelijkingen terstond gevonden wordt:

$$a = \frac{4}{c^2 - 2} \quad \text{en} \quad b = \frac{4}{2 - d^2}.$$

Hierin moeten voor c en d zulke waarden genomen worden, dat a en b heele getallen worden; wij nemen daartoe $c = \frac{3}{2}$ en $d = 1$, dan wordt $a = 16$ en $b = 4$, derhalve $x = a + 1 = 17$ en $y = b - 1 = 3$, waardoor wij voor de begeerde getallen verkrijgen

$$x = 2, \quad y^2 = 9 \quad \text{en} \quad z^2 = 289.$$

XXII. Voorstel.

Door K. Smit.

Drie getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoodat, als men hun gemeen verschil optelt bij hunne producten twee aan twee genomen, de sommen volkomen vierkanten zijn? (*)

Opgelost *door* G. Koster *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* G. Koster.

Wanneer men eene rekenkunstige reeks van drie termen heeft en deze twee aan twee met elkander vermenigvuldigt, maken de producten eene harmonische reeks uit; en omgekeerd, wanneer van drie getallen de producten twee aan twee harmonisch evenredig zijn, zullen die getallen eene rekenkunstige reeks uitmaken. Deze bekende eigenschap der rekenkunstige reeksen, zullen wij tot de oplossing des voorstels gebruiken.

Laat a het verschil der begeerde rekenkunstige reeks zijn, en nemen wij voor de vierkanten, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, aan:

$$(x - a)^2, \quad x^2 \quad \text{en} \quad (x + a)^2$$

dan moeten wij, door van elke dezer vierkanten het verschil a af te trekken, de producten van de termen der reeks, twee aan twee genomen, verkrijgen; deze producten zijn alzoo

$$(x - a)^2 - a, \quad x^2 - a \quad \text{en} \quad (x + a)^2 - a.$$

Volgens de aangehaalde eigenschap, moeten deze producten harmonisch evenredig zijn, en wij hebben alzoo:

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect*, N°. 298.

$$\frac{(x-a)^2-a}{(x+a)^2-a}=\frac{\{x^2-a\}-\{(x-a)^2-a\}}{\{(x+a)^2-a\}-\{x^2-a\}}$$

of door achtervolgende herleiding

$$\frac{x^2-2ax+a^2-a}{x^2+2ax+a^2-a}=\frac{2ax-a^2}{2ax+a^2},$$

$$\frac{x^2-2ax+a^2-a}{x^2+2ax+a^2-a}=\frac{2x-a}{2x+a},$$

$$(2x+a)(x^2-2ax+a^2-a)=(2x-a)(x^2+2ax+a^2-a),$$

$$2x^3-3ax^2-2ax+a^3-a^2=2x^3+3ax^2-2ax-a^3+a^2,$$

$$6ax^2=2a^3-2a^2,$$

$$3x^2=a^2-a$$

en eindelijk $$x^2=\frac{a^2-a}{3};$$

omdat hieruit blijkt, dat $\frac{a^2-a}{3}$ een volkomen vierkant moet wezen, stellen wij

$$\frac{a^2-a}{3}=a^2b^2,$$

dan vinden wij hieruit terstond

$$a=\frac{1}{1-3b^2}.$$

Voor b kan nu eene willekeurige waarde genomen worden; nemen wij, om alles in geheele getallen te hebben, $b=\frac{15}{26}$, dan vinden wij $a=676$ en $x=390$, en bijgevolg verkrijgen wij voor de producten van de termen der reeks, twee aan twee genomen

$$(x-a)^2-a=81120,$$

$$x^2-a=151424$$

en $$(x+a)^2-a=1135680.$$

Om nu de termen der begeerde reeks zelve te vinden, stellen wij voor dezelve $y-a$, y en $y+a$, dan is

$$(y-a)y=81120$$

en $$(y+a)y=1135680;$$

de som dezer vergelijkingen nemende, komt er

$$2y^2=1216800,$$

waaruit volgt $$y=780,$$

weshalve wij voor de begeerde reeks verkrijgen

$$y-a=104,\quad y=780\quad \text{en}\quad y+a=1456.$$

XXIII. Voorstel.

Door K. Smit.

Drie getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoodat, als men hun gedurig product aftrekt van hunne producten twee aan twee genomen, de resten volkomen vierkanten zijn? (*)

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* G. Koster.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Voor de bedoelde reeks stellende $x - y$, x en $x + y$, dan zullen de uitdrukkingen

$$\left.\begin{array}{ll} & (x-y)x-(x-y)x(x+y)=(x^2-xy)(1-x-y), \\ & x(x+y)-(x-y)x(x+y)=(x^2+xy)(1-x+y) \\ \text{en} & (x-y)(x+y)-(x-y)x(x+y)=(x^2-y^2)(1-x) \end{array}\right\}(A)$$

volkomen vierkanten moeten wezen.

Nemen wij nu aan, dat de eerste uitdrukking een vierkant wordt, omdat zulks met de beide factoren $x^2 - xy$ en $1 - x - y$ ieder in het bijzonder het geval is, dan kunnen wij, om $x^2 - xy$ tot een vierkant te maken, stellen:

$$x^2 - xy = u^2(x - y)^2,$$

waaruit volgt, door $x - y$ deelende,

$$x = u^2(x - y)$$

en

$$y = \frac{u^2 - 1}{u^2}x.$$

Stellen wij verder $x = u^2z$, dan is $y = (u^4 - 1)z$ en door substitutie dezer waarden voor x en y gaan de uitdrukkingen (A) over in

$$u^2z^2(1 - (2u^2 - 1)z),$$
$$u^2z^2(2u^2 - 1)(1 - z)$$

en

$$z^2(2u^2 - 1)(1 - u^2z),$$

zoodat wij nu slechts

$$\left.\begin{array}{ll} & 1 - (2u^2 - 1)z, \\ & (2u^2 - 1)(1 - z) \\ \text{en} & (2u^2 - 1)(1 - u^2z) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

tot vierkanten te maken hebben.

Nemen wij nu aanvankelijk voor u eene willekeurige waarde, bijv. $u = 2$, en stellen wij $1 - 7z = n^2$ of $z =$

(*) P. Halcker, *Zinnen Confect*, No. 303.

$\frac{1-n^2}{7}$, dan veranderen de uitdrukkingen (B) in

$$1 - 7z = n^2,$$
$$7(1-z) = n^2 + 6 = \tfrac{1}{4}((2n)^2 + 24)$$
en $$7(1-4z) = 4n^2 + 3 = (2n)^2 + 3;$$

en het valt terstond in het oog, dat deze uitdrukkingen vierkanten zullen worden, door te nemen $2n = 1$, of $n = \frac{1}{2}$; alsdan wordt $z = \frac{1-n^2}{7} = \frac{3}{28}$, $x = n^2 z = \frac{12}{28}$, $y = (n^2 - 1)z = \frac{9}{28}$, weshalve wij dan voor de begeerde getallen zullen hebben

$$x - y = \tfrac{3}{28}, \quad x = \tfrac{3}{7} \quad \text{en} \quad x + y = \tfrac{3}{4}.$$

Hadden wij, in plaats van $n = 2$, $n = 3$ genomen, dan zouden wij, door op dezelfde wijze te werk te gaan, voor de begeerde reeks gevonden hebben $-\frac{13}{612}$, $-\frac{117}{612}$, $-\frac{221}{612}$.

XXIV. Voorstel.

Door K. Smit.

Eenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodat, als men bij het getal, dat den inhoud uitdrukt, de getallen optelt, die de lengte der regthoekszijden aangeven, er twee volkomen vierkanten komen? (*)

Opgelost door J. S. Speijer, G. Koster, J. C. Olivier en F. C. Radijs.

Oplossing van J. S. Speijer.

Om de drie zijden van den regthoekigen driehoek in rationale getallen te vinden, stellen wij voor de beide regthoekszijden $3x$ en $4x$, dan is de hypothenusa $5x$ en de inhoud $6x^2$. Nu moeten volgens het voorstel $6x^2 + 3x$ en $6x^2 + 4x$ beide volkomen vierkanten zijn.

Wij stellen te dien einde

$$6x^2 + 4x = n^2 x^2,$$

dan volgt hieruit

$$x = \frac{4}{n^2 - 6}$$

en derhalve, na behoorlijke herleiding,

$$6x^2 + 3x = \frac{4(3n^2 + 6)}{(n^2 - 6)^2},$$

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect*, No. 339.

waaruit blijkt, dat n zoodanig zal moeten bepaald worden, dat $3n^2 + 6$ een volkomen vierkant zij.

Door $n = m + 1$ te nemen, wordt

$$3n^2 + 6 = 3m^2 + 6m + 9$$

en, om deze uitdrukking tot een vierkant te maken, kunnen wij stellen

$$3m^2 + 6m + 9 = (pm - 3)^2,$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$m = \frac{6(p + 1)}{p^2 - 3};$$

hierin kan men aan p eene willekeurige waarde geven, mits slechts, opdat x naar behooren positief zij, $n^2 > 6$ en dus $m > \sqrt{6} - 1$ worde.

Voor $p = 1$, of $p = 3$, verkrijgen wij $m = -6$, of $m = 4$, $n = -5$, of $n = +5$, $x = \frac{4}{19}$; en bijgevolg hebben wij dan voor de zijden des regthoekigen driehoeks

$$3x = \tfrac{12}{19} \quad 4x = \tfrac{16}{19} \quad \text{en} \quad 5x = \tfrac{20}{19}.$$

XXV. Voorstel.

Door K. Smit.

Van eenen onregelmatigen zevenhoek, in eenen cirkel beschreven, bevatten de zijden achtervolgens 16, 25, 25, 25, 33, 33 *en* 39 *lengte-eenheden; men vraagt hoeveel lengte-eenheden de middellijn van dien cirkel bevat?* (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABCDEFG (Fig. 10) den bedoelden zevenhoek voorstellen, waarin gegeven is $AB = 16 = a$, $BC = CD = DE = 25 = b$, $EF = FG = 33 = c$ en $GA = 39 = d$; laat voorts uit het middelpunt M van den cirkel, waarin die zevenhoek beschreven is, stralen naar de hoekpunten getrokken worden, dan zijn de middelpuntshoeken, die over de gelijke zijden staan, even groot; stellen wij derhalve *hoek* AMB $= \alpha$, *hoek* BMC $=$ *hoek* CMD $=$ *hoek* DME $= \beta$, *hoek* EMF $=$ *hoek* FMG $= \gamma$ en *hoek* GMA $= \delta$, dan is:

$$\alpha + 3\beta = 360° - (2\gamma + \delta),$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{3}{2}\beta = 180° - (\gamma + \tfrac{1}{2}\delta),$$
$$Sin.(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{3}{2}\beta) = Sin.(\gamma + \tfrac{1}{2}\delta)$$

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect*, No. 488.

of door ontwikkeling

$$Sin.\tfrac{1}{2}\alpha Cos.\tfrac{3}{2}\beta + Sin.\tfrac{3}{2}\beta Cos.\tfrac{1}{2}\alpha = Sin.\gamma Cos.\tfrac{1}{2}\delta + Sin.\tfrac{1}{2}\delta Cos.\gamma \quad (A)$$

Stellen wij nu de middellijn des cirkels door x voor, dan is volgens bekende eigenschappen

$a = xSin.\tfrac{1}{2}\alpha$, $b = xSin.\tfrac{1}{2}\beta$, $c = xSin.\tfrac{1}{2}\gamma$ en $d = xSin.\tfrac{1}{2}\delta$,

hieruit volgt onmiddellijk

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{a}{x},\quad Cos.\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x},$$

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}\beta = \frac{b}{x},\quad Cos.\ \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)}}{x},$$

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c}{x},\quad Cos.\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(x^2 - c^2)}}{x},$$

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}\delta = \frac{d}{x},\quad Cos.\ \tfrac{1}{2}\delta = \frac{\sqrt{(x^2 - d^2)}}{x}.$$

Volgens de algemeene formulen

$$Sin.\ 2\phi = 2Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi,\quad Cos.\ 2\phi = 1 - 2Sin.^2\ \phi,$$

$$Sin.3\phi = 3Sin.\phi - 4Sin.^3\phi,\quad Cos.3\phi = Cos.\phi(1 - 4Sin.^2\phi),$$

is dan ook:

$$Sin.\gamma = 2Sin.\tfrac{1}{2}\gamma Cos.\tfrac{1}{2}\gamma = 2.\frac{c}{x}.\frac{\sqrt{(x^2-c^2)}}{x} = \frac{2c\sqrt{(x^2-c^2)}}{x^2},$$

$$Cos.\gamma = 1 - 2Sin.^2\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - 2\frac{c^2}{x^2} = \frac{x^2-2c^2}{x^2},$$

$$Sin.\tfrac{3}{2}\beta = 3Sin.\tfrac{1}{2}\beta - 4Sin.^3\tfrac{1}{2}\beta = \frac{3b}{x} - \frac{4b^3}{x^3} = \frac{b(3x^2-4b^2)}{x^3},$$

$$Cos.\tfrac{3}{2}\beta = Cos.\tfrac{1}{2}\beta(1 - 4Sin.^2\tfrac{1}{2}\beta) = \left(1 - \frac{4b^2}{x^2}\right)\frac{\sqrt{(x^2-b^2)}}{x} = \frac{(x^2-4b^2)\sqrt{(x^2-b^2)}}{x^3}.$$

Substitueren wij nu al de verkregene waarden in de vergelijking (A), dan komt er

$$\frac{a(x^2 - 4b^2)\sqrt{(x^4 - b^2)}}{x^4} + \frac{b(3x^2 - 4b^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x^4} =$$

$$= \frac{2c\sqrt{(x^2 - c^2)}\ (x^2 - d^2)}{x^3} + \frac{d(x^2 - 2c^2)}{x^3}$$

en, zoo wij deze vergelijking met x^4 vermenigvuldigen en voor a, b, c en d de gegevene getallenwaarden stellen,

$$16(x^2-2500)\sqrt{(x^2-625)} + 25(3x^2-2500)\sqrt{(x^2-256)} =$$

$$= 66x\sqrt{(x^2-1089)}(x^2-1521) + 39x(x^2-2178). \quad (B).$$

Uit deze vergelijking zouden wij nu eerst, door achtervolgende magtsverheffingen, de worteltekens kunnen verdrijven, en daarna de wortels dier vergelijking op de gewone wij-

te opsporen, maar wij kunnen dezen waarlijk afschrikkenden arbeid ontwijken, indien wij op de vergelijking (B), zoo als zij is, de leerwijze van de achtervolgende substitutiën toepassen.

Om eerst eene grens voor x te vinden, merken wij op, dat de omtrek van den zevenhoek gelijk 196 gegeven is, dat de omtrek van eenen regelmatigen zevenhoek, beschreven in den cirkel, die x tot middellijn heeft, door $7x\ Sin.\ \frac{180°}{7}$ wordt uitgedrukt, en dat dus, volgens eene genoegzaam bekende eigenschap der regelmatige veelhoeken,

$$7x\ Sin.\ \frac{180°}{7} > 196$$

moet wezen. Uit de tafels vinden wij voorts, dat $Sin.\ \frac{180°}{7}$ een weinig kleiner dan 0,434 is, derhalve is

$$0,434 \times 7x > 196,$$

waaruit volgt

$$x > 64.$$

Wij stellen ons dus voor in (B) achtervolgens voor x de getallen 65, 66, 67 *enz.* te substitueren; maar met $x = 65$ beginnende, blijkt al aanstonds, dat deze waarde van x aan de vergelijking voldoet; voor deze waarde van x verkrijgen wij:

$$Cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x} = \frac{\sqrt{(4225-256)}}{65} = \frac{63}{65} = 0,96923,$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{(x^2-b^2)}}{x} = \frac{\sqrt{(4225-625)}}{65} = \frac{60}{65} = 0,92308,$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{(x^2-c^2)}}{x} = \frac{\sqrt{(4225-1089)}}{65} = \frac{56}{65} = 0,86154,$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\sqrt{(x^2-d^2)}}{x} = \frac{\sqrt{(4225-1521)}}{65} = \frac{52}{65} = 0,80000,$$

en dus vinden wij, met behulp der tafels, nagenoeg

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 14°15',\ \tfrac{1}{2}\beta = 22°37',\ \tfrac{1}{2}\gamma = 30°31',\ \tfrac{1}{2}\delta = 36°52',$$

of $\alpha = 28°30',\ \beta = 45°14',\ \gamma = 61°\ 2',\ \delta = 73°44'$;

en daar nu voor deze waarden naar behooren

$$\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 360°$$

is, zoo besluiten wij, dat de gevraagde middellijn werkelijk 65 lengte eenheden bevat.

Of er nog meer waarden voor x mogten zijn, die aan de

vergelijking (B) voldoen, is ons ter beantwoording des voorstels volstrekt onverschillig; want verbeelden wij ons den zevenhoek in den nu gevonden cirkel beschreven en laat deze cirkel grooter worden, terwijl altijd de zes koorden ABCDEFG er in beschreven blijven en de gegevene lengten behouden, dan zal de zevende koorde GA onophoudelijk grooter worden, totdat eindelijk, indien de cirkel nagenoeg eene regte lijn wordt, deze zevende koorde ook nagenoeg gelijk wordt aan de som der zes overigen; laat verder de cirkel kleiner worden, dan zal de zevende koorde ook kleiner worden, totdat zij verdwijnt en er een zeshoek ontstaat. Bijgevolg bestaat er slechts een cirkel, waarin de zevenhoek beschreven kan worden, en deze heeft eene middellijn van 65 lengte-eenheden.

Wij sluiten hier stilzwijgend het geval uit, dat men de koorden zou willen plaatsen, zoo als in Fig. 11 is aangewezen, omdat zulke figuren geene eigenlijke ingeschreven veelhoeken zijn. Mogt de vergelijking (B) nog meer bestaanbare wortels dan $x = 65$ opleveren, zoo zouden die wortels tot zulke oneigenlijke zevenhoeken behooren. Omtrent deze zou dan ook de gebruikte eigenschap niet doorgaan, dat de omtrek kleiner ware *dan die des regelmatigen zevenhoeks in denzelfden cirkel beschreven*; en zelfs behoeft deze omtrek niet kleiner dan die des cirkels te zijn.

De waarden

$\sqrt{(x^2-a^2)}=63, \sqrt{(x^2-b^2)}=60, \sqrt{(x^2-c^2)}=56$ en $\sqrt{(x^2-d^2)}=52$

zijn klaarblijkelijk het dubbel van de loodlijnen, die uit het middelpunt M op de zijden des zevenhoeks vallen; wij hebben dus voor de inhouden der middelpuntsdriehoeken:

$$\textit{Inh. drieh. } \mathrm{AMB} = \tfrac{1}{4}.\ 16.63 = 252,$$
$$\textit{Inh. drieh. } \mathrm{BMC} = \tfrac{1}{4}.\ 25.60 = 375,$$
$$\textit{Inh. drieh. } \mathrm{EMF} = \tfrac{1}{4}.\ 33.56 = 462,$$
$$\textit{Inh. drieh. } \mathrm{GMA} = \tfrac{1}{4}.\ 39.52 = 507;$$

en nu vindt men, door eenvoudige optelling,

$$\textit{Inh. Zevenh. } \mathrm{ABCDEFGA} = 2808.$$

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Het is uit den aard der zaak klaar en wordt ook door de oplossing bevestigd, dat de volgorde der zijden willekeurig veranderd kan worden,

zonder dat dit in de waarde van de middellijn eenige verandering te weeg brengt.

XXVI. Voorstel.

Door C. van Schaick.

Men vraagt x te vinden, uit de vergelijking

$$1 + \tfrac{1}{2}x = \frac{30}{x} - \frac{60}{x^2} + \frac{120}{x^3} - \frac{240}{x^4} + \frac{480}{x^5} - \textit{enz.},$$

waarvan het tweede lid uit een oneindig aantal termen bestaat, die elkander opvolgen, volgens de wet, die gemakkelijk uit de bovenstaande vijf eerste termen blijkt? (*)

Opgelost door C. van Schaick, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs en J. S. Speijer.

Oplossing van C. van Schaick.

Men vermenigvuldige de gegevene vergelijking met $\frac{x}{2}$, dan komt er

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 = 15 - \frac{30}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{120}{x^3} + \frac{240}{x^4} - \textit{enz.};$$

zoo men nu hierbij de gegevene vergelijking optelt, vindt men

$$1 + x + \tfrac{1}{4}x^2 = 15,$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$(\tfrac{1}{2}x + 1)^2 = 15;$$

hieruit volgt nu onmiddellijk

$$\tfrac{1}{2}x + 1 = \pm\sqrt{15},$$

$$\tfrac{1}{2}x = -1 \pm \sqrt{15}$$

en

$$x = -2 \pm 2\sqrt{15}.$$

XXVII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar eene rekenkunstige reeks van vier termen, zoodat, als men deze termen, bij de overeenkomstige termen der harmonische reeks 10, 12, 15, 20, *optelt, de sommen eene meetkunstige reeks uitmaken; en dat, wanneer men de drie laatste termen dezer meetkunstige reeks vermeerdert met de overeenkomstige termen eener te vindene rekenkunstige reeks, er dan vier op elkander volgende vierkante getallen komen?*

(*) Prijsles, *Algebra*, bladz. 129.

OPGELOST *door* B. LUBBERS, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stellende voor de eerstgenoemde rekenkunstige reeks

$$x,\quad x+y,\quad x+2y \text{ en } x+3y,$$

dan moeten volgens de opgave

$$x+10,\quad x+y+12,\quad x+2y+15,\quad x+3y+20$$

eene meetkunstige reeks uitmaken.

Derhalve moet men hebben

$$(x+10)(x+2y+15)=(x+y+12)^2,$$
$$(x+y+12)(x+3y+20)=(x+2y+15)^2,$$
$$(x+10)(x+3y+20)=(x+y+12)(x+2y+15);$$

wij hebben dus drie vergelijkingen om x en y te vinden, waarvan wel de eene altijd een noodzakelijk gevolg van de anderen is, maar die wij alle drie gebruiken zullen, om daardoor de onbekenden gemakkelijker, en zonder op vierkants-vergelijkingen te vervallen, te vinden.

Deze vergelijkingen herleidt men terstond tot

$$y^2+4y=x+6,$$
$$y^2+4y=2x+15$$

en

$$2y^2+9y=3x+20;$$

trekt men nu de som der twee eerste van de derde af, dan komt er dadelijk $y=-1$

en deze waarde voor y in eene der drie vergelijkingen stellende, vindt men $x=-9$.

De eerste reeks, waarvan in het voorstel gesproken wordt, is dus

$$-9,\quad -10,\quad -11 \text{ en } -12,$$

hierbij de termen optellende der harmonische reeks

$$10,\quad 12,\quad 15 \text{ en } 20,$$

zoo komt er de meetkunstige reeks

$$1,\quad 2,\quad 4 \text{ en } 8.$$

Stellen wij eindelijk voor de tweede te vindene reeks

$$z,\quad z+u \text{ en } z+2u,$$

dan moeten

$$1,\quad 2+z,\quad 4+z+u,\quad 8+z+2u,$$

vier op elkander volgende vierkanten zijn; daar het eerste dezer getallen het vierkant van de eenheid is, moeten dus de anderen respectievelijk de vierkanten van 2, 3 en 4 zijn, derhalve is

$$2 + x = 4,$$
$$4 + x + u = 9$$
en
$$8 + x + 2u = 16;$$
uit de eerste dezer vergelijkingen volgt $x = 2$, daarna uit de tweede $u = 3$, en deze waarden voldoen aan de derde vergelijking; de tweede rekenkunstige reeks, die gevonden moest worden, is dus

$$2, \quad 5, \quad 8$$

en met deze termen, de drie laatste termen der reeds gevondene meetkunstige reeks

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8$$

vermeerderende, komen er de op elkander volgende vierkanten

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16.$$

XXVIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt eene harmonische en eene rekenkunstige reeks, elk van drie termen, te vinden, zoodat, als men de overeenkomstige termen bij elkander optelt, de sommen eene meetkunstige reeks vormen; en dat, wanneer men de termen dezer meetkunstige reeks met 4 vermenigvuldigt, en bij het middelste product de eenheid voegt, de komende getallen, drie op elkander volgende vierkante getallen zijn?

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, G. KOSTER, B. LUBBERS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Stel de wortels der op elkander volgende vierkante getallen, die er komen moeten, voor door

$$2p, \quad 2p + 1 \text{ en } 2p + 2,$$

dan zijn die vierkanten zelve

$$4p^2, \quad 4p^2 + 4p + 1 \text{ en } 4p^2 + 8p + 4;$$

trekt men nu van dit middelste vierkant de eenheid af en deelt men vervolgens de drie getallen door 4, dan komt er

$$p^2, \quad p^2 + p \text{ en } p^2 + 2p + 1$$

voor de getallen, die eene meetkunstige reeks moeten uitmaken.

Deze vormen maken echter van zelf reeds eene meetkunstige reeks uit, waarvan de rede $\frac{p+1}{p}$ is, zoodat men aan p eene willekeurige waarde kan geven.

Stel verder voor de begeerde harmonische reeks

$$x, \quad \frac{2xy}{x+y} \quad \text{en} \quad y$$

en voor de begeerde rekenkunstige

$$z - n, \quad z \quad \text{en} \quad z + n,$$

dan zal men moeten hebben

$$x + z - n = p^2,$$

$$\frac{2xy}{x+y} + z = p^2 + p$$

en

$$y + z + n = p^2 + 2p + 1.$$

Uit deze drie vergelijkingen zullen wij nu x, y en z oplossen; daartoe elk der beide eerste van de laatste aftrekkende, verkrijgen wij de twee vergelijkingen, met de twee onbekenden x en y,

$$y - x + 2n = 2p + 1$$

en

$$y - \frac{2xy}{x+y} + n = p + 1.$$

Door deze vergelijkingen respectievelijk met y en met $x + y$ te vermenigvuldigen, komt er

$$y(y - x) + 2ny = (2p + 1)y$$

en

$$y(y - x) + n(x + y) = (p + 1)(x + y),$$

waaruit door aftrekking gevonden wordt

$$2ny - n(x + y) = (2p + 1)y - (p + 1)(x + y),$$

dat is:

$$ny - nx = py - px - x,$$

$$(y - x)(p - n) = x,$$

$$y - x = \frac{x}{p - n}$$

of

$$y = x + \frac{x}{p - n}.$$

Brengen wij deze waarde voor y in de vergelijking $y - x + 2n = 2p + 1$ over, dan komt er

$$\frac{x}{p - n} + 2n = 2p + 1,$$

$$\frac{x}{p - n} = 2(p - n) + 1$$

of

$$x = 2(p - n)^2 + (p - n);$$

hierdoor wordt verder

$$y = x + \frac{x}{p - n} = 2(p - n)^2 + 3(p - n) + 1$$

en $z = p^2 + n - x = p^2 - p + 2n - 2(p - n)^2$.

Nemen wij nu voor p en n willekeurige getallen aan, dan zullen wij hierdoor voor x, y en z waarden verkrijgen, die benevens de voor n aangenomene waarden in de vormen

$$x, \quad \frac{2xy}{x+y} \quad \text{en} \quad y; \qquad z - n, \quad z \quad \text{en} \quad z + n$$

gesubstitueerd wordende, de verlangde reeksen zullen doen kennen.

Voor $p = 2$ en $n = 1$, hebben wij $x = 3$, $y = 6$ en $z = 2$; alsdan is:

de harmonische reeks	3,	4	en	6;
de rekenkunstige	1,	2	en	3;
de meetkunstige	4,	6	en	9;
en de vierkante getallen zijn	16,	25	en	36.

Voor $p = 4$ en $n = 2$, hebben wij $x = 10$, $y = 15$ en $z = 8$; alsdan is:

de harmonische reeks	10,	12	en	15;
de rekenkunstige	6,	8	en	10;
de meetkunstige	16,	20	en	25;
en de vierkante getallen zijn dan . . .	64,	81	en	100.

XXIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welke waarden moet men aan p en q geven, opdat, zoo x een willekeurig veelhoekig getal voorstelt, px + q een geheel volkomen vierkant zij?

Opgelost *door* B. Lubbers, G. Koster *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Zij m de aanwijzer van den veelhoek en y den wortel van het veelhoekige getal, dan hebben wij

$$x = \frac{(m-2)\,y^2 - (m-4)\,y}{2};$$

vermenigvuldigen wij nu dit veelhoekige getal met $2(m-2)$ dan komt er

$$2(m-2)\,x = (m-2)^2y^2 - (m-2)\,(m-4)\,y;$$

om nu deze grootheid tot een volkomen vierkant te maken, vinden wij, op de gewone en algemeen bekende wijze, dat er $(\frac{1}{2}m - 2)^2$ bij opgeteld moet worden, en dan is

$$2(m-2)x + (\tfrac{1}{2}m-2)^2 = (m-2)^2y^2 - (m-2)(m-4)y + (\tfrac{1}{2}m-2)^2$$

of $2(m-2)x + (\frac{1}{2}m-2)^2 = \{(m-2)y - (\frac{1}{2}m-2)\}^2$;

nemen wij dus $p = 2(m - 2)$ en $q = (\frac{1}{2}m - 2)^2$, dan zal $px + q$ een volkomen vierkant zijn, begeert men echter dat p en q geheele getallen zijn, wat ook m zijn moge, dan zal men nog met 4 moeten vermenigvuldigen, en daardoor verkrijgen

$$8(m - 2)x + (m - 4)^2 = 4\{(m - 2)y - (\tfrac{1}{2}m - 2)\}^2,$$

zoodat dan $p = 8(m - 2)$ en $q = (m - 4)^2$ zal moeten genomen worden.

Wanneer men dus een veelhoekig getal vermenigvuldigt, met het achtvoud van twee minder dan de aanwijzer des veelhoeks, en daarbij optelt het vierkant van het verschil van dien aanwijzer en het getal 4, zal er altijd een vierkant komen.

Mogten p en q een volkomen vierkant tot gemeenschappelijken factor hebben, hetgeen van de bijzondere waarde van m afhangt, dan zou men nog dien factor uit beide kunnen weglaten, om hetzelfde doel te bereiken.

Voor $m=3$ heeft men dus $p= 8$ en $q= 1$
» $m=4$ » » » $p=16$ en $q= 0$, of $p=1$ en $q=0$
» $m=5$ » » » $p=24$ en $q= 1$.
» $m=6$ » » » $p=32$ en $q= 4$, of $p=8$ en $q=1$
» $m=7$ » » » $p=40$ en $q= 9$
» $m=8$ » » » $p=48$ en $q=16$, of $p=3$ en $q=1$
enz. *enz.*

XXX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Gegeven zijnde de vergelijking

$$\tfrac{1}{4}\pi + \textit{Boog Tang. } x = 2 \textit{ Boog Cos. } a,$$

vraagt men x in a uit te drukken?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Omdat *Boog Tang* $1 = \frac{1}{4}\pi$ is, kan men voor de opgegevene vergelijking schrijven

$$\textit{Boog. Tang. } 1 + \textit{Boog Tang. } x = 2 \textit{ Boog. Cos. } a;$$

maar in het algemeen is

$$\textit{Boog Tang. } p + \textit{Boog Tang. } q = \textit{Boog Tang. } \frac{p+q}{1-pq}$$

en $$2 \textit{ Boog Cos. } p = \textit{Boog Cos. } (2p^2 - 1),$$

door toepassing van welke formulen onze vergelijking overgaat in

$$Boog\ Tang. \frac{1+x}{1-x} = Boog\ Cos.\ (2a^2 - 1).$$

Noemen wij nu dezen boog ϕ, dan is

$$Tang.\ \phi = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{en} \quad Cos.\ \phi = 2a^2 - 1,$$

zoodat, uit de algemeene formule

$$Tang.\ \phi = \frac{\sqrt{(1 - Cos.^2\phi)}}{Cos.\ \phi},$$

wederom volgt

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\sqrt{(1-(2a^2-1)^2)}}{2a^2-1}$$

of

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2a\sqrt{(1-a^2)}}{2a^2-1}.$$

De breuken uit deze vergelijking verdrijvende, komt er

$$(2a^2-1)+x(2a^2-1)=2a\sqrt{(1-a^2)}-2ax\sqrt{(1-a^2)}$$

of $x(2a^2-1)+2ax\sqrt{(1-a^2)}=2a\sqrt{(1-a^2)}-(2a^2-1)$,

waaruit terstond volgt

$$x = \frac{2a\sqrt{(1-a^2)} - (2a^2-1)}{2a\sqrt{(1-a^2)} + (2a^2-1)};$$

door teller en noemer van deze breuk met $2a\sqrt{(1-a^2)}-(2a^2-1)$ te vermenigvuldigen, kan men deze waarde van x nog herleiden tot

$$x = \frac{4a(2a^2-1)\sqrt{(1-a^2)} - 1}{8a^4 - 8a^2 + 1}.$$

XXXI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men wil eenen regthoekigen driehoek berekenen en construeren, indien gegeven zijn de stralen der cirkels, beschreven om de twee driehoeken, waarin de eerste driehoek verdeeld wordt, door de lijn die eenen der scherpe hoeken midden door deelt?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Seeijer *en* G. Koster.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABC (Fig. 12) de begeerde regthoekige driehoek zijn, waarvan de hoek C regt en de hoek B door de lijn BD midden door gedeeld wordt. Zij a de straal des cirkels om den

driehoek ABD en b die des cirkels om den driehoek DBC beschreven, en stellen wij *hoek* A $= \phi$, dan is, omdat de straal van den cirkel om eenen driehoek beschreven gelijk is aan eene zijde des driehoeks gedeeld door de dubbele Sinus van den overstaanden hoek,

$$a = \frac{BD}{2Sin.\,BAD} = \frac{BD}{2Sin.\,\phi} \text{ en dus } BD = 2aSin.\,\phi,$$

$$b = \frac{BD}{2Sin.\,BCD} = \frac{BD}{2} \text{ en dus } BD = 2b,$$

hieruit volgt $2aSin.\,\phi = 2b$,

en dus is $Sin.\,\phi = \frac{b}{a}$.

Voorts is *hoek* ABC $= 90° - \phi$, derhalve *hoek* DBC $= \frac{1}{2}(90° - \phi)$, en dus volgt uit den regthoekigen driehoek DBC,

$$BC = BD\,Cos.\,DBC = 2b\,Cos.\tfrac{1}{2}(90° - \phi) = 2b\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + Sin.\phi)} =$$

$$= b\sqrt{2\left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{2a(a+b)};$$

verder is, uit den regthoekigen driehoek ABC,

$$AB = \frac{BC}{Sin.\,\phi} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{2a(a+b)}}{\frac{b}{a}} = \sqrt{2a(a+b)}$$

en $AC = AB\,Cos.\phi = AB\sqrt{(1 - Sin^2\phi)} = \sqrt{2a(a+b)}\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{2a(a+b)(a^2 - b^2)} = \frac{a+b}{a}\sqrt{2a(a-b)},$$

zoodat wij nu alle drie de zijden des driehoeks in de gegevens hebben uitgedrukt.

Om den driehoek te construeren, beschrijve men, uit eenig punt O als middelpunt, met a als straal, eenen cirkel en trekke daarin eene middellijn BE; op deze middellijn neme men OF $= b$ of BF $= a + b$, stelle FA loodregt op BE en trekke AB, dan is deze de hypothenusa des driehoeks, want wij hebben AB $= \sqrt{BE \times BF} = \sqrt{2a(a + b)}$, verder plaatse men in den cirkel eene koorde BD $= 2b$, trekke AD en late uit B eene loodlijn BC op het verlengde van AD vallen; dan zal ABC de begeerde driehoek zijn.

Wij merken nog op, dat $b < a$ gegeven moet zijn, want was $b > a$, dan zou $Sin.\,\phi > 1$ en dus ϕ onbestaanbaar

worden; bij de constructie zou deze onbestaanbaarheid blijken, door dat het punt F buiten den cirkel zou komen en ook de koorde BD $= 2b$ niet in den cirkel zou kunnen geplaatst worden.

XXXII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Twee punten A *en* B (Fig. 13) *gegeven zijnde, vraagt men naar de meetkunstige plaats van al de punten* C, *die zoo gelegen zijn, dat* AC *en* BC *getrokken zijnde, de hoek* ABC *het dubbel zij van den hoek* BAC?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, L. van de Kasteele *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Nemen wij het punt A tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten en de lijn AB tot as der abscissen aan, stellen wij derhalve, na CD loodregt op AB getrokken te hebben, AD $= x$, CD $= y$, AB $= a$, en dus BD $= a - x$; dan hebben wij, uit de driehoeken CAD en CBD,

$$Tang.\ BAC = \frac{y}{x} \text{ en } Tang.\ ABC = \frac{y}{a-x};$$

maar ABC $=$ 2BAC zijnde, zoo is ook

$$Tang.\ ABC = \frac{2\ Tang.\ BAC}{1 - Tang.^2\ BAC}$$

en derhalve

$$\frac{y}{a-x} = \frac{\frac{2y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

of na herleiding

$$y^2 = 3x^2 - 2ax.$$

Deze vergelijking van den tweeden graad zijnde, behoort tot eene kegelsnede; nemende AA' $= \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$AB, dan zijn A en A' de punten, waarin deze kegelsnede de as der abscissen snijdt, want, in de bovenstaande vergelijking $x = 0$ of $x = \frac{2}{3}a$ stellende, verkrijgt men $y = 0$. Deelen wij voorts AA' in O midden door, waardoor AO $=$ OA' $= \frac{1}{3}a$ wordt, en verplaatsen wij den oorsprong van A naar O, daartoe OD $= u$ en bijgevolg $x = u + \frac{1}{3}a$ stellende, dan verandert de vergelijking in

$$y^2 = 3u^2 - \tfrac{1}{3}a^2 \quad \text{of} \quad y^2 = \frac{(\frac{1}{3}a\sqrt{3})^2}{(\frac{1}{3}a)^2}\left\{u^2 - (\tfrac{1}{3}a)^2\right\},$$

hetwelk de gewone middelpuntsvergelijking is eener hyperbool, waarvan $\frac{1}{3}a$ de halve eerste, en $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ de halve tweede as is.

Verbeelden wij ons, dat de hoek BAC aangroeit totdat de hoek BAP $=$ 60° is, dan zal de hoek ABC, die altijd het dubbel van BAC blijft, ABP′ $=$ 120° geworden zijn; in dit geval loopen de lijnen AP en BP′ evenwijdig en het punt C is in het oneindige verdwenen; hieruit besluiten wij, dat de asymptoot der hyperbool de as der abscissen onder eenen hoek van 60° snijdt. Makende dus *hoek* BOS $=$ 60°, dan zal OS de asymptoot zijn.

Nemende *hoek* BAQ $>$ 60° en dus *hoek* ABQ′ $=$ 2 *hoek* BAQ $>$ 120°, dan snijden de lijnen AQ en BQ′ elkander in C′, welk punt op den tweeden tak der hyperbool ligt. Omdat nu BAC′ het supplement van BAQ en ABC′ het supplement van ABQ′ is, hebben de punten C′ van den tweeden tak der hyperbool de eigenschap, dat, zoo men de lijnen AC′ en BC′ trekt, het supplement van ABC′ het dubbel zal zijn van het supplement van BAC′.

XXXIII. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

Een getal te vinden, dat ontstaat uit de vermenigvuldiging van een tweede-magtsgetal met een derde-magtsgetal, welke getallen, zoowel als hunne wortels, de eenheid verschillen?

Opgelost *door* J. S. Speijer, L. van de Kasteele, G. Koster, C. van Schaick *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stellen wij voor den wortel van het tweede-magtsgetal x en voor dien van het derde-magtsgetal y, dan zijn deze getallen zelve x^2 en y^3; daar nu in het voorstel alleen gezegd wordt, dat deze getallen, zoowel als hunne wortels, de eenheid verschillen, zonder dat er bepaald wordt, in welken zin de aftrekking moet plaats hebben, om de eenheid tot rest te verkrijgen, zoo kunnen wij daaromtrent vier verschillende onderstellingen aannemen, te weten:

1° $x - y = 1$ en $x^2 - y^3 = 1$;
2° $x - y = 1$ en $y^3 - x^2 = 1$;
3° $y - x = 1$ en $x^2 - y^3 = 1$;
en 4° $y - x = 1$ en $y^3 - x^2 = 1$.

Zonderen wij in elk geval y uit de eerste vergelijking af en brengen wij die waarde in de tweede vergelijking over, dan verkrijgen wij, respectievelijk de vergelijkingen

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0. \dots\dots\dots (a),$$
$$x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0. \dots\dots\dots (b),$$
$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0. \dots\dots\dots (c),$$
$$x^3 + 2x^2 + 3x = 0. \dots\dots\dots (d);$$

De vergelijking (a), die tot de eerste onderstelling behoort, kunnen wij, daar $x = 0$ niet in den bedoelden zin aan de vraag voldoen kan, door x deelen, als wanneer wij vinden

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

waaruit volgt $x = 1$ of $x = 3$;
daar nu hier $y = x - 1$ is, is de waarde $x = 1$ onbruikbaar, omdat dan $y = 0$ zou worden; wij hebben dus alleen $x = 3$ en $y = 2$, derhalve is $x^2 = 9$ en $y^3 = 8$, zoodat dan het bedoelde getal 72 is.

De vergelijking (b), die tot de tweede onderstelling behoort, heeft slechts eenen bestaanbaren wortel, maar deze is onmeetbaar; deze vergelijking levert dus geene bruikbare waarde voor x op; en bijgevolg is er, in de tweede onderstelling, geen getal, dat aan de vraag voldoet.

De vergelijking (c), tot de derde onderstelling behoorende, heeft eenen meetbaren wortel $x = -1$ en twee onbestaanbare; daar hier $y = x + 1$ is, stemt met $x = -1$ overeen $y = 0$; deze waarde van x is dus onbruikbaar; en bijgevolg kan de derde onderstelling almede geen getal opleveren, dat aan het voorstel beantwoordt.

De vergelijking (d) heeft, behalve $x = 0$, almede geen bestaanbare wortels; derhalve levert ook de vierde onderstelling geen antwoord op het voorstel.

Hieruit blijkt dus, dat welke onderstelling men ook, ten aanzien van de orde, waarin de verschillen der bedoelde tweede- en derde-magtsgetallen, en hunne wortels, moeten genomen worden, mogt willen aannemen, geen ander getal dan 72 aan het voorstel voldoen kan.

XXXIV. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

Op het water drijft een stuk hout, in de gedaante eener ellipsoide, die ontstaat, door de omwenteling eener ellips om haren grooten as; dit hout overal van gelijke digtheid en deszelfs soortelijk gewigt gegeven zijnde, vraagt men hoe diep hetzelve in het water zal zinken?

OPGELOST *door* L. VAN DE KASTEELE *en* F. C. RADIJS.

I. OPLOSSING *van* L. VAN DE KASTEELE.

Wij nemen aan, dat de ellipsoïde, door eene of andere omstandigheid, genoodzaakt wordt, zoodanig op het water te drijven, dat deszelfs omwentelings-as verticaal blijft staan. Laat dan QR (Fig. 14) de waterspiegel, ABCD de ellipsoïde, CD de verticale as derzelve en AB de kleine as der ellips zijn, door wier omwenteling de ellipsoïde ontstaan is, dan zal het er op aankomen, het gedeelte CP van die as, dat beneden den waterspiegel is, te berekenen.

Stellen wij daartoe $CP = z$, $CD = 2h$, $AB = 2r$ en snijden wij het ligchaam door twee oneindig digt bij elkander gelegen vlakken ab en a'b' evenwijdig met den waterspiegel, dan hebben wij, $Co = x$ en $ao = y$ stellende, ter berekening van den inhoud der ellipsoïde en haar ingedompeld deel, de algemeene formule voor den inhoud der omwentelings ligchamen

$$I = \pi \int y^2 \delta x;$$

volgens de eigenschappen der ellips is hier $y^2 = \frac{r^2}{h^2}(2hx - x^2)$ en dus

$$I = \pi \frac{r^2}{h^2} \int (2hx - x^2)\delta x = \pi \frac{r^2}{h^2}(hx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + C);$$

stellen wij nu den geheelen inhoud der ellipsoïde door I' en den inhoud van haar ingedompeld deel, of van de verplaatste watermassa, door I'' voor, dan vinden wij, door de bovenstaande integraal van $x = 0$ tot $x = 2h$ te nemen,

$$I' = \tfrac{4}{3}\pi r^2 h,$$

en, door die integraal van $x = 0$ tot $x = z$ te nemen,

$$I'' = \pi \frac{r^2}{h^2}(hz^2 - \tfrac{1}{3}z^3).$$

Zij nu g het soortelijk gewigt van het hout, dat van het

water 1 zijnde, dan wordt het gewigt der ellipsoïde door $I'g$ en dat van de verplaatste vloeistof door I'' voorgesteld; en, daar voor het evenwigt deze gewigten even groot moeten zijn, hebben wij $I'g = I''$

of, voor I' en I'' bovenstaande waarden stellende,

$$\tfrac{4}{3}\pi r^2 hg = \pi \frac{r^2}{h^2}(hx^2 - \tfrac{1}{3}x^3),$$

waaruit door herleiding volgt

$$x^3 - 3hx^2 + 4h^3 g = 0.$$

Uit deze derdemagts vergelijking, kan nu x berekend worden, zoodra h en g in getallen gegeven zijn; men ziet uit dezelve, dat de waarde van x geheel onafhankelijk is van r. Neemt men $r = h$, dan gaat de ellipsoïde in eenen bol over, en men heeft dus, om de diepte te berekenen, waartoe een bol in het water zinkt, dezelfde vergelijking.

Indien het soortelijk gewigt van het hout $g = \frac{1}{2}$ ware, zou men hebben

$$x^3 - 3hx^2 + 2h^3 = 0,$$

waarvan een wortel is $x = h$, terwijl de beide andere wortels, hoezeer bestaanbaar zijnde, niet gebruikt kunnen worden. In dit geval zou dus de ellipsoïde juist ter halver diepte inzinken.

Stellen wij, dat de ellipsoïde van dennenhout en dus haar soortelijk gewigt $g = 0{,}49$ ware, dan zou men hebben

$$x^3 - 3hx^2 + 1{,}96\ h^3 = 0,$$

waaraan genoegzaam voldoet

$$x = 0{,}98\ h;$$

was dus de as CD 4 ellen lang en alzoo $h = 2$ ellen, dan zou men hebben

$$x = 1{,}96 \text{ ellen.}$$

II. Oplossing *van* F. C. Radijs.

Indien de ellipsoïde aan zich zelven overgelaten op het water drijft, zal de omwentelings-as horizontaal gerigt zijn, want, in elken anderen stand, kan het drijvende ligchaam wel op de vloeistof in evenwigt zijn, maar geene stabiliteit hebben.

Zij dan in dezen stand (Fig, 15) ABCD de ellipsoïde, CD de groote en AB de kleine as der voortbrengende ellips, en QR de waterspiegel, dan zal het er op aankomen, het gedeelte BP van de verticale middellijn des cirkels AB te berekenen.

Stellen wij daartoe $BP = z$, $CD = 2h$, $AB = 2r$ en snijden wij het ligchaam door twee oneindig digt bij elkander gelegen vlakken c d en c′ d′, evenwijdig met den waterspiegel, dan zijn deze doorsneden ellipsen, die, zoo wij $Bo = y$ en $co = x$ stellen, x tot halve groote en $\sqrt{y(2r - y)}$ tot halve kleine as hebben. De inhoud dezer doorsneden is alzoo $\pi x\sqrt{y(2r - y)}$, de differentiaal van den inhoud des ligchaams, tusschen de snijdende vlakken c d en c′ d′ begrepen, wordt gevonden, door den inhoud dier doorsneden te vermenigvuldigen met ∂y; bijgevolg hebben wij, voor den inhoud des ligchaams, de formule

$$I = \pi\int x\partial y\sqrt{(2ry - y^2)}.$$

Volgens de eigenschappen der ellips is nu $x = \frac{h}{r}\sqrt{(2ry - y^2)}$ en bijgevolg

$$I = \pi\frac{h}{r}\int(2ry - y^2)\partial y = \pi\frac{h}{r}(ry^2 - \tfrac{1}{3}y^3 + C),$$

welke integraal, van $y = 0$ tot $y = 2r$ genomen, voor den geheelen inhoud der ellipsoide geeft

$$I' = \tfrac{4}{3}\pi r^2 h,$$

en, van $y = 0$ tot $y = z$ genomen, voor den inhoud van het ingedompeld gedeelte of ook van de verplaatste watermassa

$$I'' = \pi\frac{h}{r}(rz^2 - \tfrac{1}{3}z^3).$$

Hier moet, om dezelfde reden als in de vorige oplossing,

$$I'g = I''$$

en dus $$\tfrac{4}{3}\pi g r^2 h = \pi\frac{h}{r}(rz^2 - \tfrac{1}{3}z^3)$$

zijn, waaruit door herleiding volgt

$$z^3 - 3rz^2 + 4gr^3 = 0.$$

Hier is nu z onafhankelijk van h; voor $g = \frac{1}{2}$, zal men vinden $z = r$, terwijl wederom, voor alle andere waarden van g, z zal kunnen berekend worden, zoodra ook r in getallen gegeven is.

XXXV. Voorstel.

Door A. F. van de Laar, Junior.

Welke waarde heeft de oneindig voortloopende gedurige breuk

$$\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\text{enz.}}}}},$$

waarin p en q gestadig bij afwisseling voorkomen? (*)

OPGELOST *door* A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR.

Men stelle de gegevene oneindig voortloopende breuk door x voor, dan heeft men klaarblijkelijk

$$x = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+x}},$$

welke vergelijking men achtervolgens herleidt tot

$$x = \frac{q+x}{p(q+x)+1},$$

$$x\{p(q+x)+1\} = q+x,$$

$$xp(q+x) = q,$$

$$px^2 + pqx = q$$

en

$$x^2 + qx = \frac{q}{p};$$

uit deze vierkantsvergelijking, vindt men, op de gewone wijze,

$$x = -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{q}{p}\right)}$$

of

$$x = \frac{-pq + \sqrt{(p^2q^2 + 4pq)}}{2p}.$$

XXXVI. VOORSTEL.

Door A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR.

Welke waarde heeft de oneindig voortloopende gedurige breuk

(*) MEIJER HIRSCH, *Verz. van Voorb.* vert. door G. RAMAKERS, bladz. 263, N°. 35.

$$\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\text{enz.}}}}}}}$$

waarin p, q en r gestadig bij afwisseling voorkomen? (*)

Opgelost *door* A. F. van de Laar, Junior, F. C. Radijs *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* A. F. van de Laar, Junior.

Men stelle weder de waarde der breuk door x voor, dan is

$$x = \cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+x}}}$$

en deze vergelijking herleidt men achtervolgens tot

$$x = \cfrac{1}{p+\cfrac{r+x}{q(r+x)+1}},$$

$$x = \frac{q(r+x)+1}{p[q(r+x)+1]+(r+x)}$$

en $\quad x\{p[q(r+x)+1]+(r+x)\}=q(r+x)+1,$

ontwikkelt men nu alles, dan komt er, na behoorlijke rangschikking en vereeniging der termen,

$$(pq+1)x^2+(pqr+p-q+r)x=qr+1,$$

welke vergelijking, zoo men gemakshalve $x=\frac{y}{2(pq+1)}$ stelt, verandert in

$$\frac{y^2}{4(pq+1)}+\frac{(pqr+p-q+r)y}{2(pq+1)}=qr+1;$$

deze vergelijking met $4(pq+1)$ vermenigvuldigende, komt er

$$y^2+2(pqr+p-q+r)y=4(pq+1)(qr+1),$$

waaruit men, op de gewone wijze, vindt

$$y=-(pqr+p-q+r)+\sqrt{\{(pqr+p-q+r)^2+4(pq+1)(qr+1)\}}.$$

(*) Meijer Hirsch, *Verz. van Voorb.* Vert. door G. Ramakers. Bladz. 264, N°. 86.

Voor den eersten term van de grootheid, die onder het worteltееken voorkomt, kan men schrijven $\{(pq+1)r+(p-q)\}^2$ of ook

$$(pq+1)^2r^2+2(p-q)(pq+1)r+(p-q)^2;$$

voor den tweeden term van die grootheid kan men schrijven $4qr(pq+1)+4(pq+1)$ of ook

$$4q(pq+1)r+4pq+4;$$

de som dier beide termen is dus

$$(pq+1)^2r^2+2(p+q)(pq+1)r+(p+q)^2+4,$$

waarvoor men weder schrijven kan

$$\{(pq+1)r+(p+q)\}^2+4$$

of

$$(pqr+p+q+r)^2+4,$$

derhalve heeft men

$$y=-(pqr+p-q+r)+\sqrt{\{(pqr+p+q+r)^2+4\}},$$

zoo dat voor $x=\frac{y}{2(pq+1)}$ gevonden wordt

$$x=\frac{-(pqr+p-q+r)+\sqrt{\{(pqr+p+q+r)^2+4\}}}{2(pq+1)},$$

hetwelk dan nu de gevraagde waarde der gedurige breuk is.

XXXVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van zeker getal uit vier cijfers bestaande, zijn de cijfers der eenheden en tientallen onderling gelijk; en het cijfer der duizendtallen is de helft van dat der eenheden of tientallen. Deelt men dit getal door 4, dan komt er een even groot quotient, alsof men deszelfs omgekeerde door 7 deelt. Welk is dit getal?

Opgelost door S. Dik, Cornsz., G. Koster, L. van de Kasteele, J. C. Olivier, F. C. Radijs, C. van Schaick en J. S. Speijer.

I. Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Stel het cijfer der duizendtallen door x voor, en dat der honderdtallen door y, dan zijn de cijfers der eenheden en tientallen, volgens de eerste der gegevene voorwaarden, ieder $2x$; het begeerde getal is dan

$$1000x+100y+20x+2x=1022x+100y$$

en deszelfs omgekeerde is

$$2000x+200x+10y+x=2201x+10y.$$

Volgens de laatste voorwaarde des voorstels, hebben wij dan nu de vergelijking

$$\frac{1022x + 100y}{4} = \frac{2201x + 10y}{7},$$

waaruit na herleiding volgt

$$660y = 1650x$$

of, door 330 deelende,

$$2y = 5x.$$

Uit deze vergelijking volgt de evenredigheid

$$x : y = 2 : 5$$

en daar x en y, ieder in het bijzonder, geheele getallen kleiner dan 9 moeten zijn, kan aan deze evenredigheid alleen voldaan worden, door $x = 2$ en $y = 5$; hierdoor verkrijgt men dan, voor het begeerde getal, 2544.

II. Oplossing van G. Koster.

Daar het cijfer der duizendtallen de helft is van dat der eenheden of tientallen, zoo moet het cijfer der eenheden of tientallen even zijn, zonder nul te wezen; het begeerde getal kan, uit dien hoofde, geen ander zijn, dan een der vier volgende:

1[redacted]22, 2[redacted]44, 3[redacted]66 of 4[redacted]88,

waarin het cijfer der honderdtallen onbekend blijft.

Daar het getal door 4 deelbaar moet zijn, kunnen uit dien hoofde 1[redacted]22 en 3[redacted]66 niet in aanmerking komen, het begeerde getal kan dus alleen zijn

2[redacted]44 of 4[redacted]88.

Bepalen wij ons nu eerst tot het getal 4[redacted]88, dan moet deszelfs omgekeerde 88[redacted]4 door 7 deelbaar zijn, hetgeen niet plaats kan hebben, ten zij men voor het onbekende cijfer eene 3 plaatst; het getal zou dan 4388 moeten wezen, maar de quotienten $\frac{4388}{4}$ en $\frac{8834}{7}$ zijn ongelijk, derhalve is 4388 het begeerde getal niet.

Zoo wij nu 2[redacted]44 in aanmerking nemen, dan moet 44[redacted]2 door 7 deelbaar zijn, dit heeft echter geene plaats, ten zij men voor het onbekende cijfer eene 5 stelt; het getal zou dan 2544 zijn; en daar nu de quotienten $\frac{2544}{4}$ en $\frac{4452}{7}$ ieder gelijk 636, en dus aan elkander gelijk zijn, zoo is 2544 werkelijk het begeerde getal.

XXXVIII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

De waarde te vinden, van het gebroken

$$\frac{\sqrt[3]{(3ax^2 + 5x^3)} - \sqrt{(5x^2 - a^2)}}{\sqrt{(x^2 + 3a^2)} + \sqrt[3]{(2a^2x - a^3)} - 3a},$$

ingeval $x = a$ *genomen wordt?*

OPGELOST *door* S. DIK, CORNSZ., P. J. L. QUANT *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNSZ.

In het gebroken $x = a$ stellende, komt er den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$; wij differentieren derhalve teller en noemer ieder afzonderlijk, ten opzigte van x, dan komt er, zoo wij gemakshalve den teller door X en den noemer door X′ voor stellen,

$$\frac{\delta X}{\delta X'} = \frac{\frac{2ax+5x^2}{\sqrt[3]{(3ax^2+5x^3)^2}} - \frac{5x}{\sqrt{(5x^2-a^2)}}}{\frac{x}{\sqrt{(x^2+3a^2)}} + \frac{2a^2}{3\sqrt[3]{(2a^2x-a^3)^2}}};$$

stellen wij hierin $x = a$, dan komt er

$$\frac{\delta X}{\delta X'} = \frac{\frac{7}{4} - \frac{5}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{7}{6}} = -\frac{9}{14},$$

waaruit blijkt, dat de waarde van het opgegeven gebroken, voor $x = a$, $-\frac{9}{14}$ is.

XXXIX. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Hoe vele en welke regthoekige driehoeken zijn er, waarvan al de zijden, in rationale geheele getallen, kleiner dan 100, *kunnen worden uitgedrukt?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN en J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De geheele getallen, waardoor de zijden van regthoekige driehoeken kunnen worden uitgedrukt, zijn alle begrepen in de vormen

$$m(p^2 - q^2),\ 2mpq \quad \text{en} \quad m(p^2 + q^2),$$

waarin m, p en q geheele getallen verbeelden, terwijl $p > q$ is. De twee eerste dezer vormen zijn de regthoekszijden des driehoeks, terwijl de hypothenusa door den laatsten vorm wordt voorgesteld.

Wanneer de drie geheele getallen, die de zijden eens regthoekigen driehoeks uitdrukken, geenen gemeenen deeler hebben, heeft men dien driehoek wel eens eenen *oorspronkelijken* rationalen regthoekigen driehoek genoemd. Deze benaming behoudende, is het klaar, dat men, om eenen oorspronkelijken driehoek te verkrijgen, niet alleen $m = 1$ moet nemen, maar dat ook p en q zoodanig genomen moeten worden, dat de drie getallen $p^2 - q^2$, $2pq$ en $p^2 + q^2$ geenen gemeenen deeler verkrijgen.

Aan deze voorwaarde zal niet voldaan worden, wanneer men voor p en q onderling deelbare getallen neemt; want de gemeene deeler van p èn q is ook een gemeene deeler van de drie getallen $p^2 - q^2$, $2pq$ en $p^2 + q^2$. Aan deze voorwaarde zal almede niet voldaan worden, indien men p en q beide oneven neemt; want dan worden de drie getallen $p^2 - q^2$, $2pq$ en $p^2 + q^2$ alle even en krijgen dus 2 tot gemeenen deeler. Aan de genoemde voorwaarde zal echter wel voldaan worden, indien men voor p en q onderling ondeelbare getallen neemt, die slechts een van beide oneven zijn; want $2pq$ kan, behalve het getal 2, geene andere deeler hebben, dan de deelers van p of q; zijn nu p en q onderling ondeelbaar, dan zijn de deelers van p of q geen van alle deelbaar in $p^2 \pm q^2$; en zijn p en q slechts een van beide oneven, dan kan ook 2 geen deeler van $p^2 \pm q^2$ zijn.

In de vormen

$$p^2 - q^2,\quad 2pq \quad \text{en} \quad p^2 + q^2 \ldots\ldots (A),$$

zullen dus de zijden van alle oorspronkelijke rationale regthoekige driehoeken begrepen zijn; maar ook van geene andere dan oorspronkelijke, indien men voor p en q onderling ondeelbare getallen neemt, die slechts een van beide oneven zijn.

Voorts zullen, in (A), verschillende waarden voor p en q, mits slechts onder de zoo even genoemde beperkingen genomen, ook altijd verschillende driehoeken voortbrengen; want stellen wij, dat $p = a$ en $q = b$ denzelfden driehoek gaf als $p = a'$ en $q = b'$, dan zou men moeten hebben:

of $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$, $2ab = 2a'b'$ en $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$. (α),

of $a^2 - b^2 = 2a'b'$, $2ab = a'^2 - b'^2$ en $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$. (β);

in het geval (α), behoeft men slechts de eerste vergelijking bij de derde op te tellen en van de derde af te trekken, om te vinden $a = a'$ en $b = b'$, zoodat hier de waarden voor p en q, die denzelfden driehoek geven, niet verschillend kunnen wezen; in het geval (β), heeft men slechts de eerste vergelijking bij de derde, als ook de tweede bij de derde op te tellen, om te verkrijgen $2a^2 = (a' + b')^2$ en $(a + b)^2 = 2a'^2$, aan welke vergelijkingen klaarblijkelijk niet voldaan kan worden, zoo lang a en b, of ook a' en b' een van beide even en een van beide oneven zijn.

Voorts is het duidelijk, dat al de zijden van den driehoek kleiner dan 100 zullen zijn, indien dit met de hypothenusa het geval is; worden dus in (A), voor p en q, onderling ondeelbare getallen genomen, die slechts een van beide oneven zijn, zoodat $p > q$ en $p^2 + q^2 < 100$ of $p < \sqrt{(100 - q^2)}$ is, dan moeten alle oorspronkelijke rationale regthoekige driehoeken, welker zijden kleiner dan 100 zijn, te voorschijn komen; doch ook alle slechts eenmaal.

Nemen wij nu voor q achtervolgens de getallen 1, 2, 3, 4, *enz.* en zien wij telkens, welke waarden dan voor p, door de zoo even genoemde voorwaarden, worden toegelaten, zoo vinden wij, dat men nemen kan:

$q = 1$ en $p = 2, 4, 6$ of 8;
$q = 2$ en $p = 3, 5, 7$ of 9;
$q = 3$ en $p = 4$ of 8;
$q = 4$ en $p = 5, 7$ of 9;
$q = 5$ en $p = 6$ of 8;
$q = 6$ en $p = 7$;

en dat $q =$ of > 7 geene waarden voor p toelaat.

Hier uit blijkt, dat er 16 oorspronkelijke driehoeken zijn, waarvan al de zijden kleiner dan 100 zijn; dezelve zijn, naar de grootte der hypothenusen gerangschikt, de volgende:

	$p^2 - q^2$,	$2pq$,	$p^2 + q^2$	
	=	=	=	
Voor $q = 1$ en $p = 2$,	3,	4,	5	. . . (1);
» $q = 2$ en $p = 3$,	5,	12,	13	. . . (2);
» $q = 1$ en $p = 4$,	15,	8,	17	. . . (3);
» $q = 3$ en $p = 4$,	7,	24,	25	. . . (4);

Voor	$q = 2$ en $p = 5$,	21,	20,	29 ..	(5);
»	$q = 1$ en $p = 6$,	35,	12,	37 ..	(6);
»	$q = 4$ en $p = 5$,	9,	40,	41 ..	(7);
»	$q = 2$ en $p = 7$,	45,	28,	53 ..	(8);
»	$q = 5$ en $p = 6$,	11,	60,	61 ..	(9);
»	$q = 1$ en $p = 8$,	63,	16,	65 ..	(10);
»	$q = 4$ en $p = 7$,	33,	56,	65 ..	(11);
»	$q = 3$ en $p = 8$,	55,	48,	73 ..	(12);
»	$q = 2$ en $p = 9$,	77,	36,	85 ..	(13);
»	$q = 6$ en $p = 7$,	13,	84,	85 ..	(14);
»	$q = 5$ en $p = 8$,	39,	80,	89 ..	(15);
»	$q = 4$ en $p = 9$,	65,	72,	97 ..	(16).

Neemt men nu van de zijden dezer 16 oorspronkelijke driehoeken, gelijknamige veelvouden, onder voorwaarde, dat de veelvouden der hypothenusen kleiner dan 100 blijven, zoo zal men de overige der rationale driehoeken, waarnaar gevraagd is, verkrijgen. Men kan alzoo de achtervolgende veelvouden nemen:

van	de	getallen	(1),	tot	en	met	hun	19-voud;
»	»	»	(2),	»	»	»	»	7-voud;
»	»	»	(3),	»	»	»	»	5-voud;
»	»	»	(4),	»	»	»	»	3-voud;
»	»	»	(5),	»	»	»	»	3-voud;
»	»	»	(6),	»	»	»	»	2-voud;
»	»	»	(7),	»	»	»	»	2-voud;

hierdoor verkrijgt men 41 driehoeken; van de getallen (8) tot en met (16) kan men geene veelvouden nemen, zonder zijden grooter dan 100 te verkrijgen; deze getallen geven dus niet meer dan de 9 oorspronkelijke driehoeken; en derhalve zijn er in het geheel 50 regthoekige driehoeken, waarvan al de zijden in rationale geheele getallen kleiner dan 100 kunnen worden uitgedrukt; doch onder deze 50 driehoeken zijn er niet meer dan 16 die in vorm verschillen.

XL. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de meetkunstige plaats te vinden van de middelpunten der cirkels, die beschreven kunnen worden, in alle driehoeken, die dezelfde basis en gelijken omtrek hebben?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. VAN DE KASTEELE *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat ABC (Fig. 16) een der bedoelde driehoeken wezen, dan zal de meetkunstige plaats van het middelpunt M van deszelfs ingeschreven cirkel moeten bepaald worden.

Nemen wij nu AB en eene lijn YY', loodregt door het midden O van de lijn AB gaande, tot coördinatenassen aan; stellen wij alzoo OD $= x$, MD $= y$, AB $= 2e$ en AC $+$ BC $= 2a$, dan zullen voor al de driehoeken, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, $2e$ en $2a$ dezelfde waarde hebben, maar voor verschillende driehoeken zullen x en y andere waarden verkrijgen.

Trekken wij vervolgens de stralen ME en MG, dan hebben wij

AO $= e$, AD $= e + x$, dus ook AE $= e + x$,

BO $= e$, BD $= e - x$, dus ook BG $= e - x$,

derhalve is

CE $+$ GC $=$ (AC $+$ BC) $-$ (AE $+$ BG) $= 2a - 2e$

of, daar CE $=$ GC is,

$$CE = GC = a - e;$$

hieruit vinden wij verder

AC $=$ AE $+$ CE $= a + x$ en BC $=$ BG $+$ GC $= a - x$;

stellen wij dus de zijden AB, AC en BC des driehoeks respectievelijk door p, q en r en de halve som dier zijden door s voor, dan hebben wij

$$p = 2e,\ q = a + x,\ r = a - x,\ s = a + e.$$

Daar nu de inhoud des driehoeks vooreerst gelijk is aan sy, zijnde het product van de halve som der zijden met den straal MD $= y$ des ingeschreven cirkels, en ten andere die inhoud, door de bekende formule $\sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$, wordt uitgedrukt, zoo volgt hieruit de vergelijking

$$sy = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}$$

of

$$sy^2 = (s-p)(s-q)(s-r);$$

hierin de bovenstaande waarden voor p, q, r en s overbrengende, gaat deze vergelijking over in

$$(a+e)y^2 = (a-e)(e-x)(e+x),$$

waaruit volgt

$$y^2 = \frac{a-e}{a+e}(e^2 - x^2).$$

Stelt men de waarde van y, die met $x = 0$ overeenstemt, door f voor, dan heeft men

$$f^2 = \frac{a - e}{a + e} e^2,$$

waaruit volgt $$\frac{a - e}{a + e} = \frac{f^2}{e^2};$$

hierdoor verandert nu de gevondene vergelijking in

$$y^2 = \frac{f^2}{e^2}(e^2 - x^2),$$

welke, de gewone middelpuntsvergelijking eener ellips zijnde, aantoont, dat de middelpunten M in den omtrek eener ellips liggen, waarvan AB $= 2e$ de groote as is, terwijl de kleine as langs YY' zal liggen en de lengte $2f = 2e\sqrt{\frac{a - e}{a + e}}$ zal hebben.

Maakt men in de figuur AN $=$ BN $= a$, dan zal ABN een der in de opgaaf genoemde driehoeken zijn; daar NO den hoek ANB midden door deelt, zal men slechts den hoek ABN, door eene lijn BP hebben midden door te deelen, om het middelpunt P, van den cirkel in ABN beschreven, te vinden. Hieruit volgt, dat P een punt van de gezochte meetkunstige plaats is; alzoo is OP de waarde van y, die met $x = 0$ overeenstemt; en bijgevolg is OP $= f$ de halve kleine as der ellips.

Aanmerking. Daar AC $+$ BC $= 2a$ en AB $= 2e$ standvastig zijn, zal de meetkunstige plaats van de toppunten der bedoelde driehoeken, almede eene ellips zijn, waarvan A en B de brandpunten en $2a$ en $2\sqrt{(a^2 - e^2)}$ de groote en kleine assen zijn. Hieruit volgt: *dat de middelpunten der cirkels, beschreven in de driehoeken, die door de beide voerstralen van eenig punt eener ellips en hare dubbele uitmiddelpuntigheid gevormd worden, in den omtrek van eene andere ellips gelegen zijn, die de dubbele uitmiddelpuntigheid der eerste, tot groote as heeft.*

XLI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert een driehoekig en een vierhoekig getal, beide denzelfden wortel hebbende, te vinden, zoodat hunne som en hun verschil beide volkomen vierkanten zijn?

Opgelost door B. Lubbers, D. W. Hinse, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, S. T. Boas, G. Koster, M. G. Snoer en F. C. Badtjs.

Oplossing van B. Lubbers.

Men stelle den gelijken wortel door x voor, dan is het driehoekige getal $\frac{x^2+x}{2}$ en het vierhoekige x^2, derhalve moeten volgens de opgaaf $x^2+\frac{x^2+x}{2}$ en $x^2-\frac{x^2+x}{2}$ volkomen vierkanten zijn; laat nu den vierkantswortel uit de eerste dezer uitdrukkingen zijn $\frac{ax}{2}$, dan is

$$x^2+\frac{x^2+x}{2}=\frac{a^2x^2}{4},$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$x=-\frac{2}{(6-a^2)}.$$

Brengende nu deze waarde voor x in de tweede uitdrukking, te weten in $x^2-\frac{x^2+x}{2}$ over, dan verandert die uitdrukking in $\frac{8-a^2}{(6-a^2)^2}$, en dan is het, om dezelve tot een vierkant te maken, genoegzaam dat $8-a^2$ een vierkant zij. Het is duidelijk, dat $a=2$ daaraan onmiddellijk voldoet, maar dan wordt $x=-1$ en dus het begeerde driehoekige getal 0. Men stelle derhalve $a=2+b$, dan is $8-a^2=4-4b-b^2$, en nu, voor den vierkantswortel uit deze uitdrukking $2-nb$ nemende, is

$$4-4b-b^2=(2-nb)^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$b=\frac{4(n-1)}{n^2+1}.$$

Hierin kan nu n willekeurig genomen worden; voor $n=2$, komt er $b=\frac{4}{5}$, $a=\frac{14}{5}$, $x=\frac{25}{23}$; hierdoor worden de gevraagde getallen $\frac{x^2+x}{2}=\frac{600}{529}$ en $x^2=\frac{625}{529}$, waarvan de som $\frac{1225}{529}=\left(\frac{35}{23}\right)^2$ en het verschil $\frac{25}{529}=\left(\frac{5}{23}\right)^2$ beide volkomen vierkanten zijn.

XLII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welke driehoeken hebben de eigenschap, dat hunne zijden eene rekenkunstige reeks vormen; en dat, het verschil van die reeks als eenheid aangenomen wordende, zoowel de zijden als de loodlijn, die uit den middelsten hoek in grootte op de overstaande zijde valt, door geheele getallen worden uitgedrukt?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, G. Koster, B. Lubbers, C. J. Boeken, D. W. Hinse, J. C. Olivier, F. C. Radijs *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat in den driehoek ABC (Fig. 17.)

$$AC = x + a,\quad AB = x \text{ en } BC = x - a$$

gesteld worden, dan maken de zijden eene rekenkunstige reeks uit, en dan is, omdat in elken driehoek de middelste hoek in grootte over de middelste zijde staat, C het hoekpunt, waaruit de in het voorstel bedoelde loodlijn CD op de overstaande zijde AB valt.

Volgens algemeen bekende eigenschappen der driehoeken, is nu:

$$AD = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AB} = \frac{(x+a)^2 + x^2 - (x-a)^2}{2x} = \tfrac{1}{2}x + 2a,$$

$$BD = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2AB} = \frac{(x-a)^2 + x^2 - (x+a)^2}{2x} = \tfrac{1}{2}x - 2a,$$

$$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{\{(x+a)^2 - (\tfrac{1}{2}x + 2a)^2\}} = \sqrt{3(\tfrac{1}{4}x^2 - a^2)},$$

en, ter oplossing van het voorstel, zal het dus slechts noodig zijn te onderzoeken, welke geheele getallen men voor x mag nemen, opdat, $a = 1$ zijnde, ook de gevondene waarde voor CD een geheel getal worde. Hiertoe moet men dus, de loodlijn door y voorstellende, geheele getallen voor x en y vinden, die aan de vergelijking

$$y^2 = 3(\tfrac{1}{4}x^2 - 1) = \tfrac{3}{4}x^2 - 3$$

voldoen. Daar echter het tweede lid dezer vergelijking door 3 deelbaar is, moet ook het eerste lid door 3 deelbaar wezen, hetgeen niet zijn kan, ten zij y door 3 deelbaar zij; stellen wij dus $y = 3z$, als wanneer z weder een geheel getal voorstelt, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$9z^2 = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

of $$12z^2 = x^2 - 4,$$

waaruit volgt $$x = 2\sqrt{(1 + 3z^2)}.$$

De geheele getallenwaarden van z, die $\sqrt{(1 + 3z^2)}$ rationaal maken, zijn (Zie EULER, *Algebra*, 2de deel, bladz. 328 en volg.)

$z = 0$, $z = 1$, $z = 4$, $z = 15$, $z = 56$, $z = 209$, *enz.*; wordende elke volgende waarde van z gevonden, door het viervoud van de onmiddellijk voorgaande waarde van z, met de tweede voorgaande waarde van z te verminderen. De overeenkomstige waarden van x zijn:

$x = 2$, $x = 4$, $x = 14$, $x = 52$, $x = 194$, $x = 724$, *enz.* terwijl die van $y = 3z$ zijn:

$y = 0$, $y = 3$, $y = 12$, $y = 45$, $y = 168$, $y = 627$, *enz.*

Neemt men $x = 2$, dan is, omdat $a = 1$ is,

AC = 3, AB = 2, BC = 1, AD = 3, BD = -1 en CD = 0, zoodat er dan geen eigenlijke driehoek komt, die aan het voorstel beantwoordt, alzoo deze waarden behooren tot eenen oneigenlijken driehoek, waarvan de som der beide kleinste zijden gelijk aan de grootste zijde is, weshalve die driehoek in eene regte lijn is overgegaan.

Neemt men $x = 4$, dan is:

AC = 5, AB = 4, BC = 3, AD = 4, DB = 0 en CD = 3; deze waarden behooren tot eenen regthoekigen driehoek, regthoekig in B en waarvan de loodlijn langs de zijde BC valt.

Neemt men $x = 14$, dan is:

AC = 15, AB = 14, BC = 13, AD = 9, BD = 5 en CD = 12; deze waarden, zoowel als die, welke men voor de opvolgende waarden van x verkrijgt, leveren eenen driehoek op, van de gedaante, die in Fig. 17 is voorgesteld.

Er zijn dus een oneindig aantal driehoeken, die de in het voorstel genoemde eigenschap bezitten, en al deze driehoeken worden gevonden, door voor z achtervolgens de boven opgegevene getallen te nemen.

AANMERKING *van* J. S. SPEIJER. Met uitzondering van de gevallen, dat de driehoek in eene regte lijn overgaat of regthoekig wordt, is altijd $x > 4$ en alzoo BD positief, omdat BD $= \frac{1}{2}x - 2a$ en $a = 1$ is. De *hoek* B is dus ook

altijd scherp; daar deze *hoek* over de grootste zijde staat, zijn de *hoeken* A en C almede scherp; bijgevolg kunnen er geene stomphoekige driehoeken zijn, die de in het voorstel genoemde eigenschap bezitten.

XLIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer de zijden eens scherphoekigen driehoeks eene rekenkunstige reeks vormen, dan zal de loodlijn, die uit den middelsten hoek in grootte op de overstaande zijde valt, die zijde in twee ongelijke deelen verdeelen, zoodat het verschil van die beide deelen het viervoud is van het gemeen verschil der zijden. Men vraagt het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, B. LUBBERS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat Fig. 17 wederom den bedoelden driehoek verbeelden, dan hebben wij, volgens het voorgaande voorstel,

$$AD = \tfrac{1}{2}x + 2a \quad \text{en} \quad BD = \tfrac{1}{2}x - 2a,$$

waaruit terstond volgt

$$AD - BD = 4a;$$

zijnde hierdoor de opgegevene stelling bewezen.

AANMERKING *van* J. S. SPEIJER. Deze stelling gaat even goed voor stomphoekige driehoeken door, mits men slechts behoorlijk, op den negatieven toestand der segmenten AD en BD, acht geve. Bij den scherphoekigen driehoek is

$$AD + BD = x \quad \text{en} \quad AD - BD = 4a;$$

bij den driehoek, die in B stomp was, zou men, de lijn BD, zoo als die dan in de figuur voorkwam, als positief aanziende, integendeel hebben

$$AD - BD = x \quad \text{en} \quad AD + BD = 4a.$$

XLIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Eenen scherphoekigen driehoek te vinden, waarvan de zijden eene rekenkunstige reeks vormen; zoodat de zijden, de loodlijn, die uit den middelsten hoek in grootte op de overstaande zijde valt, en de deelen, waarin die zijde door de loodlijn gedeeld wordt, alle door geheele getallen wor-

den uitgedrukt; en dat de laatstgenoemde deelen onderling 16 verschillen?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, B. LUBBERS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat wederom Fig. 17 de begeerde driehoek zijn en deszelfs zijden door $x + a$, x en $x - a$ worden voorgesteld, dan is, volgens het voorgaande voorstel AD — BD $= 4a$ en daar hier AD — BD $= 16$ moet zijn; hebben wij terstond $4a = 16$ of $a = 4$.

Wij hebben alzoo

$$AC = x + 4,\ AB = x,\ BC = x - 4$$

en volgens het XLII. VOORSTEL

$$AD = \tfrac{1}{2}x + 8,\ BD = \tfrac{1}{2}x - 8,\ CD = \sqrt{3(\tfrac{1}{4}x^2 - 16)},$$

zoodat, om voor al deze lijnen geheele getallen te verkrijgen, x een even getal en $\sqrt{3(\frac{1}{4}x^2 - 16)}$ rationaal zal moeten zijn. Stellen wij daartoe

$$\sqrt{3(\tfrac{1}{4}x^2 - 16)} = 3z$$

en $x = 2u$,

dan is $3(u^2 - 16) = 9z^2$,

waaruit volgt $u = \sqrt{(16 + 3z^2)}$.

De geheele getallenwaarden van z, die $\sqrt{(16 + 3z^2)}$ rationaal maken, zijn (Zie EULER, *Algebra*, tweede deel, bladz. 328 en volg.)

$$z = 0,\ z = 4,\ z = 16,\ z = 60,\ enz.,$$

hangende elke volgende waarde van z, van de twee onmiddellijk voorgaanden, even zoo af, als in het XLII VOORSTEL. En met deze waarden van z stemmen overeen:

$$u = 4,\ u = 8,\ u = 28,\ u = 104,\ enz.$$

en $x = 8,\ x = 16,\ x = 56,\ x = 208,\ enz.$

Neemt men $x = 8$ of $x = 16$, dan komt men, even als in het XLII. VOORSTEL, tot eene regte lijn in plaats van tot een' driehoek, of tot eenen regthoekigen driehoek.

Neemt men $x = 56$, dan vindt men

AC=60, AB=56, BC=52, AD=36, BD=20 en CD=48.

En door de overige waarden voor x te nemen, kan men zoo veel driehoeken vinden, die aan het voorstel voldoen, als men verkiest.

AANMERKING *van* J. S. SPEIJER. Dewijl in het XLII VOORSTEL het verschil der deelen AD en BD gelijk 4 was, behoeft men de zijden, der in dat voorstel gevondene driehoeken, slechts met 4 te vermenigvuldigen, om driehoeken te vinden, die aan het tegenwoordige voorstel beantwoorden.

XLV. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Vind eene meetkunstige reeks van drie termen, waarvan de eerste een achthoekig getal, de tweede één minder dan een vierhoekig en de derde één minder dan een zeshoekig getal is; zoodat, van de wortels der genoemde veelhoekige getallen, de eerste wederom driehoekig, de tweede achthoekig, en de derde driehoekig zij, en dat eindelijk van de wortels dezer wortels, de tweede gelijk aan de eerste, maar de laatste het dubbel van de eerste zij?

OPGELOST *door* H. KLOOS, C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* H. KLOOS.

Stel voor de laatstgenoemde wortels

$$x \,, \quad x \quad \text{en} \quad 2x,$$

dan zijn de wortels der eerstgenoemde veelhoekige getallen

$$\frac{x^2+x}{2}, \quad 3x^2-2x \quad \text{en} \quad 2x^2+x;$$

die veelhoekige getallen zelven zijn dan

$$3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-2\left(\frac{x^2+x}{2}\right), (3x^2-2x)^2 \text{ en } 2(2x^2+x)^2-(2x^2+x),$$

en de termen der begeerde reeks:

$$3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2-2\frac{(x^2+x)}{2}=\tfrac{1}{4}(3x^4+6x^3-x^2-4x),$$

$$(3x^2-2x)^2-1=9x^4-12x^3+4x^2-1$$

en $\quad 2(2x^2+x)^2-(2x^2+x)-1=8x^4+8x^3-x-1.$

Volgens de eigenschappen der meetkunstige reeksen, moet men nu hebben

$$\tfrac{1}{4}(3x^4+6x^3-x^2-4x)(8x^4+8x^3-x-1)=(9x^4-12x^3+4x^2-1)^2,$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$300x^8-936x^7+824x^6-341x^5+33x^4+101x^3-37x^2-4x+4=0,$$

welke vergelijking, in geheele getallen, geenen anderen wor-

tel heeft, dan $x = 2$; de termen der begeerde reeks zijn derhalve

$$21\ ,\quad 63 \quad \text{en} \quad 189.$$

XLVI. Voorstel.

Door C. van Schaick.

Zoek twee getallen, zoodanig: dat de som van hunne vierde magten tot de som van hunne derde magten staat als 41 *tot* 14; *en dat de vierkantswortel uit hunne som gelijk zij aan hun verschil?*

Opgelost *door* C. van Schaick, S. T. Boas, C. J. Bolten, D. W. Hinse, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoer *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* C. van Schaick.

Stellen wij voor de begeerde getallen $x + y$ en $x - y$, dan is:

de som hunner vierde magten . . . $2x^4+12x^2y^2+2y^4$,
de som hunner derde magten . . . . $2x^3+6xy^2$,
hunne som . . . . $2x$,
en hun verschil . . . . $2y$.

Volgens de opgaaf hebben wij dan

$$2x^4 + 12x^2y^2 + 2y^4 : 2x^3 + 6xy^2 = 41 : 14$$

en

$$\sqrt{2x} = 2y.$$

Brengen wij nu deze vergelijking in het vierkant, dan vinden wij, $2x = 4y^2$, waaruit volgt

$$y^2 = \tfrac{1}{2}x.$$

Deze waarde voor y^2 in de bovenstaande evenredigheid overbrengende, verandert dezelve in

$$2x^4 + 6x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 : 2x^3 + 3x^2 = 41 : 14$$

of

$$2x^2 + 6x + \tfrac{1}{2} : 2x + 3 = 41 : 14,$$

waaruit volgt

$$28x^2 + 84x + 7 = 82x + 123,$$

$$28x^2 + 2x = 116$$

of

$$x^2 + \tfrac{1}{14}x = \tfrac{29}{7}.$$

Uit deze vierkantsvergelijking vindt men, op de gewone wijze,

$$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2\tfrac{1}{14};$$

de laatste waarde van x zou, blijkens de vergelijking $y^2 = \frac{1}{2}x$, y onbestaanbaar doen worden; wij gebruiken

dus alleen $x = 2$, dan is $y^2 = \frac{1}{2}x = 1$ en dus $y = \pm 1$, weshalve de bedoelde getallen zijn 3 en 1 of 1 en 3.

XLVII. Voorstel.

Door C. van Schaick.

In het jaar 17[redacted]7 *werd aan iemand gevraagd, hoe oud hij was? Hij antwoordde: dat het getal zijner jaren een vierkant was, welks wortel door het derde (of overdekte) cijfer van het jaartal werd uitgedrukt; en dat, zoo men zijne jaren, van de jaren, die men boven* 1700 *telde, aftrok, de rest het viervoud zou zijn van den vierkantswortel uit het getal zijner jaren. Men vraagt naar zijnen ouderdom en naar bovengenoemd jaartal?* (*)

Opgelost *door* C. van Schaick, S. T. Boas, C. J. Bolten, D. W. Hinse, L. van de Kasteele, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* C. van Schaick.

Stellende het overdekte cijfer door x voor, dan is de ouderdom van dien man x^2 jaren, en $10x + 7$ is dan het aantal jaren, dat men toen boven 1700 telde. Volgens de opgaaf heeft men alzoo de vergelijking

$$(10x + 7) - x^2 = 4x$$

of $$x^2 - 6x = 7,$$

waaruit volgt $$x = 7 \text{ of } x = -1.$$

Slechts de eerste waarde van x kan hier gebruikt worden, omdat het overdekte cijfer geen negatief getal zijn kan. Derhalve is dat overdekte cijfer 7, het jaartal 1777 en den gevraagden ouderdom 49 jaren.

XLVIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

In eenen driehoek ABC (*Fig.* 18), *regthoekig in* B; *wordt de tophoek* C *middendoorgedeeld, door eene lijn* CD, *die de basis* AB *in* D *ontmoet; uit* D *wordt vervolgens eene loodlijn* DE *opgerigt, die* AC *in* E *ontmoet, waardoor een nieuwe regthoekige driehoek* ADE *ontstaat; in dezen nieuwen driehoek wordt weder de hoek* E *midden doorgedeeld, door eene lijn* EF *en uit* F *eene loodlijn* FG *op* AB *gesteld, waardoor de driehoek* AFG *ontstaat; hier-*

(*) Prinsen, *Algebra*, blads. 125 en 126. No. 17.

van deelt men weder den hoek G *midden door en zoo vervolgens. Nu wordt gevraagd de som te vinden van het oneindig aantal lijnen* CD, EF, GH, IK, *enz.?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, D. W. Hinse, P. J. L. Quant, F. C. Radijs, S. Dik, Cornsz., G. Koster *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat *hoek* BCA $= 2\alpha$ zijn, dan is, volgens de opgegevene constructie, *hoek* DCE $=$ *hoek* BCD $= \alpha$; volgens de constructie is ook DE evenwijdig met BC en dus *hoek* EDC $=$ *hoek* BCD $= \alpha$; EDC is alzoo een gelijkbeenige driehoek, waarvan elk der hoeken aan de bazis gelijk α en de tophoek $180^\circ - 2\alpha$ is. Het is met de driehoeken GFE, IHG, *enz.* klaarblijkelijk even zoo gelegen, zoodat wij, uit deze driehoeken, de volgende evenredigheden kunnen trekken:

$$\begin{aligned} CD : CE &= Sin.\ 2\alpha : Sin.\ \alpha, \\ EF : EG &= Sin.\ 2\alpha : Sin.\ \alpha, \\ GH : GI &= Sin.\ 2\alpha : Sin.\ \alpha, \\ &\quad enz. \qquad enz. \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$(CD+EF+GH+ enz.):(CE+EG+GI+ enz.) = Sin. 2\alpha : Sin. \alpha.$$

De eerste term van deze laatste evenredigheid is de som van het oneindig getal lijnen, die gevonden moet worden; de tweede term is de hypotenusa des driehoeks; stellende dus deze som en hypotenusa respectievelijk door S en h voor, dan hebben wij terstond

$$S : h = Sin.\ 2\alpha : Sin.\ \alpha.$$

of

$$S = \frac{h\ Sin.\ 2\alpha}{Sin.\ \alpha} = 2h\ Cos.\ \alpha.$$

Wil men de begeerde som, alleen in de zijden des driehoeks, uitdrukken, dan is, uit den regthoekigen driehoek ABC, zoo men BC $= a$ stelt, $Cos.\ 2\alpha = \frac{a}{h}$; daar nu in het algemeen $Cos.\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + Cos.\ 2\alpha}{2}\right)}$ is, vindt men hier

$$Cos.\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{a}{h}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{h + a}{2h}\right)},$$

en dus is ook

$$S = 2h \sqrt{\left(\frac{h + a}{2h}\right)} = \sqrt{2h(h + a)}.$$

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Indien men, op de hypotenusa AC als middellijn, eenen halven cirkel beschrijft, en CD verlengt tot aan den omtrek van dien cirkel in Z, dan zal CZ de helft van de begeerde som zijn; want AZ getrokken hebbende is klaarblijkelijk ACZ een regthoekige driehoek en alzoo CZ = AC *Cos.* ACZ = *h Cos.* α.

XLIX. Voorstel.

In het figuur van het voorgaande voorstel, begeert men ook de som te vinden van de inhouden der driehoeken BCD, DEF, FGH, HIK, *enz.?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. S. Speijer, D. W. Hinse, P. J. L. Quant, F. C. Radijs, S. Dik, Cornsz., G. Koster *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Alles nemende zoo als in het voorgaande voorstel omschreven is, hebben wij uit de driehoeken BCD en CDE

$$BC = CD\ Cos.\ \alpha \quad \text{en} \quad DE = \frac{CD\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ 2\alpha} = \frac{CD}{2\ Cos.\ \alpha},$$

waaruit volgt

$$BC : DE = Cos.\ \alpha : \frac{1}{2\ Cos.\ \alpha} = 2\ Cos.^2\ \alpha : 1;$$

maar de inhouden der driehoeken BCD en CDE staan tot elkander als de zijden BC en DE, omdat zij, wanneer men deze zijden als bazes aanneemt, gelijke hoogten hebben, derhalve is ook

$$drieh.\ BCD : drieh.\ CDE = 2\ Cos.^2\ \alpha : 1.$$

Uit de evenwijdigheid der in de figuur voorkomende lijnen, volgt, dat de trapeziums BCDE, DEGF, FGIH, *enz.*, alle gelijkvormig zijn en door hunne diagonalen op dezelfde wijze in driehoeken verdeeld worden; de verhouding van de beide deelen is dus in elk trapezium dezelfde; wij hebben alzoo

$$drieh.\ BCD : drieh.\ CDE = 2\ Cos.^2\ \alpha : 1$$
$$drieh.\ DEF : drieh.\ EFG = 2\ Cos.^2\ \alpha : 1$$
$$drieh.\ FGH : drieh.\ GHI = 2\ Cos.^2\ \alpha : 1$$
$$enz. \qquad enz.$$

en hieruit volgt weder de nieuwe evenredigheid

$$\frac{drieh.BCD + drieh.DEF + drieh.FGH + enz.}{drieh.CDE + drieh.EFG + drieh.GHI + enz.} = \frac{2Cos.^2\alpha}{1}.$$

Daar nu de eerste term dezer evenredigheid de begeerde som is, terwijl de tweede term is hetgeen er overblijft, indien men de begeerde som van den inhoud des driehoeks aftrekt, zoo hebben wij, de gevraagde som en den inhoud des driehoeks respectievelijk door S′ en I voorstellende,

$$\frac{S'}{I - S'} = 2\ Cos.^2\ \alpha,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$S' = \frac{2\ Cos.^2\ \alpha}{1 + 2\ Cos.^2\ \alpha} \times I,$$

of ook na herleiding

$$S' = \frac{1 + Cos.\ 2\alpha}{2 + Cos.\ 2\alpha} \times I.$$

Wil men den inhoud S′ in de zijden des driehoeks uitdrukken, dan behoeft men slechts $Cos.\ 2\alpha$ door $\frac{a}{h}$ en I door $\frac{1}{2}ab$, AB $= b$ stellende, te vervangen; alsdan komt er

$$S' = \frac{ab(a + h)}{2(a + 2h)}.$$

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Laat men den hoek ACB, dat is 2α, van 0 tot 90° aangroeijen, dan neemt het gebroken $\frac{1 + Cos.\ 2\alpha}{2 + Cos.\ 2\alpha}$ van $\frac{2}{3}$ tot $\frac{1}{2}$ af; uit de formule $S' = \frac{1 + Cos.\ 2\alpha}{2 + Cos.\ 2\alpha} \times I$ volgt dus, dat de som der driehoeken BCD, DEF, *enz.* nooit grooter dan $\frac{2}{3}$ en nooit kleiner dan $\frac{1}{2}$ van den inhoud des geheelen driehoeks ABC zijn kan.

L. Voorstel.

Door A. F. van de Laar, Junior.

Uit de vergelijking $Sin.(\phi + \alpha) Sin.(\phi + \beta) = a$, *de waarde van* ϕ *te vinden?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, D. W. Hinse, C. J. Bolten, A. F. van de Laar, Junior, J. S. Speijer, P. J. L. Quant, F. C. Radijs, J. C. Olivier *en* S. T. Boas.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Daar in het algemeen

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}(p + q)\ Sin.\ \tfrac{1}{2}(p - q) = \tfrac{1}{2}(Cos.\ q - Cos.\ p)$$

is, verkrijgen wij, door te stellen

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = \phi + \alpha \text{ en } \tfrac{1}{2}(p-q) = \phi + \beta,$$

waardoor $p = 2\phi + \alpha + \beta$ en $q = \alpha - \beta$
wordt, de algemeene vergelijking

$$Sin.(\phi+\alpha)Sin.(\phi+\beta) = \tfrac{1}{2}\{Cos.(\alpha-\beta) - Cos.(2\phi+\alpha+\beta)\}.$$

In plaats van de opgegevene vergelijking, kunnen wij dus schrijven

$$\tfrac{1}{2}\{Cos.(\alpha-\beta) - Cos.(2\phi+\alpha+\beta)\} = a,$$

waaruit dadelijk volgt

$$Cos.(2\phi+\alpha+\beta) = Cos.(\alpha-\beta) - 2a,$$

$$2n\pi \pm (2\phi+\alpha+\beta) = Boog Cos.\{Cos.(\alpha-\beta) - 2a\}$$

en $$\phi = -\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \mp \{n\pi - \tfrac{1}{2}Boog Cos.(Cos.(\alpha-\beta) - 2a)\}.$$

Aan de vergelijking $Cos.\ (2\phi+\alpha+\beta) = Cos.\ (\alpha-\beta) - 2a$, kan men ook eene gedaante geven, die dezelve geschikt maakt, ter berekening van de waarde van ϕ.

Is namelijk $2a < 1$, dan stelle men

$$2a = Cos.\ \gamma;$$

hierdoor wordt

$$Cos.\ (2\phi+\alpha+\beta) = Cos.\ (\alpha-\beta) - Cos.\ \gamma$$

of $$Cos.\ (2\phi+\alpha+\beta) = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma)\ Sin.\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).$$

Is echter $2a > 1$, dan stelle men

$$\frac{Cos.\ (\alpha-\beta)}{2a} = Cos.\ \delta$$

of $$Cos.\ (\alpha-\beta) = 2a\ Cos.\ \delta;$$

alsdan wordt

$$Cos.\ (2\phi + \alpha + \beta) = -\ 2a\ (1 - Cos.\ \delta)$$

of $$Cos.\ (2\phi + \alpha + \beta) = -\ 4a\ Sin.^2\ \tfrac{1}{2}\ \delta.$$

De beide aldus verkregene formulen zijn zeer geschikt om, zoo α, β en a in getallen gegeven zijn, door behulp der tafels de waarde van ϕ te berekenen.

LI. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

Een driehoek ABC (*Fig.* 19) *is door eene lijn* DE, *uit een punt* D *der zijde* AB, *naar een punt* E *der zijde* BC *getrokken, in twee deelen verdeeld, waarvan zoo wel de omtrekken als de inhouden even groot zijn. Indien nu de zijden des driehoeks gegeven zijn, begeert men de lijnen* BD *en* BE *te berekenen?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. W.

Hinse, J. S. Smeijer, S. T. Boas, C. J. Bolten, G. Koster en Fr G. Badijs.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Stellende AB = c, AC = b, BC = a, $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, BD = x, BE = y, dan is AD = $c - x$ en EC = $a - y$. Nu volgt, uit de gelijkheid van de omtrekken der deelen BDE en ADEC,

BD + BE + ED = AC + CE + ED + AD,

dat is: $x + y +$ ED $= b + a - y +$ ED $+ c - x$

of $2x + 2y = a + b + c$

en $x + y = s$ . . . . (1).

Uit de gelijkheid van de inhouden der deelen BDE en ADEC volgt, dat de driehoek BDE de helft is van den driehoek ABC; en uit eene bekende eigenschap der driehoeken, heeft men alzoo de evenredigheid

1 : 2 = *Inh. drieh.* BDE : *Inh. drieh.* ABC = BD × BE : AB × BC

of $1 : 2 = xy : ac$,

waaruit volgt $2xy = ac$ . . . . (2).

De vergelijkingen (1) en (2) op de gewone wijze oplossende, vindt men

$x = \frac{1}{2}\{s \pm \sqrt{(s^2 - 2ac)}\}$ en $y = \frac{1}{2}\{s \mp \sqrt{(s^2 - 2ac)}\}$. (3),

waarin gelijktijdig de bovenste of benedenste teekens moeten genomen worden. Of men de bovenste dan wel de benedenste teekens wil gebruiken, daarin is geen ander verschil gelegen, dan dat men de waarden van x en y met elkander verwisselt; het is ook klaar dat, indien DE eene lijn is, die den driehoek ABC op de bepaalde wijze verdeelt, BD′ = BD en BE′ = BE genomen wordende, D′E′ eene andere deellijn zal wezen, die den driehoek ABC insgelijks op de bepaalde wijze verdeelen zal, mits slechts, zoo BD > BE is, de zijde BC groot genoeg zij, opdat het punt D′ niet, zoo als in Fig. 20, buiten den driehoek valle.

Door de formulen (3) is het voorstel opgelost; maar zal een driehoek op de bepaalde wijze kunnen verdeeld worden, dan mogen de zijden, zoo men vooruit bepaalt op welke zijden de deelpunten D en E moeten vallen, niet willekeurig gegeven worden. Behalve dat de som van elke twee zijden kleiner dan de derde moet wezen, vordert de bestaanbaarheid der voor x en y gevonden waarden, dat men hebbe

$s^2 > 2ac$ of $\frac{1}{4}(a+b+c)^2 > 2ac$ en alzoo

$$(a+b+c)^2 > 8ac \quad \ldots \ldots \quad (A);$$

terwijl voorts de verdeeling des driehoeks niet in den bedoelden zin zal kunnen geschieden, ten zij men gelijktijdig hebbe

$$x < c \text{ en } y < a \quad \ldots \ldots \quad (B).$$

Om te onderzoeken in welke gevallen de verdeeling eigenlijk geschieden kan, stellen wij *vooreerst*, dat men de punten D en E op de beide kleinste zijden des driehoeks begeerde te hebben, en dat alzoo gegeven ware

$$b > c, \; c > a \text{ en } a + c > b,$$

dan zou de voorwaarde (A) van zelve vervuld zijn; want uit $a + c > b$ volgt

$a + c - b > 0$ en dus ook . . . . . $(a+c-b)^2 > 0;$
uit $b > c$ en $c > a$ volgt $b > a$ en dus ook . $4bc > 4ac;$
uit $b > c$ volgt ook nog . . . . $4ab > 4ac;$
van welke ongelijkheden de som is . . $(a+b+c)^2 > 8ac.$

Wat de voorwaarden (B) betreft, heeft men in dit geval achtervolgens:

$b>c,$	$b>a,$
$b+c>2c,$	$b+a>2a,$
$2s-a>2c,$	$2s-c>2a,$
$4cs-2ac>4c^2,$	$4as-2ac>4a^2,$
$s^2+4cs-2ac>s^2+4c^2,$	$s^2+4as-2ac>s^2+4a^2,$
$s^2-2ac>(2c-s)^2;$	$s^2-2ac>(2a-s)^2;$

men is hier onzeker of $2a - s$ positief dan wel negatief is, alzoo dit beide kan plaats hebben; $2c - s$ kan echter alleen positief wezen, waarvan men zich overtuigen kan door de som te nemen van $c > b - a$, $2c > 2a$ en $c = c$, want dan komt er $4c > a + b + c$ of $2c > s$. In allen gevalle volgt uit de bovenstaande ongelijkheden

$\sqrt{(s^2-2ac)}>2c-s,$	$\sqrt{(s^2-2ac)}>2a-s,$
$\sqrt{(s^2-2ac)}>s-2c,$	$\sqrt{(s^2-2ac)}>s-2a,$

waaruit gemakkelijk wordt afgeleid

$\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}>c,$	$\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}>a,$
$\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}<c,$	$\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}<a.$

Neemt men nu

$x=\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}$ en $y=\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}$, dan is

$$x > c \quad \text{en} \quad y < a;$$

neemt men echter

$$x=\tfrac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\} \text{ en } y=\tfrac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}, \text{ dan is}$$

$$x < c \quad \text{en} \quad y > a$$

en dus kunnen hier voorwaarden (B) niet vervuld worden; bij gevolg kunnen de punten D en E niet op de kortste zijden des driehoeks vallen.

Was bij voorbeeld gegeven $b = 30$, $c = 24$ en $a = 14$, dan zou men hebben $s = 34$, $2c - s = 14$, $2a - s = -6$, $\sqrt{(s^2 - 2ac)} = 22$; dus $x = 28$ en $y = 6$, of $x = 6$ en $y = 28$; doch deze waarden voor x en y leveren geene bruikbare verdeeling des driehoeks op.

Was gegeven $b = 32$, $c = 24$ en $a = 20$, dan zou men vinden $s = 38$, $2c - s = 10$, $2a - s = 2$, $\sqrt{(s^2 - 2ac)} = 22$; dus $x = 30$ en $y = 8$, of $x = 8$ en $y = 30$; welke waarden almede geene bruikbare verdeeling aanwijzen.

Stellen wij *ten tweede*, dat men van de punten D en E het eene op de langste, het andere op de kortste zijde des driehoeks begeerde te hebben, en dat alzoo gegeven ware

$$c > b,\ b > a \quad \text{en} \quad a + b > c,$$

dan zou weder de voorwaarde (A) van zelve vervuld zijn, want uit $a + b > c$ volgt $a + b - c > 0$ en dus ook $(a+b-c)^2 > 0$;
uit $b > a$ volgt . . . . $4bc > 4ac$,
en tellende bij deze ongelijkheden op . . . . $4ac = 4ac$,
dan komt er . . . . $(a+b+c)^2 > 8ac$.

Wat de voorwaarden (B) betreft heeft men als nu:

$$\begin{array}{ll} b<c, & b>a, \\ b+c<2c, & b+a>2a, \\ 2s-a<2c, & 2s-c>2a, \\ 4cs-2ac<4c^2, & 4as-2ac>4a^2, \\ s^2+4cs-2ac<s^2+4c^2, & s^2+4as-2ac>s^2+4a^2, \\ s^2-2ac<(2c-s)^2; & s^2-2ac>(2a-s)^2; \end{array}$$

omtrent het positief of negatief zijn van $2a - s$ is men weder onzeker; maar $c > b$, $c > a$, en $2c > c$ optellende, vindt men $4c > a + b + c$ of $2c > s$; $2c - s$ is dus positief, zoodat men nu uit de bovenstaande ongelijkheden, alleen mag besluiten tot

$$\sqrt{(s^2-2ac)}<2c-s, \qquad \sqrt{(s^2-2ac)}>2a-s,$$
$$\sqrt{(s^2-2ac)}>s-2a,$$

waaruit gemakkelijk wordt afgeleid

$\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}<c$, $\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}>a$,
$\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}<a$.

Neemt men nu

$x=\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}$ en $y=\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}$, dan is

$$x<c \quad \text{en} \quad y<a,$$

zoodat dan ook de voorwaarden (B) vervuld zijn; neemt men echter $x=\frac{1}{2}\{s-\sqrt{(s^2-2ac)}\}$ en $y=\frac{1}{2}\{s+\sqrt{(s^2-2ac)}\}$ dan is $x<a$. dus zoo veel te meer

$$x<c \quad \text{maar ook} \quad y>a,$$

zoodat dan de voorwaarden (B) niet vervuld zijn. In dit geval is dus de verdeeling des driehoeks altijd mogelijk, doch slechts op ééne wijze, zoo als in Fig. 20; terwijl dan altijd de grootste der beide berekende onbekenden op de grootste zijde des driehoeks moet worden uitgezet.

Is, bij voorbeeld, gegeven $c=24$, $b=20$ en $a=14$, dan is $s=29$, $2c-s=19$, $2a-s=-1$, $\sqrt{(s^2-2ac)}=13$; dus $x=21$ en $y=8$, of $x=8$ en $y=21$; de eerstgenoemde waarden van x en y wijzen nu eene verdeeling des driehoeks aan, die in alles aan het voorstel beantwoordt.

Is $c=24$, $b=19$ en $a=15$, dan is $s=29$, $2c-s=19$, $2a-s=1$, $\sqrt{(s^2-2ac)}=11$; dus $x=20$ en $y=9$, of $x=9$ en $y=20$, van welke waarden voor x en y weder de eerstgenoemde voldoen.

Stellen wij eindelijk *ten derde*, dat men beide de punten D en E op de langste zijden des driehoeks begeerde te hebben, en dat alzoo gegeven ware

$$c>a,\ a>b \quad \text{en} \quad a+b>c,$$

dan zou b te klein kunnen wezen, om aan de voorwaarde (A) te voldoen; indien dan echter de gegevens slechts zoodanig waren, dat men had

$$b>-(a+c)+\sqrt{8ac},$$

zou de voorwaarde (A) vervuld wezen.

Wat de voorwaarden (B) betreft, zou men in dit geval hebben:

$b<c$, $b<a$,
$b+c<2c$, $b+a<2a$,
$2s-a<2c$, $2s-c<2a$,
$4cs-2ac<4c^2$, $4as-2ac<4a^2$,
$s^2+4cs-2ac<s^2+4c^2$, $s^2+4as-2ac<s^2+4a^2$,
$s^2-2ac<(2c-s)^2$; $s^2-2ac<(2a-s)^2$;

als nu zijn $2c-s$ en $2a-s$ beide positief, waarvan men zich overtuigen kan door de som van $c>a$, $c>b$ en $2c>c$, alsmede de som van $a>c-b$, $2a>2b$ en $a=a$ te nemen; derhalve volgt uit de laatste ongelijkheden

$$\surd(s^2-2ac)<2c-s \quad \text{en} \quad \surd(s^2-2ac)<2a-s,$$

waaruit afgeleid wordt

$$\tfrac{1}{2}\{s+\surd(s^2-2ac)\}<c \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}\{s+\surd(s^2-2ac)\}<a,$$

zijnde dan zoo veel te meer

$$\tfrac{1}{2}\{s-\surd(s^2-2ac)\}<c \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}\{s-\surd(s^2-2ac)\}<a.$$

Neemt men nu naar welgevallen $x=\frac{1}{2}\{s+\surd(s^2-2ac)\}$ en $y=\frac{1}{2}\{s-\surd(s^2-2ac)\}$, of $x=\frac{1}{2}\{s-\surd(s^2-2ac)\}$ en $y=\frac{1}{2}\{s+\surd(s^2-2ac)\}$, dan is toch altijd

$$x<c \quad \text{en} \quad y<a,$$

zoodat voor de beide waarden van x en y de voorwaarden (B) vervuld zijn. In dit geval is dus de verdeeling des driehoeks of in het geheel niet, of op twee verschillende wijzen, zoo als in Fig. 19, mogelijk, naar gelang de kleinste zijde b, kleiner of grooter dan $-(a+c)+\surd 8ac$ is.

Is, bij voorbeeld, $c=24$, $a=20$ en $b=18$, dan is $s=31$, $2c-s=17$, $2a-s=9$, $\surd(s^2-2ac)=1$; dus $x=16$ en $y=15$, of $x=15$ en $y=16$, welke beide waarden van x en y verdeelingen doen kennen, die aan de vraag volkomen voldoen.

De verkregene formulen wijzen eenen gemakkelijken weg aan, om, zoo de driehoek ABC gegeven is, de deellijn DE door constructie te verkrijgen. Men beschrijve namelijk (Fig. 20), uit A als middelpunt met $AB=c$ als straal, eenen halven cirkel BGH, make $BF=BC=a$, stelle FG loodregt op AB en trekke BG en GH; beschrijve, uit B als middelpunt met $BI=\frac{1}{2}(a+b+c)=s$ als straal, een cirkelboogje, dat GH ergens in I snijdt en make $IK=IK'=IG$; deele BK in L, alsmede BK' in L' midden door; neme $BD=BL$ en $BE=BL'$ en trekke eindelijk DE, dan zal dit de begeerde deellijn wezen. Uit de constructe volgt namelijk:

$$BG=\surd(BH\times BF)=\surd 2ac,$$
$$IK=IK'=IG=\surd(BI^2-BG^2)=\surd(s^2-2ac),$$
$$BK=BI+IK=s+\surd(s^2-2ac),$$
$$BK'=BI-IK'=s-\surd(s^2-2ae),$$

$$BD = BL = \tfrac{1}{2}BK = \tfrac{1}{2}\{s + \sqrt{(s^2 - 2ac)}\}$$

en $$BE = BL' = \tfrac{1}{2}BK' = \tfrac{1}{2}\{s - \sqrt{(s^2 - 2ac)}\};$$

derhalve hebben de lijnen BD en BE de waarden verkregen, die door de berekening voor dezelve gevonden zijn, en alzoo verdeelt de lijn DE den driehoek op de in het voorstel opgegevene wijze.

LII. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

Wanneer men zich alle mogelijke parabolen voorstelt, die denzelfden as en hetzelfde toppunt hebben, en uit eenig punt van den gemeenschappelijken as normalen op die parabolen trekt, verlangt men de meetkunstige plaats te vinden van de punten, waarin die normalen de overeenkomstige parabolen ontmoeten?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, W. J. C. HAMMELMAN ELSEVIER, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat O (Fig. 21) de gemeenschappelijke top, en OX de gemeenschappelijke as der bedoelde parabolen zijn, en nemen wij OX en OY tot onderling regthoekige coördinaten-assen aan, dan is $y^2 = px$ de vergelijking van alle deze parabolen, in welke vergelijking nu p geene standvastige, maar eene veranderlijke grootheid is, die van 0 tot ∞ alle mogelijke waarden kan hebben.

Zij verder A het punt in den gemeenschappelijken as, waaruit de normalen getrokken worden, ter bepaling van welk punt gegeven is OA $= 2a$; en laat OM eene der bedoelde parabolen zijn, op welke de normaal AM is getrokken, dan is M een der punten, waarvan de meetkunstige plaats moet worden bepaald.

Stellen wij nu OP $= x$ en PM $= y$, dan kunnen wij den parameter van de parabool OM in x en a uitdrukken, door op te merken, dat die parameter, volgens eene bekende eigenschap der parabool, het dubbel van de subnormaal is, die tot een willekeurig punt van de parabool behoort, en alzoo door $2AP = 2(OA - OP) = 2(2a - x)$ wordt uitgedrukt. De coördinaten x en y van het punt M moeten dus aan de vergelijking $y^2 = px$ voldoen, indien

$p = 2(2a - x)$ genomen wordt; hieruit volgt voor de vergelijking der gevraagde meetkunstige plaats

$$y^2 = 2(2a - x)x \quad \text{of} \quad y^2 = 4ax - 2x^2.$$

Schrijven wij deze vergelijking in de gedaante

$$y^2 = \frac{(a\sqrt{2})^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

dan zien wij terstònd, dat de gevraagde meetkunstige plaats eene ellips is, waarvan $2a$ en $2a\sqrt{2}$ de assen zijn, terwijl de as $2a$ langs OX ligt en den top in O heeft. Omdat $2a < 2a\sqrt{2}$ is, is alzoo OA de kleine as der genoemde ellips; en door C, het midden van OA, BD trekkende, zoodat $BC = CD = a\sqrt{2}$ is, zal BD haar groote as wezen.

LIII. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Wanneer men in eene ellips of hyperbool eene middellijn, en uit derzelver uiteinde lijnen door de brandpunten trekt, dan zullen van deze lijnen, door de middellijn, die aan de eerste wordt toegevoegd, stukken worden afgesneden, die gelijk zijn aan de halve eerste as. Men vraagt het bewijs hiervan?

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. van Lankeren Matthes *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Laat (Fig. 22 en 23) AB de eerste, CD de tweede as, O het middelpunt, E en F de brandpunten eener ellips of hyperbool zijn; trekt men nu in deze figuren eene willekeurige middellijn GH, uit derzelver uiteinde G de lijnen GE en GF door de brandpunten en voorts de middellijn IK, die de toegevoegde van GH is, dan moet men bewijzen, dat de stukken GL en GM, die door IK van GE en GF worden afgesneden, ieder gelijk aan de helft van AB zijn.

Hiertoe trekke men door het punt G de raaklijn XY, dan is, volgens bekende eigenschappen der kegelsneden, XY evenwijdig met IK, alsmede

hoek LGX = *hoek* MGY.

Daar nu uit de evenwijdigheid van XY met IK volgt:

hoek LGX = *hoek* GLM en *hoek* MGY = *hoek* GML,

zoo is ook *hoek* GLM = *hoek* GML

en alzoo GM = GL.

Voorts is, in de driehoeken EOL en FOM,

$$EL = \frac{Sin.\ EOL}{Sin.\ ELO} \times EO \quad en \quad FM = \frac{Sin.\ FOM}{Sin.\ OMF} \times FO,$$

maar $EO = FO$, $Sin.\ EOL = Sin.\ FOM$, $Sin.\ ELO = Sin.\ OLG = Sin.\ OMF$ zijnde, zoo volgt hieruit

$$EL = FM,$$

dus ook $EG = GL + EL = GL + FM$,

of, door hier FG bij te tellen en af te trekken,

$$EG + FG = GL + FM + FG$$

en $EG - FG = GL + FM - FG$.

Nu is, in de ellips: $EG + FG = AB$ en $FM + FG = GM$; in de hyperbool: $EG - FG = AB$ en $FM - FG = GM$; en dus in beide gevallen, volgens de vorige vergelijkingen,

$$AB = GL + GM,$$

waaruit, ten gevolge der bewezene gelijkheid van GL en GM, terstond volgt $GL = GM = \frac{1}{2} AB$.

Hierdoor is alzoo de opgegevene stelling bewezen.

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Dewijl, uit het punt G, naar de lijn IK, slechts twee lijnen GL en GM kunnen worden getrokken, die ieder in het bijzonder gelijk zijn aan de halve eerste as, zoo volgt uit de bewezene stelling omgekeerd: dat zoo men, uit het uiteinde G eener middellijn GH, lijnen GL en GM naar de toegevoegde middellijn trekt, die gelijk zijn aan de halve eerste as, deze lijnen of derzelver verlengden noodwendig door de brandpunten moeten gaan.

LIV. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Wanneer men in eene ellips of hyperbool eene middellijn en de daaraan toegevoegde middellijn trekt, op de tweede as als middellijn eenen cirkel beschrijft, uit het uiteinde der toegevoegde middellijn raaklijnen aan dien cirkel, en uit het uiteinde der eerste middellijn lijnen evenwijdig aan die raaklijnen trekt, dan zullen de laatstgetrokkene lijnen door de brandpunten gaan. Men vraagt het bewijs hiervan?

Opgelost *door* J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. van Lankeren Matthes *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat in dezelfde figuren, die in het voorgaande voorstel

gebruikt zijn, (Fig. 22 en 23), GH eene willekeurige middellijn en IK hare toegevoegde wezen; beschrijven wij nu, op de tweede as CD als middellijn, eenen cirkel, trekken wij, uit het uiteinde K der toegevoegde middellijn IK, aan dien cirkel de raaklijnen KN en KN′, alsmede, uit het uiteinde G der eerste middellijn GH, lijnen GL en GM evenwijdig aan KN en KN′, dan moeten wij bewijzen, dat deze lijnen GL en GM door de brandpunten gaan.

Hiertoe trekken wij de stralen ON en ON′, alsmede uit G een loodlijn GP op IK, dan zijn de driehoeken KNO en LPG gelijkvormig, want, behalve dat zij beide regthoekig zijn, is, wegens de evenwijdigheid van GL met KN, *hoek* NKO = *hoek* PLG; op dezelfde wijze volgt, uit de evenwijdigheid van GM met KN′, dat de driehoeken KN′O en PMG gelijkvormig zijn. Wij hebben derhalve de evenredigheden

$$ON : OK = PG : GL \quad \text{en} \quad ON' : OK = PG : GM,$$

waaruit volgt

$$GL = \frac{OK \times PG}{ON} \quad \text{en} \quad GM = \frac{OK \times PG}{ON'}.$$

Nu is klaarblijkelijk OK × PG de inhoud van het parallelogram, onder de halve toegevoegde middellijnen OK en OG; maar het is eene bekende eigenschap der ellips en hyperbool, dat de inhoud van dit parallelogram gelijk is aan den inhoud van den regthoek onder de halve assen, derhalve is OK × PG = OA × OC. De bovenstaande waarden van GL en GM veranderen hierdoor in

$$GL = \frac{OA \times OC}{ON} \quad \text{en} \quad GM = \frac{OA \times OC}{ON'}$$

of, omdat OC = ON = ON′ is, in

$$GL = OA \quad \text{en} \quad GM = OA.$$

De lijnen GL en GM zijn dus ieder in het bijzonder gelijk aan de halve eerste as, en gaan derhalve, volgens de aanmerking op het voorgaande voorstel, door de brandpunten, zoodat nu de stelling bewezen is.

LV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De waarden van x te vinden, die

$$y = \tfrac{1}{6} x^6 + \tfrac{2}{5} x^5 - \tfrac{25}{4} x^4 - \tfrac{20}{3} x^3 + 60x^2$$

tot een maximum of minimum maken?

Opgelost door D. W. Hinse, C. J. Bolten, G. Koster, P. J. L. Quant, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer en L. van de Kasteele.

Oplossing van D. W. Hinse.

Wanneer wij de opgegevene vergelijking differentieeren, vinden wij voor de beide eerste differentiaal-quotienten:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^5 + 2x^4 - 25x^3 - 26x^2 + 120x$$

en $$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 5x^4 + 8x^3 - 75x^2 - 52x + 120.$$

Door het eerste differentiaal-quotient gelijk nul te stellen, verkrijgen wij

$$x^5 + 2x^4 - 25x^3 - 26x^2 + 120\,x = 0$$

of, het voorste lid dezer vergelijking op de gewone wijze in factoren ontbindende,

$$x\,(x - 2)\,(x - 4)\,(x + 3)\,(x + 5) = 0,$$

waaruit blijkt, dat $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$ wordt, indien men neemt,

$x = 0$, $x = +2$, $x = +4$, $x = -3$ en $x = -5$; voor deze waarden van x vindt men, door substitutie in het tweede differentiaal-quotient,

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 120, \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -140, \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 504, \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -210 \text{ en } \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 630;$$

zoodat, voor $x = 0$, $x = 4$ en $x = -5$, y een minimum, en voor $x = 2$ en $x = -3$, y een maximum wordt. Men vindt, voor de waarden van y, die met de bovenstaande waarden van x overeenstemmen,

$$y = 0,\ y = 94\tfrac{2}{15},\ y = -102\tfrac{2}{5},\ y = 292\tfrac{1}{20} \text{ en } y = 31\tfrac{1}{4},$$

zijnde de eerste, derde en vijfde dezer waarden minima, terwijl de tweede en vierde maxima zijn.

LVI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Het getal 100 *in vijf positieve geheele getallen te verdeelen, die met gelijke verschillen opklimmen en waarvan het eerste een volkomen vierkant is?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, S. T. Boas, C. J. Boltem, D. W. Hinse, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, Mr G. Snoek en J. S. Speijer.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij de deelen voor door

x^2, $x^2 + y$, $x^2 + 2y$, $x^2 + 3y$ en $x^2 + 4y$,

waarin x en y geheele positive getallen beteekenen, dan klimmen deze deelen met gelijke verschillen op, terwijl het eerste deel een vierkant is, de som dezer deelen is dan $5x^2 + 10y$.

Daar de som der deelen het geheel moet opleveren, hebben wij de vergelijking

$$5x^2 + 10y = 100$$

of $$x^2 + 2y = 20,$$

waaruit volgt $$y = 10 - \tfrac{1}{2} x^2.$$

Omdat nu y een geheel positief getal verbeeldt, moet x vooreerst een even getal zijn, en ten tweede moet $\tfrac{1}{2} x^2 < 10$ of $x^2 < 20$ wezen. Maar de eenige evene vierkanten kleiner dan 20 zijn 4 en 16, dus kan alleen $x^2 = 4$ of $x^2 = 16$ zijn.

Neemt men $x^2 = 4$, dan is $y = 10 - \tfrac{1}{2} x^2 = 8$, en dan zijn de deelen

4, 12, 20, 28 en 36;

neemt men $x^2 = 16$, dan is $y = 10 - \tfrac{1}{2} x^2 = 2$, en dan heeft men voor de deelen

16, 18, 20, 22 en 24.

Het getal 100 kan dus, op de beide bovenstaande wijzen, verdeeld worden in deelen, die aan de opgegevene voorwaarden voldoen.

LVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Op eene gegevene lijn AB *is een driehoek* ABC *beschreven, zoodanig, dat de hoek* B *het dubbel van den hoek* A *is; men vraagt naar de meetkunstige plaats van den top* C *dezes driehoeks?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, D. W. HINSE *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat ABC (Fig. 13) de driehoek zijn, op de gegevene lijn AB zoodanig beschreven, dat de hoek B het dubbel van den hoek A is, dan verkeert de top C van dezen driehoek volkomen in dezelfde omstandigheden als het punt C, welks

meetkunstige plaats in het XXXI Voorstel is bepaald geworden. De gevraagde meetkunstige plaats is dus geene andere, dan de hyperbool in Fig. 13 voorgesteld.

LVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer al de voerstralen eener parabool in de uiterste en middelste reden verdeeld worden, verlangt men de meetkunstige plaats der deelpunten te vinden?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Wanneer men, uit een willekeurig punt in eenige figuur aangenomen, naar al de punten van den omtrek dier figuur lijnen trekt en deze lijnen alle in dezelfde reden verdeelt, dan zullen de deelpunten gelegen zijn in den omtrek eener figuur, die aan de eerste gelijkvormig is. (Zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* § 319. Derde Druk.) Daar nu de voerstralen eener parabool, indien men het brandpunt voor dat willekeurig aangenomen punt neemt, zich in den toestand der zoo evengenoemde lijnen bevinden, en ook de deelpunten, die ontstaan door de voerstralen alle in de uiterste en middelste reden te verdeelen, in denzelfden toestand zijn als de deelpunten, waarvan zoo even in het algemeen gesproken is, moeten de hier bedoelde deelpunten in den omtrek liggen van eene figuur, die met de gegevene parabool gelijkvormig is. Daar verder eene figuur, die gelijkvormig aan eene parabool is, niets anders dan eene dergelijke parabool kan wezen, zoo is de gevraagde meetkunstige plaats de omtrek eener parabool, die, blijkens de eigenschappen der gelijkvormige figuren, hetzelfde brandpunt als de gegevene heeft, en waarvan de parameter het grootste of kleinste deel van den in de uiterste en middelste reden verdeelden parameter der gegevene is, naar gelang men, bij de verdeeling der voerstralen, de grootste of kleinste deelen, aan de zijde des brandpunts geplaatst heeft.

LIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de oneindig voortloopende reeks

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5} - enz.$$

te sommeren?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. W. HINSE, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien wij stellen

$$y = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{4}{5}x^5 - enz. \quad . \; . \; . \; (1),$$

dan komt het vinden van de som der opgegevene reeks neder op het vinden der waarde van y, voor $x = 1$.

Differentiëren wij de vergelijking (1), dan komt er

$$\partial y = (1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - enz.)\,\partial x$$

of $$\partial y = \partial x - x\partial x\,(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + enz.);$$

omdat $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + enz.$ de ontwikkeling is van het gebroken $\frac{1}{(1+x)^2}$, kunnen wij voor de laatste vergelijking ook schrijven

$$\partial y = \partial x - \frac{x\partial x}{(1+x)^2};$$

verdeelen wij het gebroken $\frac{x}{(1+x)^2}$ op de gewone wijze in twee andere breuken, dan vinden wij

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2};$$

hierdoor wordt

$$\partial y = \partial x - \frac{\partial x}{1+x} + \frac{\partial x}{(1+x)^2}.$$

Als nu wederom integrerende, verkrijgen wij

$$y = x - Nep.\ Log.\ (1 + x) - \frac{1}{1+x} + C,$$

waarin, omdat blijkens (1) voor $x = 0$ ook $y = 0$ moet zijn, $C = 1$ moet genomen worden; derhalve is

$$y = 1 + x - \frac{1}{1+x} - Nep.\ Log.\ (1 + x) \;.\;.\; (2)$$

of $$y = \frac{(2+x)x}{1+x} - Nep.\ Log.\ (1 + x).$$

De uitdrukkingen (1) en (2) stellen nu dezelfde functie

van x in twee verschillende gedaanten voor, waarvan men zich nader overtuigen kan, door in (2) de termen $\frac{1}{1+x}$ en *Nep. Log.* $(1+x)$ te ontwikkelen, als wanneer men op (1) zal terugkomen. Wij hebben alzoo

$$\tfrac{1}{1}x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{3}{4}x^4+\tfrac{4}{5}x^5-enz.=1+x-\frac{1}{1+x}-Nep.Log.(1+x)..(3),$$

en, hierin $x=1$ nemende, komt er

$$\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{4}{5}-enz.=\tfrac{3}{2}-Nep.\ Log.\ 2,$$

waardoor de opgegevene reeks gesommeerd is.

Door in de vergelijking (3) aan x andere waarden te geven, zal de som van nog meer andere reeksen kunnen gevonden worden; alleen voor negatieve waarden van x grooter dan de eenheid, is die vergelijking niet bruikbaar. Het is echter klaar, dat voor zulke waarden van x de som der reeks altijd oneindig groot zal wezen.

LX. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Op eene gegevene lijn als hypothenusa, eenen regthoekigen driehoek te beschrijven, zoodat de som van de kleinste regthoekszijde en van de loodlijn, die uit den regten hoek op de hypothenusa valt, zoo veel mogelijk de langste regthoekszijde overtreffe?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat ABC (Fig. 24) een regthoekige driehoek zijn, in welken uit den regten hoek C eene loodlijn CD op de hypothenusa is nedergelaten; zij AC de langste regthoekszijde en stellen wij $AC - BC = x$, alsmede $AB = a$, dan is

$$AC^2 + BC^2 = a^2 \quad \text{en} \quad (AC - BC)^2 = x^2,$$

van welke vergelijkingen het verschil is

$$2AC \times BC = a^2 - x^2.$$

Daar zoowel $AC \times BC$ als $AB \times CD$ den dubbelen inhoud des driehoeks uitdrukt, is

$$AC \times BC = AB \times CD = a \times CD;$$

de vroeger verkregene vergelijking verandert hierdoor in

$$2a \times CD = a^2 - x^2,$$

waaruit volgt $$CD = \frac{a^2 - x^2}{2a}.$$

Zal nu de som van de kleinste regthoekszijde en de loodlijn zoo veel mogelijk de langste regthoekszijde overtreffen, dan moet BC + CD − AC zoo groot mogelijk en daarin tevens AC > BC wezen.

Stellen wij deze uitdrukking door y voor, dan is

$$y = BC + CD - AC = CD - (AC - BC) = \frac{a^2 - x^2}{2a} - x$$

of

$$y = \frac{a^2 - x^2 - 2ax}{2a} \; \ldots\ldots\ldots \; (1),$$

en wij zullen dan moeten bepalen, voor welke positieve waarde van x, y zoo groot mogelijk wordt. Het blijkt uit de formule (1) terstond, dat, zoo lang x positief is, y grooter zal zijn, naar gelang x kleiner is, en dat alzoo $x = 0$ de grens zal wezen, welke x zoo na mogelijk moet bereiken, om y zoo groot mogelijk te maken. Derhalve zal de driehoek, die aan de voorwaarden des voorstels beantwoordt, regthoekszijden moeten hebben, die oneindig weinig van elkander verschillen; maar die altijd een oneindig klein verschil moeten hebben, opdat het kenmerkend onderscheid tusschen de langste en kortste regthoekszijde niet verloren ga.

Aanmerking. Het is opmerkelijk, dat, voor $x = 0$, y geen maximum wordt, in die beteekenis, waarin het woord maximum gewoonlijk verstaan wordt. Differentiëert men dan ook de vergelijking (1), waardoor men bekomt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a + x}{a} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{a},$$

en stelt men $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan zal men vinden $x = -a$;

daar verder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negatief is, zal voor $x = -a$, maar ook voor geene andere waarde van x, y een maximum zijn, zoodat de grootst mogelijke waarde, die y voor eene positieve waarde van x hebben kan, niet gevonden wordt door de uitdrukking (1) tot een maximum te maken.

Men ziet dus hier weder een voorbeeld, dat eene grootheid in haren grootst mogelijken toestand, en die grootheid in den toestand eens maximums, twee zeer verschillende zaken kunnen wezen.

Neemt men, in plaats van het verschil der regthoekszijden, eene andere veranderlijke grootheid aan, waarvan men y als eene functie beschouwt, dan komt men al ligt tot een dergelijk verschijnsel. Stelt men, bij voorbeeld, $BC = x$, dan vindt men gemakkelijk $AC = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $CD = \frac{x}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, en bijgevolg

$$y = x + \frac{x}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} - \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

alsmede $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 + ax - 2x^2 + a\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; voor het geval, dat de beide regthoekszijden aan elkander gelijk zijn, is nu $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, dus $\frac{\delta y}{\delta x} = 2$ en bijgevolg y geen maximum.

Stelt men den afstand, van het midden M der hypothenusa tot aan het voetpunt D der loodlijn, $MD = x$, dan vindt men $CD = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$, $AC = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 + ax)}$, $BC = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - ax)}$,

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - ax)} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 + ax)}$$

en $\frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{a}{\sqrt{(2a^2 - 4ax)}} - \frac{2x}{\sqrt{(a^2 - 4x^2)}} - \frac{a}{\sqrt{(2a^2 + 4ax)}}$; voor het geval, dat de beide regthoekszijden aan elkander gelijk genomen worden, is nu $x = 0$, dus $\frac{\delta y}{\delta x} = -\sqrt{2}$ en bijgevolg y wederom geen maximum.

Nam men echter den vierkantswortel uit het verschil der regthoekszijden tot oorspronkelijke veranderlijke grootheid aan, waardoor men als van zelve het negatief zijn van dat verschil onmogelijk maakt, dat is, stelde men $AC - BC = x^2$, dan zou men vinden

$$y = \frac{a^2 - x^4 - 2ax^2}{2a},$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{2x(x^2 + a)}{a},$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = - \frac{2(3x^2 + a)}{a},$$

en dan zou, voor $x = 0$, $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -2$ en bij gevolg y een maximum wezen.

LXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt een n-hoekig getal te vinden, dat tevens eene volkomene derde magt is, zoodanig, dat deszelfs n-hoekige wortel gelijk is aan deszelfs derdemagtswortel?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, B. LUBBERS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS *en* G. KOSTER.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Daar in het algemeen een n-hoekig getal, x tot wortel hebbende, door

$$\frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2}$$

uitgedrukt wordt, zoo zullen wij volgens het voorstel moeten hebben

$$\frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2}=x^3;$$

of door x deelende, hetgeen daar $x=0$ niet in den bedoelden zin aan het voorstel zou beantwoorden veilig geschieden mag,

$$\frac{(n-2)x-(n-4)}{2}=x^2,$$

dat is: $$x^2-\frac{n-2}{2}x=-\frac{n-4}{2},$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x=\frac{n-2}{4}\pm\sqrt{\left\{\frac{(n-2)^2}{16}-\frac{n-4}{2}\right\}},$$

en na behoorlijke herleiding,

$$x=\frac{n-4}{2} \text{ of } x=1.$$

Wij zien, uit de laatste waarde van x, dat alle veelhoekige getallen, die de eenheid tot wortel hebben, aan het voorstel voldoen. Door in de eerste waarde van x aan n alle mogelijke waarden te geven, zal men, voor alle soorten van veelhoekige getallen, den wortel van een ander veelhoekig getal vinden, dat nevens de eenheid aan het voorstel beantwoordt; alleen voor $n=4$ of $n=6$ vindt men, met verwerping van $x=0$, niet anders dan $x=1$, zoodat onder de vier- en zes-hoekige getallen slechts de

eenheid voldoen kan; terwijl, naar gelang men n even of oneven neemt, het veelhoekig getal, dat men nevens de eenheid verkrijgt, al of niet een geheel getal zal wezen.

Voor $n = 10$, bij voorbeeld, is $x = \frac{n-4}{2} = 3$, dus $x^3 = 27$; onder de tienhoekige getallen voldoet dus, behalve de eenheid, ook het getal 27 aan het voorstel.

LXII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men heeft twee getallen, elk van twee cijfers; de som der cijfers van het eene getal is gelijk aan de som der cijfers van het andere; de som van de cijfers der tientallen is tweemaal zoo groot als de som van de cijfers der eenheden; en wanneer men het verschil der getallen in elk van dezelve deelt, staan de quotienten tot elkander als 3 tot 4. Welke zijn deze getallen?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, D. W. HINSE, L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, B. LUBBERS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, J. SJOENIS *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat de getallen voorgesteld worden door $10p + q$ en $10r + s$, dan volgt, uit de beide eerste der opgegevene voorwaarden,

$$p + q = r + s$$

en

$$p + r = 2(q + s);$$

uit de laatste voorwaarde volgt verder, dat de getallen zelven tot elkander moeten staan als 3 tot 4, zoodat men ook heeft

$$10p + q : 10r + s = 3 : 4.$$

Door de beide eerste vergelijkingen bij elkander op te tellen en van elkander af te trekken, zal men vinden

$$2p = q + 3s \quad \text{en} \quad 2r = 3q + s;$$

en, deze waarden in de bovenstaande evenredigheid overbrengende, komt er

$$6q + 15s : 15q + 6s = 3 : 4$$

of

$$2q + 5s : 5q + 2s = 3 : 4.$$

Hieruit volgt

$$8q + 20s = 15q + 6s,$$

derhalve is $14s = 7q$
en $q = 2s$;
door verder deze waarde voor q in de bovenstaande waarden voor $2p$ en $2r$ te substitueren, verkrijgt men $p = \frac{5s}{2}$ $r = \frac{7s}{2}$, zoodat al de overige onbekenden, in s uitgedrukt, zijn

$$p = \frac{5s}{2}, q = 2s \text{ en } r = \frac{7s}{2}.$$

Daar nu al de onbekenden geheele getallen kleiner dan 10 voorstellen, zal s niet anders dan 2 kunnen zijn; men heeft alzoo

$$p = 5, q = 4, r = 7 \text{ en } s = 2,$$

weshalve de gevraagde getallen zijn: 54 en 72.

LXIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert eene harmonische en eene rekenkunstige reeks, elk van drie termen, te vinden, die de volgende eigenschappen hebben: het product van de twee eerste termen der harmonische reeks is gelijk aan den derden term van diezelfde reeks; en wanneer men den kleinsten term van de eene reeks bij den kleinsten term van de andere reeks, even zoo den middelsten bij den middelsten en den grootsten bij den grootsten optelt, zijn de drie komende sommen drie geheele en op elkander volgende vierkante getallen?

Opgelost *door* J. C. Olivier; C. J. Bolten, D. W. Hinse, F. C. Radijs, M. G. Snoer, J. S. Speijer, S. T. Boas, Mr. G. W. de Bruijn Kops, G. Koster, B. Lubbers, J. Sjoenis *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* J. C. Olivier.

Laat de harmonische reeks voorgesteld worden door:

$$x, y \text{ en } \frac{xy}{2x - y},$$

dan moet men hebben

$$xy = \frac{xy}{2x - y},$$

waaruit, omdat x en y uit den aard der zaak geen van beide nul kunnen zijn, alleen volgt

$$2x - y = 1$$

of $$y = 2x - 1;$$

door overbrenging dezer waarde voor y, wordt nu de harmonische reeks

$$x,\ 2x - 1 \text{ en } 2x^2 - x.$$

Laat de op elkander volgende vierkanten voorgesteld worden door:

$$r^2,\ (r+1)^2 \text{ en } (r+2)^2,$$

dan wordt de rekenkunstige reeks verkregen, door van deze vierkanten de termen der harmonische reeks af te trekken; de rekenkunstige reeks moet dus zijn

$$r^2 - x,\ (r+1)^2 - (2x-1) \text{ en } (r+2)^2 - (2x^2-x);$$

de eenige voorwaarde, waaraan nog voldaan moet worden is alzoo

$$\{(r+1)^2-(2x-1)\}-\{(r^2-x)\}=$$
$$=\{(r+2)^2-(2x^2-x)\}-\{(r+1)^2-(2x-1)\}$$

of $$2r + 2 - x = 2r + 2 - 2x^2 + 3x,$$

uit welke vergelijking men vindt, dat r onbepaald blijft en dat $x = 2$ is.

Daar $x = 2$ is, heeft men voor de harmonische reeks de getallen 2, 3 en 6; en daar r onbepaald is, kan men drie op elkander volgende vierkanten naar welgevallen nemen en daarvan de overeenkomstige termen der harmonische reeks aftrekken, om de rekenkunstige reeks te bekomen. Vermindert men, bij voorbeeld, term voor term

de op elkander volgende vierkanten . .	225, 256 en 289
met de harmonische reeks	2, 3 en 6
dan vindt men de rekenkunstige reeks .	223, 253 en 283.

LXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Het jaartal mijner geboorte wordt met vier cijfers geschreven, waarvan de beide middelste aan elkander gelijk zijn. Dit getal is het kleinste, dat met die vier cijfers geschreven kan worden; zoo men hetzelve aftrekt van het grootste getal, dat men met die vier cijfers schrijven kan en de rest door 9 deelt, komt er tot quotient een getal van drie cijfers, die onderling gelijk en gelijk aan de middelste cijfers van het jaartal zijn. In welk jaar ben ik geboren?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, M. G. Snoek, J. S. Speijer, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, D. W. Hinse, L. van de Kasteele, G. Koster, B. Lubbers, J. C. Olivier, F. C. Radijs, C. van Schaick en J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Wij stellen ons voor het begeerde getal van vier cijfers te vinden, zonder vooreerst op de omstandigheid te letten, dat dit getal het geboorte-jaar van den opgever des voorstels moet aanduiden.

Zij daartoe x het cijfer der duizendtallen, y dat der honderd- en tientallen, z dat der eenheden, dan is het begeerde getal

$$1000x + 110y + z;$$

zal dit getal werkelijk uit vier cijfers bestaan, dan kan het cijfer der duizendtallen geene nul zijn, wij moeten dus hebben

$$x > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

zal dit getal verder het kleinste zijn, dat met deze vier cijfers geschreven kan worden, dan mag geen volgend cijfer kleiner dan een voorgaand zijn, wij moeten dus ook hebben

$$y = \text{of} > x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en

$$z = \text{of} > y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wanneer men het kleinste getal heeft, dat met eenige cijfers geschreven kan worden, wordt het grootste getal, dat men met diezelfde cijfers schrijven kan, gevonden, door de cijfers van dat kleinste getal in eene omgekeerde volgorde te schrijven. Het hier bedoelde grootste getal is dus

$$1000z + 110y + x$$

en wij moeten alzoo, volgens het voorstel, ook nog hebben

$$\frac{(1000z+110y+x) - (1000x+110y+z)}{9} = 111y,$$

dat is:

$$\frac{999z - 999x}{9} = 111y$$

of

$$111z - 111x = 111y,$$

waaruit volgt

$$z - x = y$$

of

$$z = x + y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Behalve de reeds uitgedrukte voorwaarden, vordert het voorstel geene andere, dan alleen, dat x, y en z geheele getallen kleiner dan 10 moeten wezen; neemt men echter slechts

$$z < 10 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

dan volgt uit (2) en (3), dat ook x en y kleiner dan 10 zullen zijn; terwijl de voorwaarde (3) van zelve vervuld wordt, indien men aan (1) en (4) voldoet, en dus niet verder in het oog behoeft gehouden te worden.

Om het begeerde getal te vinden, hebben wij dus voor x, y en z slechts zulke geheele getallen te nemen, dat

$$x > 0,\ y = \text{of} > x,\ z = x + y \text{ en } z < 10$$

zij. Neemt men voor x een willekeurig getal, vervolgens voor y zulk een getal, dat aan de voorwaarde $y =$ of $> x$ voldoet, en daarna $z = x + y$, dan zou de laatste voorwaarde $z < 10$ welligt niet vervuld wezen; men merke dus op, dat uit $z < 10$ en $z = x + y$ volgt $x + y < 10$ of $y < 10 - x$, terwijl uit $y < 10 - x$ en $y =$ of $> x$ weder volgt $x < 5$; neemt men dus x willekeurig tusschen 0 en 5, vervolgens y zoodanig dat $y =$ of $> x$ en tevens $y < 10 - x$ zij, en daarna $z = x + y$, dan zal $z < 10$ wezen; al de voorwaarden zullen dan vervuld en bij gevolg $1000x + 110y + z$ een getal zijn, dat de opgegevene eigenschappen bezit.

Om al deze getallen te verkrijgen, kan men achtervolgens $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$ nemen; voorts kan men nemen:

$x = 1$ zijnde, $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ en 8;
$x = 2$ ——, $y = 2, 3, 4, 5, 6$ en 7,
$x = 3$ ——, $y = 3, 4, 5$ en 6;
$x = 4$ ——, $y = 4$ en 5;

waardoor men voor het begeerde getal 20 antwoorden bekomt, te weten

1112, 1223, 1334, 1445, 1556, 1667, 1778, 1889, 2224, 2335, 2446, 2557, 2668, 2779, 3336, 3447, 3558, 3669, 4448 en 4559.

Moet nu het begeerde getal voldoen aan de voorwaarde, dat het een jaartal der gewone jaartelling is, dan vervallen 1889 en al de grootere getallen; omdat die jaartallen eerst tot de toekomst zouden behooren; moet verder dat jaartal het geboortejaar van iemand, die in 1837 nog leeft, aanduiden, dan vervallen 1667 en alle kleinere getallen, omdat de menschelijke leeftijd, zelfs in de meest buitengewone gevallen, geen 170. jaren kan zijn. Derhalve blijft er

voor het gevraagde jaartal niet anders over dan 1778.

AANMERKING *van* M. G. SNOER. Dit voorstel is gemakkelijk zonder behulp der stelkunst op te lossen. Vooreerst is het duidelijk, dat het jaartal uit de vorige eeuw moet zijn; want de leeftijd, dien men iemand kan toeschrijven, gedoogt niet, dat het jaartal tot eene vroegere eeuw zou behooren, en daar de honderd- en tientallen gelijk moeten zijn, kan het jaartal ook niet tot de tegenwoordige eeuw behooren, omdat de tientallen der tegenwoordige eeuw nog beneden de 8 zijn. De drie eerste cijfers van het gevraagde jaartal zijn dus 177. Ten andere moet het gevraagde jaartal het kleinst mogelijke zijn, dat met de vier cijfers, waaruit het bestaat, geschreven kan worden; het cijfer der eenheden kan dus niet kleiner dan de andere cijfers zijn en moet bij gevolg 7, 8 of 9 wezen. Het jaartal moet dus 1777, 1778 of 1779 zijn. Elk dezer jaartallen aan de laatste voorwaarde des voorstels toetsende, vindt men dadelijk, dat alleen 1778 het gevraagde jaartal kan zijn.

XLV. VOORSTEL.

Door A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR.

Men verlangt eene rekenkunstige reeks te vinden, waarvan de som gelijk is aan tweemaal het vierkant van den tweeden term; terwijl de eerste term gelijk aan den vierkantswortel uit den derden, en het product der twee eerste termen gelijk aan den voorlaatsten term is?

OPGELOST *door* A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, D. W. HINSE, L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, F. C. RADIJS, S. SJOERNIS, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR.

Stelt men den eersten term der reeks door x, het verschil derzelve door y en het aantal termen door n voor, dan is de som van die reeks $\frac{1}{2}n(2x + (n - 1)y)$, de tweede term $x + y$, de derde $x + 2y$ en de voorlaatste term is $x + (n - 2)y$. Ter bepaling der drie onbekenden x, y en n, heeft men dus, volgens het voorstel, de vergelijkingen:

$$\tfrac{1}{2}n(2x + (n - 1)y) = 2(x + y)^2 \quad \ldots \quad (1),$$

$$x = \sqrt{(x + 2y)} \quad \ldots \quad (2)$$

en $$x(x+y) = x + (n-2)y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Trekt men het vierkant der tweede vergelijking van de derde af, zoo vindt men

$$xy = ny - 4y,$$

of door y deelende, hetgeen daar y niet gelijk nul kan wezen zonder bezwaar geschieden kan,

$$x = n - 4 \quad \text{of} \quad n = x + 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

voorts volgt uit (2) onmiddellijk

$$2y = x^2 - x \quad \text{of} \quad y = \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Brengt men nu de waarden van n en y, volgens (4) en (5), in (1) over, dan vindt men

$$\tfrac{1}{2}(x+4)\left\{2x+(x+3)\times\frac{x^2-x}{2}\right\} = 2(x+\tfrac{1}{2}(x^2-x))^2,$$

of wederom, daar x niet nul kan wezen, omdat voor $x=0$ volgens (5) ook $2y = 0$ zou worden, door x deelende,

$$\tfrac{1}{2}(x+4)(2+\tfrac{1}{2}(x+3)(x-1)) = 2x(1+\tfrac{1}{2}(x-1))^2,$$

welke vergelijking door achtervolgende herleiding overgaat in:

$$(x+4)(4+(x+3)(x-1)) = 2x(2+(x-1))^2,$$

$$(x+4)(x^2+2x+1) = 2x(x+1)^2,$$

$$2x(x+1)^2-(x+4)(x+1)^2 = 0,$$

of $$(x+1)^2(x-4) = 0,$$

waaraan alleen kan voldaan worden, door $x = -1$ of $x = 4$.

Neemt men $x = -1$, dan is volgens (5) $y = 1$ en volgens (4) $n = 3$, waardoor de reeks zou worden -1, 0 en 1.

Neemt men $x = 4$, dan is door (5) $y = 6$ en door (4) $n = 8$, zoodat alsdan voor de reeks gevonden wordt

4, 10, 16, 22, 28, 34, 40 en 46.

LXVI. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Men vraagt naar een derdemagtsgetal, zoodat, als men bij hetzelve en bij deszelfs wortel een zeker getal optelt, de eerste som een derdemagtsgetal en de andere deszelfs wortel is? (*)

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

(*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect*, N°. 270.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij het begeerde derdemagtsgetal en deszelfs wortel door x^3 en x, het bij te tellen getal door y en het derdemagtsgetal en deszelfs wortel, door de bijtelling ontstaande, door z^3 en z voor, dan moeten wij voldoen aan de vergelijkingen

$$x^3 + y = z^3$$

en

$$x + y = z,$$

en wel door rationale waarden voor x, y en z.

Het verschil dezer beide vergelijkingen geeft terstond

$$x^3 - x = z^3 - z$$

of

$$x^3 - z^3 = x - z;$$

deelen wij deze vergelijking door $x - z$, welke factor uit den aard der zaak niet gelijk nul wezen kan, dan komt er

$$x^2 + xz + z^2 = 1,$$

dat is:

$$x^2 - 1 = -(xz + z^2)$$

of

$$(x - 1)(x + 1) = -z(x + z).$$

Stellen wij nu

$$x - 1 = -nz$$

en dus

$$x + 1 = \frac{1}{n}(x + z),$$

dan volgt uit de eerste dezer stellingen

$$x = 1 - nz$$

en deze waarde in de tweede overbrengende, komt er

$$2 - nz = \frac{1}{n}(1 - nz + z);$$

waaruit gevonden wordt

$$z = \frac{2n - 1}{n^2 - n + 1}.$$

Hierdoor wordt verder

$$x = 1 - nz = \frac{-n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$$

en

$$y = z - x = \frac{n^2 + 2n - 2}{n^2 - n + 1}.$$

Neemt men nu voor n eene willekeurige rationale waarde, dan zullen x, y en z mede rationaal worden en aan de oorspronkelijke vergelijkingen voldoen. Wil men voor n zulk eene positieve waarde nemen, dat ook x en y beide positief zijn, dan zal

$$-n^2 + 1 > 0 \quad \text{en} \quad n^2 + 2n - 2 > 0$$
$$-n^2 > -1 \quad \text{en} \quad (n+1)^2 > 3$$
$$n^2 < 1 \quad \text{en} \quad n + 1 > \sqrt{3}$$
$$n < 1 \quad \text{en} \quad n > \sqrt{3} - 1$$

moeten wezen. Voor $n = \frac{8}{10}$ zal men verkrijgen $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{2}{7}$ en $z = \frac{5}{7}$, alsdan is $(\frac{3}{7})^3$ het gevraagde derdemagtsgetal en $\frac{2}{7}$ het getal, dat zoo hierbij als bij den wortel moet opgeteld worden; men heeft dan ook

$$(\tfrac{3}{7})^3 + \tfrac{2}{7} = (\tfrac{5}{7})^3 \quad \text{en} \quad \tfrac{3}{7} + \tfrac{2}{7} = \tfrac{5}{7}.$$

Voor $n = \frac{11}{13}$, vindt men $x = \frac{16}{49}$, $y = \frac{23}{49}$ en $z = \frac{39}{49}$; alsdan is het begeerde derdemagtsgetal $(\frac{16}{49})^3$ en het bij te tellen getal $\frac{23}{49}$, zoodat men heeft

$$(\tfrac{16}{49})^3 + \tfrac{23}{49} = (\tfrac{39}{49})^3 \quad \text{en} \quad \tfrac{16}{49} + \tfrac{23}{49} = \tfrac{39}{49}.$$

LXVII. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

Toen de zon in het begin van den Ram was, waar dezelve geene declinatie had, werd zij des morgens te 7ᵘ 36′ *eenige graden hoog boven den horizon bevonden; daarna te* 9ᵘ 36′ *bevond men haar* 24° 49′ *hooger boven den horizon. Welke is de poolshoogte van de plaats, waar deze waarneming geschiedde?* (*)

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, D. W. HINSE, G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Zij ZTPN (Fig. 25) de middagcirkel, T het toppunt en ZON de horizon van de plaats der waarneming; zij verder P de noordpool, EOE′ de equator en, omdat de zon geene declinatie had, tevens haar dagcirkel; laat eindelijk A en B de punten zijn, waar de zon zich bij de twee waarnemingen bevond, dan zijn de bogen EA en EB in tijd overgebragt, de tijden, die van de oogenblikken der waarnemingen nog tot den middag verloopen moeten; stellende dus $EA = a$ en $EB = b$, dan is $a = 4^u\ 24' = 66°$ en $b = 2^u\ 24' = 36°$. Brengen wij door A en B de verticale bogen TAH en TBI, dan zijn AH en BI de waargenomene hoogten; het gegeven verschil dezer waargenomene

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect*, No. 568.

hoogten c noemende, is BI — AH $= c = 24°.49'$, en stellen wij dus AH $= h$, dan is BI $= h + c$, AT $= 90° - h$ en BT $= 90° - (h + c)$. Stellen wij eindelijk de gevraagde poolshoogte PN $= \phi$, dan is ook ET $= \phi$.

Nu is in de bolvormige driehoeken AET en BET, die beide regthoekig zijn in E, omdat het vlak van den equator loodregt op dat van den middagcirkel staat,

$$Cos.\ ET = \frac{Cos.\ AT}{Cos.\ AE} \text{ en } Cos.\ ET = \frac{Cos.\ BT}{Cos.\ BE}$$

of $$Cos.\ \phi = \frac{Sin.\ h}{Cos\ a} \text{ en } Cos.\ \phi = \frac{Sin.\ (h+c)}{Cos.\ b} \quad . (1),$$

derhalve is ook

$$\frac{Sin.\ h}{Cos.\ a} = \frac{Sin.\ (h + c)}{Cos.\ b}$$

en na ontwikkeling

$$Sin.\ h\ Cos.\ b = Sin.\ h\ Cos.c\ Cos.\ a + Cos.\ h\ Sin.\ c\ Cos.\ a.$$

Omdat de eerste waarneming na 6 ure is gedaan, kon op dien dag h en dus ook $Sin.h$ niet gelijk nul zijn; deelen wij dan de laatste vergelijking door $Sin.h$, zoo komt er

$$Cos.b = Cos.a\ Cos.c + Cos.a\ Sin.c\ Cot.h,$$

waaruit volgt

$$Cot.\ h = \frac{Cos.b - Cos.aCos.c}{Cos.aSin.c} = \frac{Cos.b}{Cos.aSin.c} - Cot.c \ (2);$$

hierdoor h bekend wordende, zal men ϕ door eene der formulen (1) kunnen berekenen.

Om echter deze berekening gemakkelijker te maken, stelle men

$$\frac{Cos.b}{Cos.aSin.c} = Cot.d,$$

dan geeft (2) $$Cot.h = Cot.d - Cot.c = \frac{Sin.(c-d)}{Sin.cSin.d};$$

hierdoor heeft men nu het volgende stelsel van vergelijkingen: $a = 66°$, $b = 36°$, $c = 24°\ 49'$,

$$Cot.d = \frac{Cos.b}{Cos.aSin.c},$$

$$Cot.h = \frac{Sin.(c-d)}{Sin.cSin.d},$$

en $$Cos.\phi = \frac{Sin.h}{Cos.a} \text{ of } Cos.\phi = \frac{Sin.(h+c)}{Cos.b}.$$

De berekening komt dienvolgens op deze wijze te staan:

$$\begin{aligned}
Log.\ Cos.\ b &= 9{,}9079576 - 10\\
Ar.\ Comp.\ Log.\ Cos.\ a &= 0{,}3906867\\
Ar.\ Comp.\ Log.\ Sin.\ c &= 0{,}3770443
\end{aligned}$$

opget.

$$Log.\ Cot.\ d = 0{,}6756886.$$

$$\begin{aligned}
d &= 11°54'55'',5\\
c &= 24°49'
\end{aligned}$$

afget.

$$c - d = 12°54'4'',5.$$

$$\begin{aligned}
Log.\ Sin.(c-d) &= 9{,}3488331 - 10\\
Ar.\ Comp.\ Log.\ Sin.\ c &= 0{,}3770443\\
Ar.\ Comp.\ Log.\ Sin.\ d &= 0{,}6851484
\end{aligned}$$

opget.

$$Log.\ Cot.\ h = 0{,}4110258.$$

$$\begin{aligned}
h &= 21°12'45'',3\\
c &= 24°49'
\end{aligned}$$

opget.

$$h + c = 46°\ 1'45'',3.$$

$Log.\ Sin.h = 9{,}5585038 - 10$ — $Log.\ Sin.(h+c) = 9{,}8571481 - 10$

$Log.\ Cos.a = 9{,}6093133 - 10$ — $Log.\ Cos.b = 9{,}9079576 - 10$

afget. — afget.

$Log.\ Cos.\phi = 9{,}9491905 - 10.$ — $Log.\ Cos.\phi = 9{,}9491905 - 10.$

$$\phi = 27°10'41''.$$

Omdat echter bij elken cosinus een even groote negatieve als positieve boog behoort, zal ook ϕ negatief genomen kunnen worden, waaruit volgt, dat de gevondene poolshoogte zoowel die van de Zuid- als van de Noord-pool kan wezen; en dat dus de waarnemingen dezelfde zouden geweest zijn, onverschillig of de plaats der waarneming op 27° 10′ 41″ *Noorder-*, dan wel *Zuider-*breedte ligt.

AANMERKING *van* L. J. ULMAN. HALCKEN zegt (met verwaarloozing der secunden) 27° 10′; doch in zijne 567ste vraag, waarin dezelfde elementen na den middag voorkomen, vindt hij 27° 10½′, hetwelk met de boven gevondene waarde van ϕ slechts 11″ verschilt.

LXVIII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van zeker getal van drie cijfers is de som der cijfers gelijk aan tweemaal dat der honderdtallen; wanneer het getal bij deszelfs omgekeerde wordt opgeteld, komt er 1170; *en wanneer men het cijfer der eenheden met* 4 *vermindert en deze rest tot de tweede magt verheft, verkrijgt men het cijfer der honderdtallen. Welk is dit getal?*

OPGELOST *door* D. W. HINSE, J. S. SPEIJER, S. T. BOAS, S. DIK, CORNSZ, G. KOSTER, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, J. SJOENIS *en* M. G. SNOER.

I. OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Daar het cijfer der honderdtallen eene tweede magt moet zijn, zoo stellen wij het gevraagde getal door $100x^2 + 10y + z$ voor; deszelfs omgekeerde is dan $100z + 10y + x^2$, en nu geeft de eerste voorwaarde

$$x^2 + y + z = 2x^2$$

of

$$z = x^2 - y \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

terwijl de tweede voorwaarde geeft

$$(100x^2 + 10y + z) + (100z + 10y + x^2) = 1170$$

of

$$101x^2 + 20y + 101z = 1170 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Door (1) in (2) over te brengen, verkrijgen wij

$$202x^2 - 81y = 1170$$

of

$$81y = 202x^2 - 1170 \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

Nu kan x^2 geene andere waarden hebben dan 1, 4 of 9, vermits $x^2 < 10$ moet wezen; maar $x^2 = 1$ of $x^2 = 4$ zou, volgens (3), y negatief maken, derhalve is $x^2 = 9$, alsdan verkrijgen wij door (3) $y = 8$ en door (1) $z = 1$. Het gevraagde getal is alzoo 981.

Uit deze oplossing blijkt, dat van de laatste voorwaarde, niet meer behoefde gegeven te zijn, dan dat het cijfer der honderdtallen een vierkant is.

II. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Voor het begeerde getal stellende $100x + 10y + z$, is het omgekeerde $100z + 10y + x$, en dus volgens de tweede voorwaarde

$$101x + 20y + 101z = 1170,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{1170 - 101(x + z)}{20}.$$

Daar y een geheel getal moet zijn, blijkt uit deze formule, dat $x + z$ door 10 deelbaar moet wezen; daar verder x en z ieder op zich zelf kleiner dan 10 moeten wezen, moet ook $x + z < 20$ zijn; dus is noodzakelijk $x + z = 10$, waardoor volgens de bovenstaande formule $y = 8$ wordt.

Nu volgt uit de eerste voorwaarde $x + y + z = 2x$ of $y + z = x$; hierin voor y de reeds gevondene waarde stellende, vindt men

$$x - z = 8,$$

maar men heeft reeds $x + z = 10$,

zoodat hieruit onmiddellijk volgt $x = 9$ en $z = 1$.

Het begeerde getal is derhalve 981; en uit deze oplossing blijkt, dat de derde voorwaarde geheel ontbeerd kan worden.

LXIX. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Wanneer men, van zeker getal van drie cijfers, den derdemagtswortel uit het cijfer der tientallen met 5 vermindert en de rest tot de tweede magt verheft, verkrijgt men het cijfer der honderdtallen; en de cijfers der honderdtallen en eenheden zijn te zamen gelijk aan tweemaal het cijfer der tientallen. Welk is dit getal?

OPGELOST *door* D. W. HINSE, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, S. DIK, CORNSZ., G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RABIJS, C. VAN SCHAICK, J. SJOENIS, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Stellende het cijfer der tientallen voor door . . . x^3,
dan is, volgens de eerste voorwaarde, het cijfer der honderdtallen . . . . $(x-5)^2$,
terwijl dan, volgens de laatste voorwaarde, het cijfer der eenheden is . . . . $2x^3-(x-5)^2$.

Daar nu al deze uitdrukkingen geheele getallen, kleiner dan 10, moeten wezen, moet x een geheel getal en kan x niet anders dan 2 zijn; want $x > 2$ zou $x^3 > 10$ en $x < 2$ zou $(x-5)^2 > 10$ maken. Hierdoor wordt het gevraagde getal 987.

LXX. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

In elken driehoek is de som der vierkanten van de cosecanten der hoeken, verminderd met het vierkant van de

som hunner cotangenten, gelijk aan de eenheid. Men vraagt het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. W. HINSE, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. C. OLIVIER, J. S. SPEIJER, C. J. BOLTEN *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien de hoeken van eenen driehoek door a, b en c worden voorgesteld, is

$$a + b + c = 180°$$

of $$a + b = 180° - c;$$

derhalve is ook $$Cot.(a+b) = Cot.(180°-c)$$

of wel $$\frac{Cot.a\ Cot.b-1}{Cot.a + Cot.b} = - Cot.c;$$

hieruit volgt door verdrijving van den noemer, na verplaatsing der termen

$$Cot.a\ Cot.b + Cot.a\ Cot.c + Cot.b\ Cot.c = 1$$

en $$2Cot.a\ Cot.b + 2Cot.a\ Cot.c + 2Cot.b\ Cot.c = 2.$$

Deze laatste vergelijking kan men aldus schrijven:

$$(Cot.a + Cot.b + Cot.c)^2 - (Cot.^2a + Cot.^2b + Cot.^2c) = 2,$$

of, omdat in het algemeen $Cot.^2x = Cosec.^2x - 1$ is, ook aldus:

$$(Cot.a+Cot.b+Cot.c)^2-(Cosec.^2a+Cosec.^2b+Cosec.^2c-3)=2,$$

dat is

$$(Cot.a+Cot.b+Cot.c)^2-(Cosec.^2a+Cosec.^2b+Cosec.^2c)+3=2,$$

of eindelijk

$$(Cosec.^2a+Cosec.^2b+Cosec.^2c)-(Cot.a+Cot.b+Cot.c)^2=1,$$

waardoor de opgegevene stelling bewezen is.

LXXI. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

Men vraagt de meetkunstige plaats te vinden van de toppen der parabolen, die hetzelfde brandpunt hebben en door een gegeven punt gaan?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat F (Fig. 26) het gemeenschappelijk brandpunt der parabolen zijn, A het gegeven punt, en stellen wij AF $= a$; laat verder AP een der bedoelde parabolen zijn, P tot top

hebbende, dan moet de meetkunstige plaats van het punt P bepaald worden. Nemen wij daartoe F als pool en het verlengde FX van FA als oorsprong der hoeken aan, en stellen wij alzoo PF $= z$ en *hoek* PFX $= \phi$; laten wij verder uit A eene loodlijn AL op de as PL der parabool AP vallen, dan is, in den regthoekigen driehoek AFL, *hoek* AFL $= \phi$, dus AL $= a Sin. \phi$ en FL $= a Cos. \phi$; wij hebben dus ook PL $=$ PF $+$ FL $= z + a Cos. \phi$.

Nu is, volgens de hoofdeigenschap der parabool,

$$AL^2 = 4\ PF \times PL$$

of, hierin voor de lijnen de bovenstaande waarden stellende,

$$a^2 Sin.^2\phi = 4z(z + a Cos.\phi),$$

welke vergelijking, door achtervolgende herleidingen, verandert in: $4z^2 + 4az Cos.\phi = a^2 Sin.^2\phi$,

$$4z^2 + 4az Cos.\phi + a^2 Cos.^2\phi = a^2 Sin.^2\phi + a^2 Cos.^2\phi,$$

$$(2z + a Cos.\phi)^2 = a^2,$$

en

$$2z + a Cos.\phi = \pm a,$$

waaruit volgt

$$z = \tfrac{1}{2}a(1 - Cos.\phi) \quad \text{of} \quad z = -\tfrac{1}{2}a(1 + Cos.\phi).$$

Omdat de waarden, die z verkrijgt, door in de eerste dezer vergelijkingen $\phi = \alpha$ en in de tweede $\phi = 180° + \alpha$ te stellen, even groot zijn, maar in teeken verschillen, zoo is de meetkunstige plaats van het punt P geheel in ééne dezer vergelijkingen begrepen. Wij hebben alzoo voor de polaire vergelijking der gevraagde meetkunstige plaats

$$z = \tfrac{1}{2}a(1 - Cos.\phi);$$

dezelve is alzoo eene gewone epicycloïde, (Zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 162), waarvan het keerpunt in F ligt, waarvan de voortbrengende cirkels $\tfrac{1}{4}a$ tot stralen hebben, terwijl het middelpunt van den vasten cirkel op de lijn AF, op den afstand OF $= \tfrac{1}{4}a$ van het punt F, ligt en de epicycloïde zelve door het punt A gaat.

Dewijl het punt F tot de gevondene meetkunstige plaats behoort, moet een der parabolen den top in F hebben; voor deze parabool is PF $= 0$ en dus de parabool zelve niet anders dan de regte lijn FA.

LXXII. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Wanneer men eenen regten hoek, waarvan het eene been

onbepaaldelijk verlengd, maar het andere gelijk aan den straal eens cirkels is, zoodanig om dien cirkel laat bewegen, dat het onbepaaldelijk verlengde been, zonder langs den cirkelomtrek te schuiven, denzelven steeds blijft raken, zal het uiteinde van het andere been eene kromme lijn beschrijven. Men vraagt deze kromme lijn te bepalen?

Opgelost *door* L. J. Ulman, D. van Lankeren-Matthes, J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Laat de regte hoek OAB (Fig. 27), waarvan het been OA $= a$ gelijk aan den straal des gegevenen cirkels is, zich aanvankelijk in dien stand bevinden, dat het punt, waarin het onbepaaldelijk verlengde been AB den cirkel raakt, juist het punt A van dat been is; dan zal het punt O, dat gedurende de opgegevene beweging van den hoek OAB de gevraagde kromme lijn beschrijft, zich aanvankelijk in het middelpunt van den cirkel bevinden; dit middelpunt zal dus een punt der kromme zijn.

Wanneer nu het been AB gedurende deszelfs beweging in de rigting A′B′ gekomen is en alsdan den cirkel in C raakt, hebben al de punten der lijn A′C achtervolgens al de punten van den boog AC geraakt, derhalve is

$$A'C = \textit{Boog}\ AC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

en het punt O is dan in denzelfden tijd in P gekomen.

Nemen wij nu, ter bepaling van de meetkunstige plaats van het punt P, O als pool en de lijn OX, door O evenwijdig met AB getrokken, als oorsprong der hoeken aan, stellen wij alzoo de polaire ordinaat OP $= z$ en *hoek* XOP $= \phi$ en trekken wij OC, dan is POCA′ een regthoek, omdat de hoeken PA′C en OCA′ regt zijn, terwijl PA′ $=$ OC is. Hieruit volgt vooreerst dat

$$A'C = OP = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

is, en ten andere dat de hoek AOC, soowel als de hoek XOP, het complement is van den hoek AOP, dat alzoo *hoek* AOC $=$ *hoek* XOP $= \phi$ is, en dat wij bijgevolg, voor den boog AC in deelen van den straal uitgedrukt, hebben

$$\textit{Boog}\ AC = a\phi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Uit het verband der vergelijkingen (1), (2) en (3) volgt

onmiddellijk, voor de vergelijking der gezochte kromme lijn

$$z = a\phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

dezelve is dus de bekende *Spiraal van* ARCHIMEDES. (Zie J. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 163, 1°; en voor de inhoudvinding en rectificatie § 271, 5° en § 272, 9°.)

De eerste omwenteling van den bewegenden regten hoek volbragt zijnde, is het onbepaaldelijk verlengde been weder in de rigting AB, dat is in den stand A″B″, en het punt, waardoor de kromme lijn beschreven wordt, in Q gekomen; van dat punt Q af, totdat de tweede omwenteling volbragt is, is PP′ overal gelijk aan den omtrek des cirkels en zoo vervolgens.

Laat men den regten hoek, uit den aanvankelijken stand OAB, in eene tegengestelde rigting bewegen, zoodat het verlengde van AB den cirkel blijft aanraken, dan wordt ϕ negatief en hieruit ontstaat een tweede tak der kromme, in tegengestelde rigting loopende.

AANMERKINGEN *van* D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER *en* J. BADON GHIJBEN.

1°. Het is duidelijk dat, gedurende de beweging, het hoekpunt A van den regten hoek de ontwindende kromme lijn van den cirkel beschrijft.

2°. In het voorstel is niet opgegeven, of het bepaalde been van den regten hoek, gedurende de beweging, naar den cirkel toegekeerd, dan wel van den cirkel afgewend moet wezen. In het laatste geval, dat in Fig. 27 door de standen BAo, B′A′p, B″A″q van den bewegenden hoek is aangewezen, zal de kromme lijn eene geheel andere gedaante hebben, die in de figuur almede is voorgesteld. Om de vergelijking van deze kromme lijn te vinden, stelle men Op $= z'$, *hoek* XOp $= \phi'$, en trekke uit den regthoekigen driehoek OPp, waarin Pp $= 2a$ en *hoek* POp $= \phi' - \phi$ is,

$$z = \pm \sqrt{(z'^2 - 4a^2)} \text{ en } Sin.(\phi' - \phi) = \frac{2a}{z'},$$

uit welke laatste vergelijking volgt

$$\phi' - \phi = Boog\ Sin.\ \frac{2a}{z'}$$

of

$$\phi = \phi' - Boog\ Sin.\ \frac{2a}{z'}.$$

Deze waarden van z en ϕ in de vergelijking (4) overbrengende, komt er

$$\pm\sqrt{(z'^2 - 4a^2)} = a\phi' - a \text{ Boog Sin. } \frac{2a}{z'}$$

of na herleiding

$$\phi' = \pm 2\sqrt{\left\{\left(\frac{z'}{2a}\right)^2 - 1\right\}} + \text{Boog Sin. } \frac{2a}{z'} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Uit deze vergelijking volgt, dat de laatst bedoelde kromme lijn, mede eene soort van spiraal is, die uit twee gelijke en gelijkvormige, doch in tegengestelde rigting loopende takken bestaat.

3°. Uit het aangevoerde blijkt nu gemakkelijk, dat, zoo men aan de ontwindende kromme lijn van eenen cirkel raaklijnen trekt en op deze raaklijnen ter wederzijde van elk raakpunt den straal des cirkels uitzet, de uiteinden van de alzoo binnenwaarts geplaatste stralen in eene spiraal van ARCHIMEDES en die van de buitenwaarts geplaatste stralen in eene andere soort van spiraal zullen gelegen zijn, welke spiralen respectievelijk door de vergelijkingen (4) en (5) worden uitgedrukt.

4°. Beschouwen wij alleen de takken der beide kromme lijnen, die in de figuur zijn voorgesteld, en stellen wij den straal van den cirkel $a = 1$, dan hebben wij voor de spiralen de vergelijkingen

$$z = \phi \quad \text{en} \quad \sqrt{(z'^2 - 4)} = \phi' - \text{Boog Sin. } \frac{2}{z'};$$

geven wij nu in deze beide vergelijkingen eene zelfde waarde aan ϕ en stellen wij het verschil der polaire ordinaten, die tot deze zelfde waarde van ϕ behooren, door x voor, dan is

$$\phi = \phi' \quad \text{en} \quad z = z' - x;$$

volgens de vergelijking der eerste spiraal, is dan $\phi' = z' - x$, waardoor de vergelijking der tweede spiraal geeft

$$\sqrt{(z'^2 - 4)} = z' - x - \text{Boog Sin. } \frac{2}{z'},$$

of $$x = \{z' - \sqrt{(z'^2 - 4)}\} - \text{Boog Sin. } \frac{2}{z'} \quad . \quad (6).$$

De kleinste waarde, die men aan z' geven kan is $z' = 2$ alsdan wordt

$$x = 2 - \tfrac{1}{2}\pi,$$

hetwelk de waarde van het lijntje o S in de figuur is; men heeft namelijk, omdat $a = 1$ genomen is geworden,

$$oS = (2 - \tfrac{1}{2}\pi) \times OA.$$

Door de vergelijking (6) te differentiëren, vindt men na de noodige herleidingen

$$\frac{\delta x}{\delta z'} = 1 - \frac{1 - \frac{2}{z'^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{4}{z'^2}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7);$$

ontwikkelt men nu $\sqrt{\left(1-\frac{4}{z'^2}\right)}=\left(1-\frac{4}{z'^2}\right)$, dan verkrijgt men

$$\frac{\delta x}{\delta z'} = 1 - \frac{1 - \frac{2}{z'^2}}{1 - \frac{2}{z'^2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{z'}\right)^4 - enz.},$$

de noemer van dit laatste gebroken is blijkbaar altijd kleiner dan de teller, het gebroken zelf is dus altijd grooter dan 1 en bijgevolg $\frac{\delta x}{\delta z'}$, altijd negatief, waaruit blijkt, dat met eene aangroeijing van z' altijd eene afneming van x gepaard gaat. Het verschil der polaire ordinaten, die in de beide kromme lijnen tot eene zelfde waarde van ϕ behooren, wordt dus hoe langer hoe kleiner, zoodat deze kromme lijnen elkander meer en meer naderen.

Voor $z' = 4\frac{1}{4}$, vindt men door (6) nagenoeg

$$x = \tfrac{1}{2} - \textit{Boog Sin.}\ \tfrac{8}{17} = 0,01;$$

trekt men dus eene voerstraal $OR = 4\frac{1}{4} \times OA$ tot de buitenste spiraal behoorende, dan zal de langs OR liggende voerstraal der binnenste spiraal, van OR in lengte niet meer dan $\frac{1}{100}$ OA verschillen. Zonder dus de figuren op een ongehoord groote schaal te teekenen, is het onmogelijk de beide spiralen verder dan voor het aanvankelijk gedeelte afzonderlijk voor te stellen. Van hier dan ook, dat het punt q, tot de tweede spiraal behoorende, in de figuur tevens een punt der eerste spiraal is geworden.

Door ontwikkeling zal men vinden

$$z'-\sqrt{(z'^2-4)}=\frac{2}{z'}+\tfrac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{z'}\right)^3+\tfrac{1}{8}\left(\frac{2}{z'}\right)^5+\tfrac{5}{64}\left(\frac{2}{z'}\right)^7+enz.,$$

in welke reeks de coefficienten het dubbel zijn van de bi-

nomiaal coëfficienten, tot de magt $\frac{1}{2}$ behoorende; voorts is

$$BoogSin.\frac{2}{z'}=\frac{2}{z'}+\tfrac{1}{6}\left(\frac{2}{z'}\right)^3+\tfrac{3}{40}\left(\frac{2}{z'}\right)^5+\tfrac{5}{112}\left(\frac{2}{z'}\right)^7+enz.$$

en in deze laatste reeks nemen de coefficienten sterker af, dan in de eerste; daar nu de beide reeksen wegens $z' > 2$ convergeren, is altijd $z' - \sqrt{(z'^2 - 4)}$ grooter dan $Boog\ Sin.\ \frac{2}{z'}$. Volgens (6) is dus x altijd positief, zoodat de tweede spiraal altijd buiten de eerste omloopt, hoewel zij, wegens de bijzondere kleinheid van x, al spoedig kunnen geacht worden in elkander te vallen.

Voor $z' = \infty$, is $z' - \sqrt{(z'^2-4)} = 0$, $Boog\ Sin.\frac{2}{z'} = 0$ en dus ook $x = 0$, zoodat eerst na oneindig veel omwentelingen de spiralen werkelijk in elkander vallen; de eene is dus eene asymptote van de andere.

LXXIII. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Men laat een' gegeven' hoek zoodanig bewegen, dat het eene been altijd door het middelpunt eens gegeven cirkels gaat, terwijl het andere been bestendig de ontwindende van dien cirkel blijft raken. Welke is dan de meetkunstige plaats van het bewogen hoekpunt?

Opgelost door D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier en F. C. Radijs.

Oplossing van D. van Lankeren Matthes.

Laat O (Fig. 28) het middelpunt en OA de straal des opgegeven cirkels zijn; zij verder AB een gedeelte van deszelfs ontwindende kromme, BPO de bewegende hoek in een van zijne standen, het been PB de ontwindende in B rakende en het been PO door het middelpunt gaande, dan moet de meetkunstige plaats van het punt P bepaald worden. Nemen wij daartoe O als pool, OAX als oorsprong der hoeken aan, stellen wij

OP $= z$, *hoek* XOP $= \phi$, OA $= a$ en *hoek* BPO $= \alpha$,

en trekken wij eerst uit B eene raaklijn BC aan den cirkel, daarna den straal OC en eindelijk uit O eene lijn OD evenwijdig met BC, dan is ODBC een regthoek, omdat, volgens de eigenschappen der ontwindende kromme lijnen, de

hoek PBC regt is; volgens diezelfde eigenschappen is BC = *Boog* AC en dus ook

$$OD = Boog\ AC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Verder is, uit den regthoekigen driehoek OPD,

$$OD = OP \times Sin.\ BPO = z\ Sin.\ \alpha \quad \ldots \quad (2),$$

alsmede *hoek* POD = 90° — α;

maar uit de figuur volgt

hoek AOC = *hoek* XOP + *hoek* POD + *hoek* DOC,

dus is ook

hoek AOC = ϕ + 90° — α + 90° = 180° — α + ϕ;

voor den boog AC, in deelen van den straal uitgedrukt, hebben wij dien ten gevolge

$$Boog\ AC = a(\pi - \alpha + \phi) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Uit het verband der vergelijkingen (1), (2) en (3) volgt nu onmiddellijk, voor de polaire vergelijking van de gevraagde meetkunstige plaats,

$$z\ Sin.\ \alpha = a(\pi - \alpha + \phi)$$

of

$$z = \frac{a}{Sin.\alpha}(\pi - \alpha + \phi) \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

welke vergelijking aanwijst, dat die meetkunstige plaats de *Spiraal van* ARCHIMEDES is.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJBEN. Verbeeldt men zich den bewegenden hoek in dien stand, dat het raakpunt, van het eene been met de ontwindende, in het beginpunt A der ontwinding zij, dan zal dat been langs XO liggen; het andere been altijd door het middelpunt gaande, zal dan het hoekpunt in O zijn, zoodat XOE = α, den hoek in dien stand zal voorstellen. Nemen wij nu het verlengde van OE, dat is OF, tot nieuwen oorsprong der hoeken aan, en stellen wij alzoo *hoek* FOP = ϕ', altijd OP = z blijvende stellen, dan is *hoek* FOX = 180° — α en dus

ϕ' = *hoek* FOP = *hoek* FOX + *hoek* XOP = 180° — α + ϕ;

hierdoor verandert de vergelijking (4) in

$$z = \frac{a}{Sin.\alpha}\phi'.$$

Trekken wij verder, evenwijdig met XO, aan den cirkel eene raaklijn HG, die OE. in G snijdt, dan is *hoek* OGH = α en OH = OG *Sin.* OGH, of a = OG *Sin.* α; zoo wij dus OG = a' stellen, is $\frac{a}{Sin.\alpha} = a'$, waardoor de laatste polaire

vergelijking verandert in

$$x = a'\phi' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5);$$

hetwelk de gewone vorm voor de polaire vergelijking van de *Spiraal van* ARCHIMEDES is.

LXXIV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De waarde van x te vinden uit de vergelijking

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + enz.,$$

waarin men n oneindig groot neemt, terwijl het tweede lid der vergelijking tot in het oneindige voortloopt?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, D. W. HINSE, J. S. SPEIJER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, J. C. OLIVIER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat m het oneindig groote getal zijn, waardoor het aantal termen van het tweede lid der vergelijking wordt uitgedrukt, dan is die vergelijking

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + enz. \ldots . + x^{n-m+1} + x^{n-m}; \; . \; (1)$$

dezelve met $x - 1$ vermenigvuldigende, komt er

$$x^n(x - 1) = x^n - x^{n-m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en vervolgens door x^n deelende

$$x - 1 = 1 - x^{-m}$$

of

$$\left(\frac{1}{x}\right)^m = 2 - x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Aan deze laatste vergelijking wordt vooreerst voldaan door $x = 1$, maar deze waarde voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking niet en is door de plaats gehad hebbende vermenigvuldiging met $x - 1$ ingevoerd geworden; deze waarde voor x moet dus verworpen worden. Door voor x positieve of negatieve waarden kleiner dan 1 te nemen, kan aan de vergelijking mede niet voldaan worden, omdat in (3) voor zulke waarden, uit hoofde van $m = \infty$, $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \infty$ zou worden, terwijl $2 - x$ eene eindige waarde zou verkrijgen. Hieruit volgt dat $x > 1$ moet wezen; alsdan is $\left(\frac{1}{x}\right)^m = 0$, dus volgens (3) ook $2 - x = 0$ en bijgevolg $x = 2$.

Ten gevolge der plaats gehad hebbende deeling door x^n, kunnen waarden van x, die aan de oorspronkelijke vergelij-

king voldoen, verdonkerd geworden zijn. Dit heeft plaats, indien $n > m$ is, want dan is elk lid der vergelijking (2) door eene positieve magt van x, dat is door x^{n-m} deelbaar, zonder dat men tot negatieve exponenten vervalt. De waarden die dan $x^{n-m} = 0$ maken voldoen aan (2) en dus ook aan (1). Hebben hierbij n en m een eindig verschil, dan kan alleen $x = 0$ aan de vergelijking $x^{n-m} = 0$ voldoen. Is echter $n - m = \infty$, dan wordt aan de vergelijking $x^{n-m} = 0$ voldaan, door alle positieve of negatieve waarden van x, die kleiner dan eenheid zijn.

Aan de opgegevene vergelijking wordt dus in alle gevallen voldaan door $x = 2$; indien het oneindig aantal termen van het tweede lid grooter is dan het oneindig getal n, voldoet ook $x = 0$; en indien dat oneindig aantal termen oneindig veel grooter is dan n, voldoet bovendien elke positieve of negatieve waarde voor x, die kleiner dan de eenheid is.

LXXV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer men, op de regthoekszijden AB *en* AC (*Fig.* 29) *van eenen regthoekigen driehoek* ABC, *vierkanten* AE *en* AF *beschrijft en de lijnen* EC *en* FB *trekt, elkander in* O *snijdende, dan zal de lijn, die uit den regten hoek* A *door het punt* O *getrokken wordt, loodregt op de hypothenusa staan. Men vraagt het bewijs hiervan?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. S. Speijer, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman *en* G. Koster.

I. Oplossing *van* D. W. Hinse.

Volgens eene bekende stelling (Zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* Derde Druk, § 346) is

$$AG \times BD \times CH = BG \times CD \times AH$$

of $$BD : CD = BG \times AH : AG \times CH \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

De driehoeken ABH en CFH zijn gelijkvormig, even zoo de driehoeken BEG en ACG; hieruit volgen de evenredigheden

$$AH : CH = AB : CF$$

en $$BG : AG = BE : AC,$$

of, dewijl CF = AC en BE = AB is,

$$AH : CH = AB : AC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en

$$BG : AG = AB : AC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

De overeenkomstige termen der evenredigheden (1), (2) en (3) met elkander vermenigvuldigende, komt er, na weglating der gelijke factoren,

$$BD : CD = AB^2 : AC^2;$$

dus is ook $BD + CD : BD = AB^2 + AC^2 : AB^2$

of $BC : BD = BC^2 : AB^2,$

waaruit verder volgt $AB^2 = BC \times BD$

en $BC : AB = AB : BD.$

De driehoeken ABC en ABD hebben dus, om den gemeenschappelijken hoek B, evenredige zijden; zij zijn derhalve gelijkvormig en hebben over de gelijkstandige zijden BC en AB gelijke hoeken; alzoo is *hoek* ADB = *hoek* BAC een regte hoek, en de lijn AD, door O getrokken staat loodregt op BC.

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Nemen wij de beide regthoekszijden AB en AC respectievelijk tot assen der x en y aan, stellen wij $AB = p$ en $AC = q$ en houden wij in het oog, dat eene regte lijn, gaande door twee punten, waarvan α, β en α', β' de coördinaten zijn, tot vergelijking heeft

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

dan vinden wij, omdat

p en 0 de coördinaten van het punt B,
0 en q — ——— — — — C,
$-q$ en q — ——— — — — F
en p en $-p$ — ——— — — — E

zijn: 1°. door $\alpha = p$, $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = q$ te stellen, voor de vergelijking der lijn BC: $y = -\frac{q}{p}(x - p) \ldots (2)$;

2°. door $\alpha = p$, $\beta = 0$, $\alpha' = -q$, $\beta' = q$ te stellen, voor de vergelijking der lijn BF: $y = -\frac{q}{p+q}(x - p) \ldots (3)$;

3°. door $\alpha = 0$, $\beta = q$, $\alpha' = p$, $\beta' = -p$ te stellen voor de vergelijking der lijn CE: $y - q = -\frac{p+q}{p}x \ldots\ldots (4)$.

Stellen wij nu m en n voor de coördinaten van het snij-

punt O der lijnen BF en CE, dan moeten deze coördinaten aan de beide vergelijkingen (3) en (4) voldoen; hieruit volgt

$$n = -\frac{q}{p+q}(m-p) \quad \text{en} \quad n-q = -\frac{p+q}{p}m,$$

en deze vergelijkingen ten opzigte van m en n oplossende, zal men gemakkelijk vinden

$$m = \frac{pq^2}{p^2+pq+q^2} \quad \text{en} \quad n = \frac{p^2q}{p^2+pq+q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

De coördinaten van het punt A beide gelijk nul en die van het punt O m en n zijnde, vindt men, door in (1) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha' = m$, $\beta' = n$ te stellen, voor de vergelijking der lijn door A en O gaande

$$y = \frac{n}{m}x,$$

en, hierin voor m en n de waarden (5) substitueerende, heeft men

voor de vergelijking van AO: $y = \frac{p}{q}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$

Daar nu in de vergelijkingen (2) en (6) tusschen de coefficienten van x, dit verband bestaat, dat den eenen gelijk a stellende de andere $-\frac{1}{a}$ is, zoo staan de lijnen BC en AO, waartoe die vergelijkingen behooren, regthoekig op elkander.

Aanmerking. Indien de vierkanten op de regthoekszijden binnenwaarts geplaatst worden, zoo als in de figuur door AE′ en AF′ is voorgesteld, zal het gestelde niettemin waar blijven. Want alsdan heeft men:

voor de coördinaten van het punt F′: q en q;

— — ——— — — — E′: p en p;

— — vergelijking van BF′: $y = -\frac{q}{p-q}(x-p)$;

— — ——— — CE′: $y - q = \frac{p-q}{p}x$;

— — coördin. van O′: $m' = \frac{pq^2}{p^2-pq+q^2}$, $n' = \frac{p^2q}{p^2-pq+q^2}$;

en eindelijk voor de vergelijking van AO′

$$y = \frac{n'}{m'}x = \frac{p}{q}x,$$

welke vergelijking dezelfde is, die voor AO is gevonden.

LXXVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Voor welke waarde van ϕ is $Sin.\phi + Cos.\phi$ een maximum?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. W. HINSE, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, F. C. RADIJS, *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer wij stellen

$$z = Sin.\phi + Cos.\phi,$$

vinden wij door achtervolgend te differentiëren

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = Cos.\phi - Sin.\phi \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = -(Sin.\phi + Cos.\phi).$$

Stellen wij nu $\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$, dan vinden wij

$$Sin.\phi = Cos\,\phi,$$

of door $Cos.\phi$ deelende

$$Tang.\phi = 1;$$

ons bepalende tot bogen, die kleiner dan de omtrek des geheelen cirkels zijn, wordt hieraan alleen voldaan, door $\phi = 45°$ of $= 225°$ te nemen. Voor $\phi = 45°$ wordt $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = -\sqrt{2}$, welke negatieve waarde aantoont, dat $\phi = 45°$ voor z een maximum geeft. Voor $\phi = 225°$ wordt $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = +\sqrt{2}$, en blijkens deze positieve waarde is dan z een minimum. Alzoo is $\phi = 45°$ of algemeener $\phi = n \times 360° + 45°$ de waarde van ϕ, die $Sin.\phi + Cos.\phi$ tot een maximum maakt.

LXXVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de integraal van

$$\partial y = x\partial x \ Nep.\ Log.\ \frac{a + \sqrt{(a^2 + x^2)}}{x}$$

te vinden?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, C. J. BOLTEN, D. W. HINSE, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Schrijven wij de opgegevene formule vooreerst in de gedaante

$$\partial y = \tfrac{1}{2}\left\{Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}\right\}\partial.x^2,$$

dan is $$y = \tfrac{1}{2}\int\left\{Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}\right\}\partial.x^2;$$

passen wij nu hier op de gewone herleidingsformule der integraalrekening toe, dan vinden wij

$$y=\tfrac{1}{2}x^2 Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}-\tfrac{1}{2}\int x^2\partial.Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}.$$

Nu is

$$Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}=Nep.Log.(a+\sqrt{(a^2+x^2)})-Nep.Log.x;$$

dus $$\partial.Nep.Log.\frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}=\frac{\partial(a+\sqrt{(a^2+x^2)})}{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}-\frac{\partial x}{x}$$

$$=\frac{\partial.\sqrt{(a^2+x^2)}}{a+\sqrt{(a^2+x)}}-\frac{\partial x}{x}=\frac{x\partial x}{(a+\sqrt{(a^2+x^2)})\sqrt{(a^2+x^2)}}-\frac{\partial x}{x},$$

of na de noodige herleidingen

$$\partial.\ Nep.\ Log.\ \frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x} = -\frac{a\partial x}{x\sqrt{(a^2+x^2)}};$$

door substitutie hiervan gaat y over in

$$y = \tfrac{1}{2}x^2\ Nep.\ Log.\ \frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x} + \tfrac{1}{2}a\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

en deze laatste integraal algemeen bekend zijnde, hebben wij terstond

$$y = \tfrac{1}{2}x^2\ Nep.\ Log.\ \frac{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}{x} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{(a^2+x^2)} + C.$$

LXXVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Den loop en de voornaamste eigenschappen op te sporen der kromme lijn, waarvan $z = a \pm b$ Tang. ϕ de poolvergelijking is?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Nemen wij O (Fig. 30) als pool en de lijn OX als oorsprong der hoeken aan, en laat OA = a en OB = b zijn,

dan is omdat, voor $\phi = 0$, $z = a$ wordt, A een punt der kromme lijn.

Van $\phi = 0$ tot $\phi = 90°$ zal b *Tang.* ϕ en dus ook z onophoudelijk aangroeijen, daardoor zal het gedeelte APQ der kromme lijn ontstaan, dat binnen den regten hoek XOY valt. Om dit gedeelte te construeren, trekke men door B eene lijn CBC′ loodregt op OX, beschrijve uit O met OA als straal eenen cirkel, trekke uit O eene willekeurige lijn OS, die BC in M en den cirkel in N snijdt, en make vervolgens NP $=$ BM, dan zal P een punt der kromme zijn; want *hoek* XOS $= \phi$ stellende, is volgens deze constructie BM $= b$ *Tang.* ϕ en dus OP $=$ ON $+$ NP $=$ OA $+$ BM $= a + b$ *Tang.* $\phi = z$.

Voor $\phi = 90°$ wordt $z = \infty$; het is dus mogelijk, dat de kromme lijn eene regtlijnige asymptoot evenwijdig met OY hebbe. Stellen wij den afstand PE, van een willekeurig punt P der kromme tot aan de lijn OY, door x voor, dan is

$$x = zCos.\phi = (a + bTang.\phi)\ Cos.\phi = aCos.\phi + bSin.\phi;$$

voor $\phi = 90°$ wordt $x = b$, derhalve is de lijn CBC′ werkelijk eene asymptoot.

Van $\phi = 90°$ tot $\phi = 180°$, is altijd b *Tang.* ϕ negatief; is nu ϕ slechts weinig grooter dan 90°, zoo is de negatieve waarde van b *Tang.* ϕ zeer groot, weshalve dan ook $z = a + b$ *Tang.* ϕ eene zeer groote negatieve waarde verkrijgt; groeit ϕ verder aan, dan wordt de negatieve waarde van b *Tang.* ϕ en dus ook de negatieve waarde van z kleiner, totdat, voor $Tang.\phi = -\frac{a}{b}$ of $\phi = Boog Tang. - \frac{a}{b}$, $z = 0$ wordt; de kromme lijn gaat dan door het punt O en wordt in dat punt geraakt, door eene lijn OF evenwijdig met BD getrokken, want men heeft

$$Tang.\ XOF = -\ Tang.\ OBD = -\frac{OD}{OB} = -\frac{a}{b}$$

en dus is XOF de waarde van ϕ, die met $z = 0$ overeenstemt.

Van $\phi = 90°$ tot $\phi = Boog\ Tang. - \frac{a}{b}$ ontstaat het gedeelte Q′P′O der kromme; dit gedeelte wordt even als vroeger geconstrueerd, alleen met dit verschil, dat men

nu, eene willekeurige lijn OS′ getrokken hebbende, de lijn BC′ in M′ en den cirkel in N′ snijdende, N′P′ $=$ BM′ uit N′ op N′S′ naar de andere zijde moet uitzetten.

Van $\phi = \textit{Boog Tang.} -\frac{a}{b}$ tot $\phi = 180^\circ$ is wel b *Tang.* ϕ negatief, maar deze negatieve waarde is kleiner dan a en neemt voortdurend af, zoodat dan x positief is en met ϕ gelijktijdig aangroeit; alsdan ontstaat het gedeelte OHA′ der kromme, dat even als boven geconstrueerd kan worden, totdat voor $\phi = 180^\circ$ $x = a$ wordt en dus de kromme door het punt A′ gaat, waar de cirkel door het verlengde van OX gesneden wordt.

Dewijl $\phi = a$ en $\phi = 180^\circ + a$ dezelfde waarde voor x geven, zal van $\phi = 180^\circ$ tot $\phi = 270^\circ$ een gedeelte A′K′I′R der kromme lijn ontstaan, in den hoek X′OY′, gelegen, dat gelijk en gelijkvormig is met het gedeelte AKIQ, dat in den hoek XOY ligt. Even zoo zullen van $\phi = 270^\circ$ tot $\phi = 180^\circ + \textit{Boog Tang.} -\frac{a}{b}$ en van $\phi = 180^\circ + \textit{Boog Tang.} -\frac{a}{b}$ tot $\phi = 360^\circ$ de gedeelten R′LO en OH′A der kromme ontstaan, die respectievelijk gelijk en gelijkvormig met de gedeelten Q′L′O en OHA′ zijn. Neemt men dus ook OB′ $= b$ en trekt men C′B′C″ loodregt door XX′, dan zal C′B′C″ mede eene asymptoot wezen; en OF zal het gedeelte R′OA even als het gedeelte Q′OA′, in O raken.

Van $\phi = 0$ tot $\phi = 360^\circ$ voortgaande, is dus de loop der kromme lijn als volgt: zij begint in A, verwijdert zich van den cirkel en verliest zich langs BC in het oneindige, komt aan de andere zijde langs C′B uit het oneindige terug, gaat door O en A′ en verliest zich andermaal in het oneindige langs B′C″, komt vervolgens aan de andere zijde van B′C′ uit het oneindige terug, gaat andermaal door O en komt eindelijk in het beginpunt A terug.

Door de gegevene vergelijking twee achtervolgende malen te differentiëren, vindt men

$$\frac{\delta x}{\delta \phi} = \frac{b}{\textit{Cos.}^2\phi} \text{ en } \frac{\delta^2 x}{\delta \phi^2} = \frac{2b\ \textit{Sin.}\ \phi}{\textit{Cos.}^3\phi};$$

daar nu in het algemeen de hoek ψ, dien de raaklijn van eenig punt eener kromme lijn met den voerstraal van dat punt maakt, door de formule $Tang.\ \psi = \frac{x\ \partial\phi}{\partial x}$ wordt uitgedrukt, zoo is bij onze kromme lijn

$$Tang.\psi = \frac{(a+bTang.\phi)Cos.^2\phi}{b} = \frac{Cos.\phi}{b}(aCos.\phi+bSin.\phi).$$

Voor $\phi = 0$ en voor $\phi = 180°$ vindt men $Tang.\psi = \frac{a}{b}$; de raaklijnen AV en A'V' in A en A' loopen dus evenwijdig. Daar verder $Tang.$ OAV $= \frac{a}{b}$ en volgens het vroeger gevondene ook $Tang.$ AOV $= Tang.$ OBD $= \frac{a}{b}$ is, zijn de hoeken OAV en AOV aan elkander gelijk, zoodat door de onderlinge snijding van XX' en de raaklijnen der punten O, A en A' twee gelijkbeenige driehoeken OVA en OV'A' gevormd worden.

Om de raaklijn aan een willekeurig punt P der kromme te construeren, late men, na PE evenwijdig met OX getrokken te hebben, uit E eene loodlijn EZ op den voerstraal OP van dat punt vallen, make UZ $=$ OB $= b$, trekke UP en stelle PG loodregt op UP, dan zal PG de raaklijn zijn; want vroeger is reeds gevonden PE $= x = aCos.\phi + bSin.\phi$; volgens de constructie is *hoek* OPG $=$ *hoek* PUZ, omdat beide deze hoeken het complement van den hoek UPZ zijn, terwijl uit de regthoekige driehoeken PEZ en PUZ volgt $Tang.$ PUZ $= \frac{ZP}{UZ}$ en ZP $=$ PE $Cos.$ EPZ, derhalve is naar behooren

$$Tang.\ OPG = Tang.\ PUZ = \frac{ZP}{UZ} = \frac{PE\ Cos.\ EPZ}{UZ}$$
$$= \frac{(a\ Cos.\phi + b\ Sin.\phi)\ Cos.\phi}{b}.$$

Voor de punten der kromme, waar de raaklijn evenwijdig met OY loopt, moet $\phi + \psi = 90°$, en dus $Tang.\phi = \frac{1}{Tang.\psi}$ zijn; in verband met de boven gevondene waar-

de voor *Tang.*ψ, heeft men dus voor de bedoelde punten

$$Tang.\phi = \frac{b}{(a+bTang.\phi)Cos.^2\phi} = \frac{bSec.^2\phi}{a+bTang.\phi},$$

waaruit achtervolgens gevonden wordt

$$a\ Tang.\ \phi + b\ Tang.^2\phi = b\ Sec.^2\phi$$

$$a\ Tang.\ \phi + b\ Tang.^2\phi = b(1 + Tang^2\phi)$$

$$a\ Tang.\ \phi = b$$

en

$$Tang.\ \phi = \frac{b}{a};$$

daar nu vroeger gevonden is $Tang\ XOF = -\frac{a}{b}$, zoo blijkt hieruit, dat de voerstralen der punten K en K′, waar de raaklijnen evenwijdig met OY loopen, loodregt op OF staan.

Voor de punten der kromme, waar de raaklijn evenwijdig niet OX loopt, moet $\phi + \psi = 180°$ zijn en dus $Tang.\ \phi = -Tang.\ \psi$; volgens de gevondene waarde voor *Tang.* ψ, moet men dus voor deze punten hebben

$$Tang.\phi = -\frac{(a+bTang.\phi)Cos.^2\phi}{b} = -\frac{a+bTang.\phi}{bSec.^2\phi},$$

waaruit achtervolgens wordt afgeleid

$$Tang.\phi\ Sec.^2\phi = -\frac{a}{b} - Tang.\phi,$$

$$Tang.\phi\ (1+Tang.^2\phi) + Tang.\phi + \frac{a}{b} = 0,$$

en

$$Tang.^3\phi + 2\ Tang.\phi + \frac{a}{b} = 0;$$

het vinden dezer punten hangt dus van de oplossing eener derdemagtsvergelijking af. Nemen wij, zoo als nagenoeg met de figuur overeenkomt, dat $b = \frac{5}{8}a$ gegeven is, dan wordt de vergelijking

$$Tang.^3\phi + 2\ Tang.\phi + \frac{8}{5} = 0;$$

hieraan voldoet nagenoeg $Tang.\phi = -\frac{33}{50} = -0{,}66$, en dus $\phi = 146°\frac{1}{2}$. Makende alzoo in de figuur $XOH = 146°\frac{1}{2}$, dan zullen OH en OH′ de voerstralen zijn, waarop de punten H en H′ liggen, in welke de raaklijnen evenwijdig met OX zijn.

Voor de punten, in welke de kromme lijn door den cirkel gesneden wordt, moet $\pm z = a$ zijn; hierin voor z de

waarde $a + b\ Tang.\phi$ stellende, komt er

$$a + b\ Tang.\phi = a \quad \text{of} \quad -a - b\ Tang.\phi = a,$$

waaruit volgt

$$Tang.\phi = 0 \quad \text{of} \quad Tang.\phi = -\frac{2a}{b};$$

de eerste waarde van $Tang.\phi$ wijst de punten A en A′ aan; de tweede leert, dat de punten L en L′ zullen gevonden worden, zoo men BC′ $= 2a$ neemt en OC′ trekt, den cirkel in L en L′ snijdende.

Voor de punten, in welke de kromme lijn door de asymptoten gesneden wordt, moet $z\ Cos.\phi = \pm b$, dus $z^2 Cos.^2\phi = b^2$ of $z^2 = b^2 Sec.^2\phi$ zijn; daar nu uit $z = a + b\ Tang.\phi$ volgt,

$$Tang.\phi = \frac{z-a}{b} \text{ en } Sec.^2\phi = 1 + Tang.^2\phi = \frac{b^2+(z-a)^2}{b^2},$$

zal men voor de bedoelde snijpunten moeten hebben,

$$z^2 = b^2 + (z-a)^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$z = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

en

$$Tang.\phi = \frac{z-a}{b} = -\frac{a^2 - b^2}{2ab};$$

plaatst men dus in den cirkel eene koorde D′W′ $=$ BD $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ en trekt men uit W′ eene lijn, evenwijdig met OX, BC′ in T′ snijdende, dan zal T′ tevens het punt zijn, waarin de kromme door de asymptoot BC′ gesneden wordt. Uit de constructie namelijk volgt

$$D'W = \frac{D'W'^2}{D'D} = \frac{a^2+b^2}{2a},$$

$$BT' = OW = OD' - D'W = a - \frac{a^2+b^2}{2a} = \frac{a^2-b^2}{2a},$$

$$Tang.\,XOT = -Tang.\,XOT' = -\frac{BT'}{OB} = -\frac{a^2-b^2}{2ab},$$

en dit is juist de waarde van $Tang.\phi$, die zoo even voor de snijpunten T en T′ gevonden is.

De kromtestraal r van een willekeurig punt eener kromme lijn, in het algemeen voorgesteld wordende door de formule

$$r = \frac{\sqrt{\left\{z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2\right\}^3}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}},$$

zoo hebben wij, door hierin de bovengevondene waarden der differentiaal quotienten over te brengen, voor onze kromme lijn

$$r = \frac{\sqrt{(z^2 + b^2 Sec.^4\phi)^3}}{z^2 + 2b^2 Sec.^4\phi - 2bz\ Tang.\phi\ Sec.^2\phi}.$$

In het punt O is $z = 0$, $Tang.\phi = -\frac{a}{b}$ en dus $Sec.^2\phi = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$; hierdoor wordt de kromtestraal van dat punt gevonden te zijn

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

In de punten A en A′ is $z = a$ en $\phi = 0$ of $\phi = 180°$, dus $Tang.\ \phi = 0$, $Sec.\phi = \pm 1$ en $Sec.^2\phi = 1$; hierdoor vindt men, dat in elke dezer punten de kromtestraal is

$$r = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}{a^2 + 2b^2}.$$

Uit de gedaante der kromme lijn, zoo als die door de constructie verkregen is, ziet men ligtelijk, dat zij in de takken AKQ en A′K′R buigpunten moet hebben. De plaats dezer buigpunten wordt het gemakkelijkst gevonden, door op te merken, dat in zulke punten de kromtestralen nul of oneindig groot, en wel in de meeste gevallen oneindig groot zijn. Daar nu in ons geval, voor deze punten, z, $Tang.\phi$ en $Sec.\phi$ geen van allen nul of oneindig zijn, kunnen in de formule voor den kromtestraal teller of noemer geen van beide oneindig worden en de teller kan, als de som van twee vierkanten bevattende, ook niet nul zijn. De eenige omstandigheid, die er tot het aanwezen der buigpunten overblijft, is alzoo dat de noemer nul zij; stellen wij derhalve $z^2 + 2b^2\ Sec.^4\phi - 2bz\ Tang.\phi\ Sec.^2\phi = 0$, dan vinden wij, $z = a + b\ Tang.\ \phi$ en $Sec.^2\phi = 1 + Tang.^2\phi$ substituerende,

$$(a+bTang.\phi)^2+2b^2(1+Tang.^2\phi)^2-2bTang.\phi(a+bTang.\phi)(1+Tang.^2\phi)=0$$

en na behoorlijke herleiding

$$Tang.^3\phi - \frac{3b}{2a}\,Tang.^2\phi - \frac{a^2 + 2b^2}{2ab} = 0,$$

zoodat de bepaling der buigpunten van eene derdemagtsvergelijking afhangt. Nemen wij even als boven aan, dat $b = \frac{5}{8}a$ gegeven is, dan wordt deze vergelijking

$$Tang^3\phi - \tfrac{15}{16}\,Tang.^2\phi - \tfrac{57}{40} = 0;$$

hieraan voldoet nagenoeg $Tang\,\phi = \frac{77}{50} = 1{,}54$, en dus $\phi = 57°$. Makende alzoo in de figuur $XOI = 57°$, dan zullen daardoor de voerstralen OI en OI′ gevonden zijn, waarop de buigpunten I en I′ liggen.

De inhoud van eenen polairen sector eener kromme lijn in het algemeen door de formule $I = \frac{1}{2}\int z^2\partial\phi$ uitgedrukt wordende, hebben wij voor onze kromme

$$I = \tfrac{1}{2}\int(a + b\ Tang.\phi)^2\partial\phi,$$

of door ontwikkeling van $(a + b\ Tang.\phi)^2$,

$$I = \tfrac{1}{2}a^2\phi + ab\int Tang.\phi\partial\phi + \tfrac{1}{2}b^2\int Tang.^2\phi\partial\phi.$$

Nu is

$$\int Tang\,\phi\partial\phi = \int\frac{Sin.\phi\partial\phi}{Cos.\phi} = -\int\frac{\partial.Cos.\phi}{Cos.\phi} = -Log.\,Cos.\phi,$$

en

$$\int Tang.^2\phi\partial\phi = \int\frac{(1-Cos.^2\phi)\partial\phi}{Cos.^2\phi} = \int\frac{\partial\phi}{Cos.^2\phi} - \phi = Tang.\phi - \phi;$$

hierdoor wordt

$$I = \tfrac{1}{2}a^2\phi - ab\ Log.\,Cos.\phi + \tfrac{1}{2}b^2\ Tang\,\phi - \tfrac{1}{2}b^2\phi + C$$

of $I = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\phi + \frac{1}{2}b^2\ Tang.\phi - ab\ Log.\,Cos.\phi + C.$

Stelt men in deze integraal $\phi = 180° = \pi$, als wanneer $Tang.\phi = 0$ en $Cos.\phi = -1$ wordt, dan komt er

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\pi - ab\ Log.\,(-1) + C;$$

stelt men in dezelve $\phi = Boog\ Tang.\left(-\frac{a}{b}\right)$, als wanneer

$$Tang.\phi = -\frac{a}{b}\ \text{en}\ Cos.\phi = -\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\ \text{wordt, dan}$$

komt er

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\,Boog Tang.\left(-\frac{a}{b}\right) - \tfrac{1}{2}ab - ab Log.\left(-\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right) + C;$$

om nu de integraal van $\phi = Boog\ Tang.\left(-\frac{a}{b}\right)$ tot $\phi = 180°$ te verkrijgen, moet men de laatste uitdrukking van de vorige aftrekken, en daardoor vindt men

$$\textit{Inh. } \mathrm{OHTA'B'O} = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2).(\pi - \textit{Boog Tang.} \left(-\frac{a}{b}\right)) - ab\ \textit{Log.}\ \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{b}$$

$$= \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ \textit{Boog Tang.}\ \frac{a}{b} - \tfrac{1}{2}ab\ \textit{Log.}\ \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}ab\left(1 - \textit{Log.}\ \frac{a^2 + b^2}{b^2}\right) + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ \textit{Boog Tang.}\ \frac{a}{b};$$

in alle welke formulen de Neperiaansche Logarithmen bedoeld worden.

Voor $b = \frac{5}{8}a$ zou men nagenoeg hebben:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \tfrac{89}{25} = 3,46;\ \textit{Tafel Log.}\ \frac{a^2 + b^2}{b^2} = 0,54;\ \textit{Nep. Log.}\ \frac{a^2 + b^2}{b^2} = 1,25;$$

$$\frac{a}{b} = \tfrac{8}{5} = 1,6 = \textit{Tang.}\ 58^\circ = \textit{Tang.}\ \tfrac{58}{180}\pi;\ \textit{Boog Tang.}\ \frac{a}{b} = \tfrac{58}{180}\pi = 1,01;$$

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{5}{16}a^2 = 0,3125\ a^2 \text{ en } \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) = \tfrac{39}{128}a^2 = 0,305\ a^2;$$

en bijgevolg door substitutie

$$\textit{Inh. } \mathrm{OHTA'B'O} = -0,078\ a^2 + 0,308\ a^2 = 0,23\ a^2;$$

deze inhoud zou dus iets minder zijn, dan een vierde gedeelte van het vierkant op den straal des cirkels beschreven.

LXXIX. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

Hoe kan men een' veerkrachtigen bol, die in een gegeven punt op een horizontaal vlak ligt en zich zonder wrijving over dat vlak bewegen kan, horizontaal voortwerpen, zoodat die bol, na tegen twee in stel-

ling gegevene platte verticale vlakken gebotst te hebben, wederom door dat zelfde punt gaat? (*)

OPGELOST *door* L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* J. SJOENIS.

I. OPLOSSING *van* L. VAN DE KASTEELE.

Laat AB en CD (Fig. 31) de in stelling gegevene vlakken, E het punt waar de bol ligt, voorstellen, en laat de bol, uit E in de rigting EF voortgeworpen, het vlak AB in F botsen, daarna de rigting FG volgen, verder het vlak CD in G botsen en eindelijk de rigting GE, door het punt E gaande, aannemen, dan zal het er slechts op aankomen, uit den betrekkelijken stand van AB, CD en E, den hoek AFE te bepalen.

Zij alzoo gegeven de hoek, waaronder de vlakken elkander snijden ASD $= \alpha$, alsmede de loodregte afstanden, van het punt E tot aan de vlakken, EH $= a$ en EI $= b$, en stellen wij *hoek* AFE $= \phi$, dan is, volgens de theorie van de botsing der veerkrachtige ligchamen, ook *hoek* AFE $= \phi$; uit den driehoek SFG is alzoo *hoek* SGF $= 180° - (\alpha + \phi)$ en, volgens de theorie der botsing, mede *hoek* EGD $= 180° - (\alpha + \phi)$; hieruit volgt verder

$$hoek\, EFG = 180° - hoek\, AFE - hoek\, SFG = 180° - 2\phi$$

en $hoek\, EGF = 180° - hoek\, EGD - hoek\, SGF = 2(\alpha + \phi) - 180°$, terwijl uit de regthoekige driehoeken EFH en EGI volgt:

$$EF = \frac{EH}{Sin.\, AFE} = \frac{a}{Sin.\phi} \text{ en } EG = \frac{EI}{Sin.EGD} = \frac{b}{Sin.(\alpha+\phi)}.$$

Nu is, uit den driehoek EFG,

$$EF : EG = Sin.\, EGF : Sin.\, EFG$$

of, door substitutie van bovenstaande waarden,

$$\frac{a}{Sin.\phi} : \frac{b}{Sin.(\alpha+\phi)} = -\, Sin.\, 2(\alpha+\phi) : Sin.\, 2\phi;$$

hiervoor kan men achtervolgens schrijven:

$$aSin.(\alpha+\phi) : bSin.\phi = -2Sin.(\alpha+\phi)Cos.(\alpha+\phi) : 2Sin.\phi Cos.\phi,$$

$$a : b = -\, Cos.(\alpha+\phi) : Cos.\phi,$$

$$aCos.\phi = -\, bCos.(\alpha+\phi),$$

$$aCos.\phi = -\, bCos\,\alpha Cos.\phi + bSin.\alpha Sin.\phi,$$

$$a = -\, bCos.\alpha + bSin.\alpha Tang.\phi;$$

(*) I. R. SCHMIDT, *Dynamica*, pag. 165. No. 3.

en nu volgt uit de laatste vergelijking onmiddellijk

$$Tang.\phi = \frac{a+bCos.\alpha}{bSin.\alpha} = \frac{a}{b}\ Cosec.\alpha + Cot.\alpha,$$

weshalve de rigting, waaronder de bol tegen het vlak AB moet worden geworpen, gevonden is.

II. Oplossing *van* G. Koster.

Laat wederom AB en CD (Fig. 31) de vlakken, alsmede E het punt zijn, indien men dan uit E de loodlijnen EH en EI op AB en CD laat vallen, vervolgens op de verlengden dier loodlijnen, aan de andere zijden der vlakken, E'H = EH en E'I = EI neemt, en eindelijk de lijn E'E″ trekt, zal deze laatste lijn de lijnen AB en CD snijden in de punten F en G, waar de botsing moet plaats hebben. Want uit deze constructie volgt, dat de driehoeken EHF en E'HF gelijk en gelijkvormig zijn, dat alzoo *hoek* EFH = *hoek* E'FH = *hoek* SFG is; dat de driehoeken EIG en E″IG mede gelijk en gelijkvormig zijn en derhalve *hoek* EGI = *hoek* E″GI = *hoek* SGF is; derhalve zal de bol, door het volgen van de rigtingen EF, FG en GE, aan de wetten der botsing voldoen en na de beide botsingen door het aanvankelijke punt E gaan.

Uit deze constructie volgt nog, dat, zoo de vlakken eenen regten hoek met elkander maken, het punt waar de botsing moet plaats hebben, op elk der vlakken, juist in het hoekpunt zal gelegen zijn; en dat, zoo de vlakken eenen stompen hoek vormen, aan het voorstel niet regtstreeks voldaan kan worden, omdat alsdan de lijn E'E″ buiten den hoek ASD blijft.

LXXX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Onder alle trapeziums, die, zonder de langste evenwijdige zijde mede te rekenen, denzelfden omtrek hebben, en waarvan de schuinsche zijden gelijke hoeken met de langste evenwijdige zijde maken, begeert men datgene te vinden, waarvan de inhoud het grootst is?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, F. C. Radijs *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

I. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij ABCD (Fig. 32) een trapezium, waarvan standvastig

$AB + BC + CD = a$ is, terwijl de hoeken DAB en ADC onderling gelijk zijn; trekken wij in hetzelve BE evenwijdig met CD, dan is, wegens de gelijkheid der hoeken BAE en BEA, $AB = BE$. Stellen wij nu *hoek* $DAB =$ *hoek* $ADC = \phi$, $AB = BE = CD = x$ en laat I de inhoud van het trapezium voorstellen, dan is:

$$ED = BC = a - (AB + CD) = a - 2x,$$

Inh. Par. $BD = ED \times CD\, Sin.EDC = (a - 2x) x\, Sin.\phi,$

Inh.Drieh. $ABE = \frac{1}{2} AB \times BE\, Sin.ABE = \frac{1}{2} x^2\, Sin.2\phi = x^2\, Sin.\phi\, Cos.\phi,$

en dus door optelling

$$I = (a - 2x) x\, Sin.\phi + x^2\, Sin.\phi\, Cos.\phi.$$

Om nu I, die eene functie van de twee onafhankelijk veranderlijke grootheden x en ϕ is, tot een maximum te maken, zoo differentiëren wij deze functie, beurtelings in de onderstelling, dat òf ϕ òf x alleen veranderlijk zij, waardoor wij vinden

$$\frac{\delta I}{\delta \phi} = (a - 2x)\ x\, Cos.\phi + x^2 (Cos.^2\phi - Sin.^2\phi)$$

en $$\frac{\delta I}{\delta x} = (a - 4x)\ Sin.\phi + 2x\, Sin.\phi\, Cos.\phi;$$

vervolgens stellen wij eik dezer differentiaalquotienten gelijk nul en verkrijgen hierdoor, ter bepaling van x en ϕ, de twee vergelijkingen

$$(a - 2x)\ x\ Cos.\phi + x^2 (Cos.^2\phi - Sin.^2\phi) = 0$$

en $$(a - 4x)\ Sin.\phi + 2x\ Sin.\phi\ Cos.\phi = 0.$$

Omdat uit den aard der zaak noch x, noch $Sin.\phi$ gelijk nul kan wezen, deelen wij de eerste vergelijking door x en de tweede door $Sin.\phi$, dan verkrijgen wij

$(a - 2x) Cos.\phi + x(Cos.^2\phi - Sin.^2\phi) = 0$ en $a - 4x + 2x\, Cos.\phi = 0;$

uit de laatste vergelijking volgt nu terstond

$$Cos.\phi = \frac{4x - a}{2x} = 2 - \frac{a}{2x},$$

derhalve is

$$Cos.^2\phi - Sin.^2\phi = 2 Cos.^2\phi - 1 = \frac{14x^2 - 8ax + a^2}{2x^2},$$

en nu deze waarden in de eerste onzer beide vergelijkingen overbrengende, komt er

$$\frac{(a - 2x)(4x - a)}{2x} + \frac{14x^2 - 8ax + a^2}{2x} = 0$$

of na herleiding $3x - a = 0$,
waaruit volgt $x = \frac{1}{3}a$.

Hierdoor vinden wij verder $Cos.\phi = 2 - \frac{a}{2x} = \frac{1}{2}$ en dus $\phi = 60°$; $BC = a - 2x = \frac{1}{3}a$, $AE = 2x\ Cos.\phi = \frac{1}{3}a$, $AD = BC + AE = \frac{2}{3}a$ en $I = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}$. Men ziet hieruit, dat het trapezium een halve regelmatige zeshoek moet wezen.

II. Oplossing *van* D. W. Hinsf.

Plaatsen wij tegen het trapezium ABCD (*Fig.* 32), waarvan de hoeken DAB en ADC onderling gelijk zijn, een ander trapezium AB′C′D gelijk en gelijkvormig aan het eerste, zoo, dat deze trapeziums met de langste evenwijdige zijden tegen elkander liggen, dan ontstaat er een zeshoek ABCDC′B′A, die den dubbelen inhoud van het trapezium en ook, indien men de langste evenwijdige zijde niet mede rekent, den dubbelen omtrek van het trapezium heeft. Daar nu onder alle zeshoeken, die denzelfden omtrek hebben, de regelmatige den grootsten inhoud heeft, (Zie J. de Gelder. *Beg. der Meetk.* 3de Druk. § 513.), zal ook onder al de bedoelde trapeziums, waarin de som der zijden AB + BC + CD even groot is, datgene den grootsten inhoud hebben, dat de gedaante van eenen halven regelmatigen zeshoek heeft.

Is alzoo AB + BC + CD $= a$ gegeven, dan zal men slechts met $\frac{1}{3}a$ als straal eenen halven cirkel moeten beschrijven, en in dien halven cirkel, op deszelfs middellijn eenen halven regelmatigen zeshoek moeten plaatsen; deze halve zeshoek zal dan het begeerde grootste trapezium zijn.

LXXXI. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Een der belangrijkste jaartallen in de Vaderlandsche Geschiedenis kan aldus bepaald worden. Wanneer men de vier cijfers, waarmede dit jaartal geschreven wordt, door de letters a, b, c en d voorstelt, en gemakshalve aan het naast elkander plaatsen dezer letters (in plaats van daardoor eene stelkunstige vermenigvuldiging te verstaan) dezelfde beteekenis hecht, die in de cijferkunst het naast elkander plaatsen van cijfers heeft, dan is: 1°. *Indien abcd gedeeld door ab, verminderd wordt met abd gedeeld*

door c, de rest gelijk aan ba; 2°. indien de som van b, c en d door b gedeeld wordt, het quotient gelijk aan het quotient van cd gedeeld door ab; en 3°. c, ab en bc eene meetkunstige reeks. Welk is het bedoelde jaartal?

OPGELOST *door* H. W. BLOEM, M. G. SNOER, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

I. OPLOSSING *van* H. W. BLOEM.

Het is uit den aard der zaak klaar, dat het cijfer der duizendtallen 1 moet wezen; wij hebben dus slechts de drie andere cijfers te bepalen, waartoe dan ook de drie opgegevene eigenschappen genoegzaam zijn.

Stellende het cijfer der honderdtallen door $x - 10$, dat der tientallen door y en dat der eenheden door z voor, zoo geeft het voorstel de drie volgende vergelijkingen:

$$\frac{1000+100(x-10)+10y+z}{10+(x-10)} - \frac{100+10(x-10)+z}{y} = 10(x-10)+1,$$

$$\frac{(x-10)+y+z}{x-10} = \frac{10y+z}{10+(x-10)}$$

en $$y\{10(x-10)+y\} = \{10+(x-10)\}^2.$$

Deze vergelijkingen gaan, na verdrijving der breuken en behoorlijke herleiding, over in

$$10x^2y-199xy+10x^2-10y^2-yz+xz=0 \quad \ldots\ldots (1),$$

$$x^2-9xy-10x+100y+10z=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

en $$x^2-10xy-y^2+100y=0 \quad \ldots\ldots (3).$$

Uit (1) volgt

$$z = \frac{10x^2y-199xy+10x^2-10y^2}{y-x} \quad \ldots (4)$$

en deze waarde in (2) stellende, komt er

$$x^2-9xy-10x+100y+\frac{100x^2y-1990xy+100x^2-100y^2}{y-x}=0$$

of, na verdrijving der breuk, behoorlijke herleiding en deeling door x,

$$x^2-110xy+9y^2-110x+2100y=0;$$

deze vergelijking van (3) aftrekkende en de rest door 10 deelende, vindt men

$$10xy-y^2+11x-200y=0,$$

waaruit volgt $$x = \frac{y^2+200y}{10y+11} \quad \ldots\ldots (5);$$

deze waarde voor x in (3) substituerende, komt er na her-

leiding en deeling door y,

$$199y^3+9930y^2-39879y-12100=0.$$

De eenige naar den aard des voorstels bruikbare wortel dezer vergelijking is $y=4$; alzoo is volgens (5) $x=16$ en volgens (4) $z=8$; en hierdoor verkrijgt men, voor het gevraagde jaartal, 1648.

II. OPLOSSING *van* M. G. SNOER.*

De onbekende cijfers door de letters voorstellende, die in de opgave genoemd zijn, heeft men de volgende vergelijkingen:

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{10a+b}-\frac{100a+10b+d}{c}=10b+a,$$

$$\frac{b+c+d}{b}=\frac{10c+d}{10a+b}$$

en

$$c(10b+c)=(10a+b)^2.$$

Dewijl men nu vier onbekenden en slechts drie vergelijkingen heeft, zoo behoort het voorstel tot de onbepaalde; men zou, de jaartelling in aanmerking nemende, terstond $a=1$ kunnen stellen en daardoor zou het voorstel dan bepaald worden. Wij willen echter liever aantoonen, dat de laatste der drie vergelijkingen, indien men er bij in aanmerking neemt, dat de onbekenden slechts enkele cijfers verbeelden, genoegzaam is, om de drie daarin voorkomende onbekenden a, b en c volkomen te bepalen. Men kan namelijk voor die vergelijking schrijven

$$10bc=(10a+b)^2-c^2$$

of

$$10bc=(10a+b+c)(10a+b-c)\,.\quad (A).$$

Het eerste lid nu van deze vergelijking is door 2 deelbaar, dus moet ook het tweede lid, en bij gevolg een der factoren $10a+b+c$ of $10a+b-c$, door 2 deelbaar wezen; maar omdat in het algemeen, zoo b en c geheele getallen zijn, $b+c$ en $b-c$ gelijktijdig evene of gelijktijdig onevene getallen voorstellen, kan een der factoren van het tweede lid van (A) niet oneven zijn, terwijl de andere even is; alzoo moeten die factoren elk op zich zelven door 2 deelbaar zijn.

Daar het eerste lid van de vergelijking (A) door 5 deelbaar is, moet ook een der factoren van het tweede lid door 5 deelbaar zijn; dewijl reeds aangetoond is, dat elk dezer

factoren even is, moet dus ook een derzelve door 10 deelbaar wezen. Neemt men nu in aanmerking, dat b en c geheele positieve getallen kleiner dan 10 verbeelden, dan kan $10 + b - c$ niet door 10 deelbaar zijn, ten zij men hebbe $b = c$; en de deelbaarheid van $10a + b + c$ kan geen plaats hebben, ten zij $b + c = 0$ of $b + c = 10$ worde genomen.

Stelt men $b = c$, dan verandert (A) in

$$10c^2 = (10a + 2c)\, 10a,$$

waaruit volgt $$c = a \pm a\sqrt{11}$$

en hieraan kan door geene rationale waarden voor a en c voldaan worden, terwijl $a = 0$, onbestaanbaar is met de voorwaarde, dat het jaartal een getal van vier cijfers zijn moet.

Stelt men $b + c = 0$, dan moeten afzonderlijk $b = 0$ en $c = 0$ zijn; hierdoor zou dan volgens (A) ook $a = 0$ worden, hetgeen even zoo met de genoemde voorwaarde niet kan overeenkomen.

Derhalve moet men wel hebben

$$b + c = 10 \quad \text{of} \quad b = 10 - c;$$

hierdoor verandert (A) in

$$10\,(10 - c)\, c = (10a + 10)\,(10a + 10 - 2c),$$

$$(10 - c)\, c = 2(a + 1)\,(5a + 5 - c)$$

of $$c^2 - 2(6 + a)\, c + 10(1 + a)^2 = 0,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt

$$c = 6 + a \pm \sqrt{\{26 - 8a - 9a^2\}}.$$

Hieruit blijkt terstond, dat $a = 1$ moet wezen, omdat $a > 1$ zijnde c onbestaanbaar zou worden; voor $a = 1$, wordt $c = 7 \pm 3$, waarin echter, omdat $c < 10$ moet zijn, het bovenste teeken niet bruikbaar is, dus is $c = 4$; hierdoor wordt nu $b = 10 - c = 6$; en derhalve is alleen de derde vergelijking, waartoe de vraag aanleiding gaf, genoegzaam geweest, om te vinden, dat $a = 1$, $b = 6$ en $c = 4$ moet zijn. Substitueert men deze waarden in een der beide eerste vergelijkingen, dan vindt men dadelijk $d = 8$ en het jaartal is bijgevolg 1648.

Uit deze oplossing blijkt, dat ter bepaling van het jaartal eene van de beide eerste voorwaarden des voorstels gemist kan worden en dat bovendien de opmerking, dat het cij-

fer der duizendtallen uit den aard der zaak 1 moet zijn, niet volstrekt noodig is.

LXXXII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Wanneer men het gebroken $\frac{1}{a}$ *in eene tiendeelige breuk ontwikkelt, dan zal, indien a een ondeelbaar getal van eene der vormen* $40x + 1$, $40x + 3$, $40x + 9$, $40x + 13$, $40x + 27$, $40x + 31$, $40x + 37$ *of* $40x + 39$ *is, het aantal cijfers in het repetendum of* $\frac{a-1}{2}$ *of een evenmatig deel van* $\frac{a-1}{2}$ *zijn. Men vraagt naar het bewijs?*

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN *en* J. S. SPEIJER.

I. OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Men heeft hier twee gevallen te onderscheiden; *ten eerste,* wanneer het ondeelbare getal a begrepen is in eene der vormen $40x + 1$, $40x + 9$, $40x + 31$ of $40x + 39$; en *ten tweede,* wanneer hetzelve van eene der vormen $40x + 3$; $40x + 13$, $40x + 27$, $40x + 37$ is.

In het eerste geval bestaan er (Zie LEGENDRE, *Essai sur la Theorie des Nombres,* pag. 260) zulke geheele waarden voor y en z, dat men heeft

$$a = y^2 - 10z^2$$

of

$$10z^2 = y^2 - a.$$

Verheft men de beide leden dezer vergelijking tot de magt van $\frac{a-1}{2}$, dan komt er

$$10^{\frac{a-1}{2}} z^{a-1} = y^{a-1} - \frac{a-1}{2} y^{a-3} a + enz.,$$

van welke vergelijking, omdat $\frac{a-1}{2}$ noodzakelijk een geheel getal is, het tweede lid uit een bepaald aantal termen bestaat, die alle, op den eersten na, door a deelbaar zijn.

De deeling van dien eersten term nu door a, laat, volgens het Theorema van FERMAT, (Zie LEGENDRE, *u. s.* pag. 166) 1 tot rest over; het geheele tweede lid der laatste vergelijking is dus van den vorm $ma + 1$, alzoo moet ook het eerste lid dier vergelijking, dat is het product

$10^{\frac{a-1}{2}} z^{a-1}$, denzelfden vorm hebben. Maar een der factoren van dit product t. w. z^{a-1} heeft, wederom volgens het Theorema van FERMAT, almede den vorm $ma + 1$; de andere factor van dat product t. w. $10^{\frac{a-1}{2}}$ moet dus insgelijks denzelfden vorm hebben; $10^{\frac{a-1}{2}}$, door a gedeeld wordende, laat dus 1 tot rest over, en bijgevolg zullen de eerste $\frac{a-1}{2}$ cijfers, die men bij de ontwikkeling van het gebroken $\frac{1}{a}$ verkrijgt, bij eene verdere ontwikkeling telkens op nieuw te voorschijn komen.

In het tweede geval bestaan er (Zie LEGENDRE, *u. s.* pag. 260) zoodanige geheele waarden voor y en z, dat men heeft

$$a = 2y^2 - 5z^2$$

of

$$10z^2 = (2y)^2 - 2a.$$

Verheft men nu weder de leden dezer vergelijking tot de magt van $\frac{a-1}{2}$, dan komt er

$$10^{\frac{a-1}{2}} z^{a-1} = (2y)^{a-1} - \frac{a-1}{2} (2y)^{a-3}\, 2a + \text{enz.},$$

uit welke vergelijking, even als in het vorige geval, volgt dat $10^{\frac{a-1}{2}}$ den vorm $ma + 1$ moet hebben, en dat dus, bij de ontwikkeling van het gebroken $\frac{1}{a}$, de eerste $\frac{a-1}{2}$ cijfers, die men verkrijgt, voortdurend zullen terugkeeren.

In beide deze gevallen zal dus het repetendum òf al die telkens terugkeerende $\frac{a-1}{2}$ cijfers bevatten, òf uit minder cijfers bestaan, zoodanig, dat na twee- of meermalen die cijfers in de ontwikkeling te hebben verkregen, het getal cijfers juist tot $\frac{a-1}{2}$ zal zijn aangegroeid, als wanneer het getal cijfers van het eigenlijke repetendum een evenmatig deel van $\frac{a-1}{2}$ zal wezen.

II. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Het gestelde zal bewezen zijn, indien men kan aantoo-

nen, dat, zoo a ondeelbaar is en de in het voorstel opgegevene vormen heeft, $10^{\frac{a-1}{2}} - 1$ door a deelbaar is.

Volgens het Theorema van FERMAT, (waarvan onder anderen het bewijs gevonden wordt in het II. DEEL der *Verzam. van Wisk. Voorst.* des Genootschaps CCIV. VOORSTEL) zal, a ondeelbaar en geen deeler van N zijnde, $\frac{N^{a-1} - 1}{a}$ een geheel getal zijn. Daar $a - 1$ noodzakelijk een even getal is, zal men de uitdrukking $N^{a-1} - 1$ kunnen ontbinden in de twee factoren $N^{\frac{a-1}{2}} + 1$ en $N^{\frac{a-1}{2}} - 1$; een van deze beide zal dus door a deelbaar moeten wezen.

Nemen wij nu de door LEGENDRE opgegevene notatie aan (Zie *Essai sur la Theorie des Nombres*, pag. 170), dat is, stellen' wij door het teeken $\left(\frac{N}{a}\right)$ de rest voor der deeling van $N^{\frac{a-1}{2}}$ door a, dan kan, zoo als ter aangehaalde plaats gebleken is, deze rest niet anders dan $+1$ of -1 zijn, zoodat altijd $\left(\frac{N}{a}\right) = \pm 1$ is. In ons geval hebben wij dan te bewijzen, dat zoo a de opgegevene vormen heeft $\left(\frac{10}{a}\right) = +1$ zijn zal.

Volgens de aangenomene notatie is:

$\left(\frac{10}{a}\right) = \pm 1$, naar gelang $10^{\frac{a-1}{2}}$ de vormen $ma \pm 1$,

$\left(\frac{2}{a}\right) = \pm 1$, — — $2^{\frac{a-1}{2}}$ — — $ma \pm 1$,

$\left(\frac{5}{a}\right) = \pm 1$ — — $5^{\frac{a-1}{2}}$ — — $ma \pm 1$

heeft; men zal dus altijd hebben

$$\left(\frac{10}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right) \times \left(\frac{5}{a}\right).$$

Is nu a van de vormen $40x \pm 1$, $40x \pm 7$, $40x \pm 9$ en $40x \pm 17$, dat is, van den vorm $8n \pm 1$, dan zal $\left(\frac{2}{a}\right) = +1$ zijn; maar is a van de vormen $40x \pm 3$, $40x \pm 11$, $40x \pm 13$ en $40x \pm 19$, dat is, van den vorm

$8n \pm 3$, dan zal $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$ wezen. (Zie LEGENDRE, *u. s.* pag. 181).

Om de waarde van $\left(\frac{5}{a}\right)$ te bepalen, maken wij gebruik van de door LEGENDRE (Zie *Essai*, p. 198) gevondene wederkeerigheid der ondeelbare getallen, volgens welke, omdat er onder de ondeelbare getallen 5 en a zeker één is, dat niet den vorm $4x + 3$ heeft,

$$\left(\frac{5}{a}\right) = \left(\frac{a}{5}\right)$$

moet wezen. Omdat nu $\left(\frac{a}{5}\right)$ de rest voorstelt, die er overblijft als men $a^{\frac{5-1}{2}}$ of a^2 door 5 deelt, zoo is klaarblijkelijk, indien a de vormen $40x \pm 1$, $40x \pm 9$, $40x \pm 11$ $40x \pm 19$, dat is den vorm $5n \pm 1$ heeft, $\left(\frac{a}{5}\right) = +1$ en dus ook $\left(\frac{5}{a}\right) = +1$. Maar is a van de vormen $40x \pm 3$, $40x \pm 7$, $40x \pm 13$ en $40x \pm 17$, dat is, van den vorm $5n \pm 3$, dan is even klaarblijkelijk -1 de rest der deeling van a^2 door 5, en dus $\left(\frac{a}{5}\right) = -1$ of ook $\left(\frac{5}{a}\right) = -1$.

Derhalve hebben wij:

voor de vormen $a = 40x \pm 1$ en $40x \pm 9$,

$$\left(\frac{2}{a}\right) = +1, \left(\frac{5}{a}\right) = +1, \text{ dus } \left(\frac{10}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right) \times \left(\frac{5}{a}\right) = +1;$$

voor de vormen $a = 40x \pm 3$ en $40x \pm 13$,

$$\left(\frac{2}{a}\right) = -1, \left(\frac{5}{a}\right) = -1, \text{ dus } \left(\frac{10}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right) \times \left(\frac{5}{a}\right) = +1;$$

en hierdoor is het gestelde bewezen.

AANMERKINGEN. 1°. Het geval, dat niet al de $\frac{a-1}{2}$ terugkeerende cijfers het repetendum uitmaken, kan zich slechts dan voordoen, als $\frac{a-1}{2}$ een deelbaar getal is. Alsdan zal namelijk de uitdrukking $10^{\frac{a-1}{2}} - 1$, in twee factoren

kunnen ontbonden worden, waarvan (r een evenmatig deel van $\frac{a-1}{2}$ zijnde) de eene door 10^r-1 kan worden voorgesteld. Is nu 10^r-1 door a deelbaar, dan is klaarblijkelijk het aantal cijfers in het repetendum ook slechts r. Zoo is, bij voorbeeld, voor $a=41$, als wanneer a een ondeelbaar getal van den vorm $40x+1$ is, $\frac{a-1}{2}=20$; nu heeft $10^{20}-1$, tot factor 10^5-1; $10^5-1=99999$ is door 41 deelbaar; derhalve zijn er 5 cijfers in het repetendum van $\frac{1}{41}=0,0243902439\ldots\ldots$ en dit getal 5 is een evenmatig deel van $\frac{a-1}{2}=20$.

2°. Volgens hetgeen ten bewijze der opgegevene stelling is bijgebragt, hebben wij ook nog:

voor de vormen $a=40x\pm7$ en $40x\pm17$,

$$\left(\frac{2}{a}\right)=+1, \left(\frac{5}{a}\right)=-1, \text{dus} \left(\frac{10}{a}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)\times\left(\frac{5}{a}\right)=-1;$$

en voor de vormen $a=40x\pm11$ en $40x\pm19$,

$$\left(\frac{2}{a}\right)=-1, \left(\frac{5}{a}\right)=+1, \text{dus} \left(\frac{10}{a}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)\times\left(\frac{5}{a}\right)=-1;$$

alsdan is niet $10^{\frac{a-1}{2}}-1$, maar wel $10^{\frac{a-1}{2}}+1$ en dus in allen gevalle $10^{a-1}-1=\left(10^{\frac{a-1}{2}}-1\right)\left(10^{\frac{a-1}{2}}+1\right)$ door a deelbaar. Omdat $10^{\frac{a-1}{2}}-1$ nu niet door a deelbaar is, is het aantal cijfers in het repetendum noch $\frac{a-1}{2}$, noch een evenmatig deel van $\frac{a-1}{2}$; maar omdat $10^{a-1}-1$ wel door a deelbaar is, is dit aantal cijfers of $a-1$, of een evenmatig deel van $a-1$; dit aantal moet dus noodwendig een even getal zijn. Hieruit volgt de belangrijke stelling, dat, zoo a een ondeelbaar getal van de laatstgenoemde vormen is, het aantal cijfers in het repetendum van $\frac{1}{a}$ voorkomende altijd even zal zijn, en dus op de ontwikkeling van dat repetendum altijd de eigenschap kan toegepast worden, die in de Aanmerking op het XVI. Voorstel is bewezen.

3°. Zoo a de vormen heeft in de vorige aanmerking opgegeven, kan het geval, dat het repetendum niet al de steeds terugkeerende $a - 1$ cijfers bevat, zich slechts voordoen, indien $\frac{a-1}{2}$ een factor r hebbende, die een oneven aantal malen in $\frac{a-1}{2}$ begrepen is, ook de uitdrukking $10^{\frac{a-1}{2}} + 1$ eenen factor $10^r + 1$ heeft en tevens $10^r + 1$ door a deelbaar is; alsdan zal het repetendum $2r$ cijfers bevatten, omdat $10^r + 1$ door a deelbaar zijnde, ook $10^{2r} - 1$ door a deelbaar is. Zoo is, bij voorbeeld, voor $a = 73$, als wanneer a een ondeelbaar getal van den vorm $40x - 7$ is, $\frac{a-1}{2} = 36$; nu heeft $10^{36} + 1$ tot factor $10^4 + 1$; $10^4 + 1 = 10001$ is door 73 deelbaar, derhalve zijn er 8 cijfers in het repetendum van $\frac{1}{73} = 0{,}0136986301369863\ldots\ldots$; en dit aantal 8 is een even getal en een evenmatig deel van $73 - 1 = 72$.

4°. Omdat, na ontwikkeling van het repetendum der breuk $\frac{1}{a}$, de rest der deeling 1 wordt, zoo zal, als de teller der breuk b is ($b < a$ zijnde), de rest der deeling b zijn; zoodat de bewezene eigenschappen evenzeer zullen gelden, voor alle eigenlijke breuken $\frac{b}{a}$, al is de teller niet gelijk 1, mits slechts a een ondeelbaar getal van de opgegevene vormen zij.

LXXXIII. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

Uit het middelpunt M (*Fig.* 33) *van eenen cirkel, en uit een standvastig punt* A *van zijnen omtrek, worden lijnen* MB *en* AB, *naar een willekeurig punt* B *van den omtrek getrokken; en daarna wordt op den straal* MB, *van* M *naar* B, *een stuk* MP *gelijk aan de koorde* AB *uitgezet. Men vraagt de vergelijking en de voornaamste eigenschappen te vinden van de kromme lijn, waarin al de op deze wijze verkregene punten* P *gelegen zijn?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, D. W. Hinse, W. J.

C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER en L. VAN DE KASTEELE.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat het punt P (Fig. 33) volgens de opgave geconstrueerd zijn, zoodanig, dat MP $=$ AB is, en nemen wij M als pool en MA als oorsprong der hoeken aan; stellen wij alzoo *hoek* AMP $= \phi$, MP $= z$ en AM $= r$, dan is AB $= r$ *koorde* $\phi = 2r\ Sin.\frac{1}{2}\phi$ en dus, omdat MP $=$ AB is, ook

$$z = 2r\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

hetwelk nu de polaire vergelijking is der bedoelde kromme lijn.

Voor $\phi = 0$, wordt ook $z = 0$, derhalve is M een punt der kromme en de lijn AM raakt haar in dit punt.

Groeit ϕ, van nul af beginnende, langzamerhand aan, dan zal ook z aanvankelijk aangroeijen; voor $\phi = 60°$ wordt $z = r$; voor $\phi = 90°$ wordt $z = r\sqrt{2}$; voor $\phi = 120°$ wordt $z = r\sqrt{3}$; en voor $\phi = 180°$ wordt $z = 2r$. Laat dus AMQ $= 60°$, AMR $= 90°$, AMS $= 120°$ worden genomen, en laat AM aan den kant van M verlengd worden, dan zal men MQ gelijk aan den straal des cirkels, MR gelijk aan de zijde des ingeschreven vierkants, MS gelijk aan de zijde des ingeschreven regelmatigen driehoeks, en MT gelijk aan de middellijn moeten nemen, om de punten Q, R, S en T der kromme lijn te verkrijgen; hetgeen trouwens even gemakkelijk uit de constructie, die ter bepaling der kromme is opgegeven, kan afgeleid worden. Van $\phi = 0$ tot $\phi = 180°$ verkrijgt men alzoo het gedeelte MPQRST der kromme lijn, den cirkel in Q snijdende.

Het aangroeijen van z duurt niet verder voort, dan totdat $\phi = 180°$ is; want, zoodra $\phi > 180°$ wordt, zal $Sin.\frac{1}{2}\phi < 1$ en dus $z < 2r$ worden; voor $\phi = 180°$ is dus $z = 2r$ een maximum.

Stelt men $\phi = 180° - \alpha$ of $\phi = 180° + \alpha$, zoo vindt men in beide gevallen $z = 2r\ Cos.\frac{1}{2}\alpha$. Hieruit volgt, dat men van $\phi = 180°$ tot $\phi = 360°$ een gedeelte TS'R'Q'M der kromme lijn verkrijgt, bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig met het gedeelte TSRQM zijnde, totdat, voor

$\phi = 360°$, $z = 0$ wordt en de kromme weder in het punt M komt.

Groeit ϕ verder dan 360° aan, zoo wordt z negatief; voor $\phi = 360° + \alpha$ wordt $z = -2r\ Sin.\frac{1}{2}\alpha$; deze negatieve waarde van z is even groot als de positieve waarde, die z voor $\phi = \alpha$ verkrijgt. Is dus P het punt der kromme lijn, dat door $\phi = \alpha$ bepaald wordt, dan zal, als men, op het verlengde van MB, Mp = MP neemt, p het punt zijn, dat door $\phi = 360° + \alpha$ wordt bepaald. Hieruit volgt verder, dat van $\phi = 360°$ tot $\phi = 540°$ een gedeelte Mpqst der kromme lijn ontstaat, dat gelijk en gelijkvormig is met het gedeelte MPQST; en dat van $\phi = 540°$ tot $\phi = 720°$ een gedeelte ts′q′M geboren wordt, dat gelijk en gelijkvormig is met het gedeelte TS′Q′M en bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig met elk der gedeelten tsqM en TSQM.

Laat men ϕ verder dan tot 720° aangroeijen, zoo komt men achtervolgens op de reeds vroeger verkregene punten der kromme lijn terug; haar loop strekt zich dus van $\phi = 0$ tot $\phi = 720°$ uit en wordt in de figuur aangewezen door de letters MPQRSTS′R′Q′MpqR′sts′Rq′M. Men ziet hieruit, dat de kromme lijn in M geen keerpunt heeft, hetgeen men ligtelijk zou kunnen vermoeden, indien men slechts het gedeelte, dat van $\phi = 0$ tot $\phi = 360°$ ontstaat, geconstrueerd had; in M gekomen zijnde, keert de kromme lijn niet terug, maar vervolgt zij haren loop, na de lijn AMT in M geraakt te hebben.

Om de voornaamste eigenschappen der kromme lijn op te sporen, kunnen wij ons, daar zij uit vier gelijke en gelijkvormige deelen bestaat, tot het gedeelte MPQRST bepalen.

De vergelijking (1) differentiërende, vindt men terstond

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = r\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = -\tfrac{1}{2}r\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

De hoek ψ, dien de raaklijn van eenig punt eener kromme lijn met den voerstraal van dat punt maakt, wordt in het algemeen uitgedrukt door de formule

$$Tang.\,\psi = \frac{z\delta\phi}{\delta z} = z : \frac{\delta z}{\delta\phi},$$

hierin de waarden (1) en (2) substituerende, vinden wij voor onze kromme lijn

$$Tang.\,\psi = \frac{2r Sin.\frac{1}{2}\phi}{r Cos.\frac{1}{2}\phi} = 2 Tang.\,\tfrac{1}{2}\phi \quad . \quad (4).$$

Voor $\phi = 0$, wordt $Tang.\,\psi = 0$ en $\psi = 0$; de lijn AM is dus de raaklijn van het punt M.

Voor $\phi = 180°$, wordt $Tang.\,\psi = \infty$ en $\psi = 90°$; de raaklijn in T staat dus loodregt op MT.

Voor $\phi = 90°$, wordt $Tang.\,\psi = 2$; makende dus $MC = 2\,MR$ en trekkende RC, zoo is RC de lijn, die de kromme in R raakt, want nu is $Tang.\,MRC = \frac{MC}{MR} = 2$. Deze hoek MRC dubbel genomen wordende, verkrijgt men klaarblijkelijk den hoek, waaronder de kromme zich zelve in R snijdt.

Voor de punten, welker raaklijnen evenwijdig met AM loopen, moet men hebben $\psi + \phi = 180°$ of $Tang.\,\phi = -Tang.\,\psi$. Dit met de waarde (4) verbindende en in aanmerking nemende, dat in het algemeen $Tang.\,\phi = \frac{2Tang.\frac{1}{2}\phi}{1 - Tang.^2\frac{1}{2}\phi}$ is, verkrijgt men

$$\frac{2Tang.\frac{1}{2}\phi}{1 - Tang.^2\frac{1}{2}\phi} = -2\,Tang.\tfrac{1}{2}\phi;$$

aan deze vergelijking voldoet vooreerst $Tang.\frac{1}{2}\phi = 0$ of $\phi = 0$, waardoor het punt M wordt aangewezen; verder komt er, na deeling door $2Tang\,\frac{1}{2}\phi$,

$$\frac{1}{1 - Tang.^2\frac{1}{2}\phi} = -1,$$

waaruit volgt:

$$Tang.\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{2},$$

$$Tang.\,\phi = \frac{2Tang.\frac{1}{2}\phi}{1 - Tang.^2\frac{1}{2}\phi} = -2\sqrt{2},$$

$$Sin.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{Tang.\frac{1}{2}\phi}{\sqrt{(1 + Tang.^2\frac{1}{2}\phi)}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

en

$$Cos.\phi = -\frac{1}{\sqrt{(1 + Tang.^2\phi)}} = -\tfrac{1}{3};$$

neemt men dus $ME' = \frac{1}{3}\,MA'$, stelt men vervolgens uit E' eene loodlijn op MA', den cirkel in F' snijdende, trekt

men AF′ en MF′ en maakt men eindelijk MG′ $=$ AF′, dan zal G′ het punt der kromme zijn, waar de raaklijn evenwijdig met AM loopt.

De afstand van dit punt G′ tot de lijn MR wordt gevonden, indien men voor de bovenstaande waarde van ϕ, de overeenkomstige waarde der uitdrukking $s\ Cos.\ \phi$ opmaakt; men heeft dan voor het punt G′,

$$s\ Cos.\ \phi = 2r\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi\ Cos.\ \phi = -\tfrac{1}{3}r\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Voor de punten, welker raaklijnen loodregt op AM staan, moet men hebben $\psi + \phi = 90°$ of $Cot.\ \psi = Tang.\ \phi$.

Daar nu volgens (4) $Cot.\ \psi = \frac{1}{2Tang.\frac{1}{2}\phi} = \frac{1}{2}Cot.\frac{1}{2}\phi$ en

in het algemeen $Tang.\phi = \frac{2Cot.\frac{1}{2}\phi}{Cot.^2\frac{1}{2}\phi - 1}$ is, zoo volgt hieruit

$$\tfrac{1}{2}Cot.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{2Cot.\frac{1}{2}\phi}{Cot.^2\frac{1}{2}\phi - 1};$$

aan deze vergelijking voldoet vooreerst $Cot.\frac{1}{2}\phi = 0$ of $\phi = 180°$, waardoor het punt T wordt aangewezen; verder komt er, na deeling door $\frac{1}{2}Cot.\frac{1}{2}\phi$

$$1 = \frac{4}{Cot.^2\frac{1}{2}\phi - 1},$$

waaruit volgt:

$$Cot.\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{5},$$

$$Tang.\ \phi = \frac{2Cot.\frac{1}{2}\phi}{Cot.^2\frac{1}{2}\phi - 1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$Sin.\tfrac{1}{2}\phi = \frac{1}{\sqrt{(1 + Cot.^2\frac{1}{2}\phi)}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

en $$Cos.\ \phi = \frac{1}{\sqrt{(1 + Tang.^2\phi)}} = \tfrac{2}{3};$$

neemt men dus ME $= \frac{2}{3}$ MA, stelt men daarna op MA uit het punt E eene loodlijn, die den cirkel in F snijdt, trekt men AF en MF en maakt men eindelijk MG $=$ AF, dan zal G het punt zijn, waar de raaklijn evenwijdig met MR loopt.

De afstand van dit punt G tot de lijn MR wordt wederom gevonden, indien men voor de laatste waarde van ϕ de overeenkomstige waarde der uitdrukking $s\ Cos.\ \phi$ opmaakt; men vindt dus voor het punt G

$$s\ Cos.\ \phi = 2r\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi\ Cos.\ \phi = \tfrac{2}{3}r\sqrt{\tfrac{2}{3}};$$

vergelijkt men deze waarde van $s Cos.\ \phi$ met die, welke

vroeger voor het punt G' is gevonden, dan ziet men dat de punten G en G' op gelijke afstanden ter wederzijde van de lijn MR gelegen zijn.

Om door een willekeurig punt P der kromme eene raaklijn aan dezelve te trekken, trekke men uit A' eene lijn A'H, die in I regthoekig door den voerstraal van het punt P of haar verlengde gaat; op die lijn make men IH = 2 A'I en vereenige het punt H met het punt B, waarin de cirkel door den voerstraal van het punt P gesneden wordt; dan zal de lijn PK, door P evenwijdig met BH getrokken, de begeerde raaklijn wezen. Want stellende *hoek* AMP $= \phi$, dan is volgens deze constructie:

$$MI = MA' \, Cos. \, A'MI = r \, Cos. \, \phi,$$

$$A'I = MA' \, Sin. \, A'MI = r \, Sin. \, \phi,$$

$$BI = BM + MI = r + r \, Cos. \, \phi = 2r Cos.^2 \tfrac{1}{2}\phi,$$

$$HI = 2A'I = 2r Sin. \phi = 4r Sin. \tfrac{1}{2}\phi \; Cos. \tfrac{1}{2}\phi,$$

en $Tang. MPK = Tang. IBH = \frac{HI}{BI} = \frac{4r Sin. \frac{1}{2}\phi Cos. \frac{1}{2}\phi}{2r Cos.^2 \frac{1}{2}\phi} = 2 Tang. \tfrac{1}{2}\phi;$

en deze waarde is volgens (4) juist die, welke gevonden is voor de Tangens van den hoek, dien de raaklijn van eenig punt met den voerstraal maakt.

Om den kromtestraal voor eenig punt onzer kromme te vinden, brengen wij de waarden (1), (2) en (3) over in de algemeene formule

$$R = \frac{\left\{ z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 - z \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}},$$

dan komt er na behoorlijke herleiding

$$R = \frac{r\sqrt{(1 + 3 Sin.^2 \frac{1}{2}\phi)^3}}{2 + 3 Sin.^2 \frac{1}{2}\phi};$$

nu is er klaarblijkelijk geene waarde voor ϕ mogelijk, die $R = 0$ of $R = \infty$ zou geven, en daar voor buig- en keerpunten de kromtestralen in het algemeen nul of oneindig moeten wezen, zoo blijkt hieruit ten overvloede, dat de kromme lijn geene buig- of keer-punten heeft.

Voor $\phi = 0$ is $R = \frac{1}{2}r$; voor $\phi = 180°$ is $R = \frac{8}{5}r$, in het punt M is dus de kromtestraal gelijk aan de helft, en in het punt T is dezelve gelijk $\frac{8}{5}$ van den straal des cirkels.

Om den inhoud van eenen polairen sector eener kromme lijn te vinden, hebben wij de algemeene formule

$$I = \frac{1}{2}\int z^2 \partial\phi;$$

hierin voor z de waarde (1) stellende, hebben wij voor onze kromme lijn

$$I = 2r^2 \int Sin.^2 \tfrac{1}{2}\phi\, \partial\phi = r^2 \int (1 - Cos.\phi)\partial\phi = r^2 (\phi - Sin.\phi) \ldots (5),$$

bij welke integraal, zoo wij de inhouden van $\phi = 0$ af willen beginnen te rekenen, geene standvastige moet gevoegd worden.

Dewijl de inhoud van een cirkelsegment, waarvan ϕ de boog en r de straal is, door $\frac{1}{2}r^2(\phi - Sin.\phi)$ wordt uitgedrukt, is de inhoud van eenen polairen sector der kromme lijn het dubbel van den inhoud van het overeenkomstige cirkelsegment; wij hebben dus, bij voorbeeld,

Inh. pol. sect. MPM $=$ 2 *Inh. cirk. segm.* ABA,

Inh. pol. sect. MPQM $=$ 2 *Inh. cirk. segm.* ABQA,

Inh. pol. sect. MPQRM $=$ 2 *Inh. cirk. segm.* ABQDA $= \frac{1}{2}r^2\pi - r^2$.

Door verdubbeling van dezen laatsten inhoud, hebben wij

$$Inh.\ knoop = r^2\pi - 2r^2;$$

de inhoud van elk der knoopen is dus gelijk aan dien van den cirkel, verminderd met het in den cirkel beschreven vierkant.

Stellen wij in (5) $\phi = 2\pi$, dan komt er

$$Inh.\ \mathrm{MPQRSTS'R'Q'M} = 2r^2\pi;$$

deze inhoud is dus het dubbel van dien des cirkels.

Verminderen wij dezen laatsten inhoud met dien der beide knoopen, dan komt er

$$Inh.\ \mathrm{Mq'RSTS'R'qpM} = 4r^2;$$

deze inhoud is dus gelijk aan dien van het vierkant op de middellijn des cirkels beschreven.

Tellen wij eindelijk de beide laatstgevondene inhouden bij elkander op, dan komt er voor den inhoud van het geheele figuur, door den buitensten omtrek van de kromme ingesloten,

$$Inh.\ \mathrm{RSTS'R's\,t\,s'R} = 2r^2(\pi + 2).$$

Laat men eene kromme lijn om den oorsprong der hoeken omwentelen, dan wordt de inhoud van het omwentelingsligchaam, door eenen polairen sector voortgebragt, gevonden door de algemeene formule

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\int z^3 Sin.\ \phi\,\partial\phi;$$

hierin de waarde (1) overbrengende, komt er voor onze kromme lijn

$$V = \tfrac{16}{3}\pi r^3 \int Sin.^3 \tfrac{1}{2}\phi Sin.\phi \delta\phi = \tfrac{32}{3}\pi r^3 \int Sin.^4 \tfrac{1}{2}\phi Cos. \tfrac{1}{2}\phi \delta\phi$$

$$= \tfrac{64}{3}\pi r^3 \int Sin.^4 \tfrac{1}{2}\phi \delta. Sin. \tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{64}{15}\pi r^3 Sin.^5 \tfrac{1}{2}\phi \quad . \; . \; . \quad (6),$$

bij welke integraal wederom geene standvastige moet gevoegd worden, indien men de omwentelende sectoren bij $\phi = 0$ laat beginnen.

Stelt men in (6) $\phi = 90°$, dan komt er

$$Inh.\ omw.\ MPQRM = \tfrac{8}{15}\pi r^3 \sqrt{2};$$

en door verdubbeling hiervan vindt men

$$Inh.\ omw.\ knoop = \tfrac{16}{15}\pi r^3 \sqrt{2}.$$

Stelt men in (6) $\phi = 180°$, dan vindt men voor het omwentelingsligchaam, waarvan MPQRSTS′R′Q′M de doorsnede is,

$$Inh.\ omw.\ MPQRSTM = \tfrac{64}{15}\pi r^3,$$

dat is $3\tfrac{1}{5}$ maal den bol, die r tot straal heeft.

Trekt men hiervan den inhoud af, die door de omwenteling van den knoop wordt voortgebragt, dan bekomt men

$$Inh.\ omw.\ Mq'RSTM = \tfrac{16}{15}\pi r^3 \;(4 - \sqrt{2}).$$

Voegt men de beide laatstgevondene inhouden bij elkander, dan komt er eindelijk, voor den inhoud van het geheele omwentelingsligchaam,

$$Inh.\ omw.\ ligch. = \tfrac{16}{15}\pi r^3 \;(8 - \sqrt{2}).$$

Aanmerking van J. S. Speijer. Beschrijft men eene gewone epicycloide, in M haar keerpunt hebbende, en welks vaste cirkel het middelpunt in A′ en A′M tot straal heeft, dan is de vergelijking van die epicycloïde, altijd M de pool en AM de oorsprong der hoeken zijnde,

$$z' = 4r\, Sin.^2 \tfrac{1}{2}\phi' ;$$

daar nu $\qquad z = 2r\, Sin. \tfrac{1}{2}\phi$

de vergelijking der behandelde kromme lijn is, heeft men door de eerste vergelijking met r te vermenigvuldigen en de tweede in het vierkant te brengen;

$$z'r = 4r^2 Sin.^2 \tfrac{1}{2}\phi' \text{ en } z^2 = 4r^2 Sin.^2 \tfrac{1}{2}\phi,$$

zoodat voor gelijke waarden van ϕ en ϕ'

$$z^2 = z'r$$

is. De voerstraal van eenig punt onzer kromme is dus middenevenredig, tusschen den overeenkomstigen voerstraal de

genoemde epicycloide en den straal van den voortbrengenden cirkel.

Daar verder

$$z = 2r \, Sin. \tfrac{1}{2}\phi = \pm \sqrt{z'r}$$

positief of negatief is, naar gelang ϕ kleiner of grooter dan 360° genomen wordt, zou onze geheele kromme lijn kunnen geconstrueerd worden, door op elken voerstraal eener epicycloide, de genoemde middenevenredige ter wederzijde van de pool uit te zetten.

Vergelijkt men alleen het gedeelte MPQRSTS'R'Q'M der behandelde kromme lijn met de epicycloide, dan vindt men, dat de as, de inhoud en het omwentelingsligchaam van de laatste, respectievelijk tweemaal, driemaal en vijfmaal zoo groot zijn, als de as, de inhoud en het omwentelingsligchaam tot het genoemde gedeelte behoorende.

LXXXIV. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

Men begeert de uitdrukking $\dfrac{\partial x}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)}}$ *te integreren?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. S. SPEIJER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, L. VAN DE KASTEELE, F. C. RADIJS *en* D. W. HINSE.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat y de te vindene integraal zijn, dan is

$$\partial y = \frac{\partial x}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (1);$$

stellen wij nu

$$\sqrt{(1-x^2)} = z\sqrt{(1-ax^2)} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

dan wordt hieruit gevonden

$$x = \sqrt{\frac{z^2-1}{az^2-1}}, \quad \partial x = \frac{(a-1)\, z\partial z}{(az^2-1)\sqrt{(az^2-1)\,(z^2-1)}},$$

$$1-ax^2 = \frac{a-1}{az^2-1} \text{ en } \sqrt{(1-x^2)} = \frac{z\sqrt{(a-1)}}{\sqrt{(az^2-1)}};$$

door substitutie dezer waarden verandert (1) in

$$\partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{(a-1)\,(z^2-1)}} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Is nu $a > 1$, dan schrijft men voor (3)

$$\delta y = \frac{1}{\sqrt{(a-1)}} \cdot \frac{\delta x}{\sqrt{(x^2-1)}},$$

waaruit volgt

$$y = \frac{1}{\sqrt{(a-1)}} \int \frac{\delta x}{\sqrt{(x^2-1)}};$$

is echter $a < 1$, dan schrijft men voor (3)

$$\delta y = \frac{1}{\sqrt{(1-a)}} \cdot \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

waaruit volgt

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1-a)}} \int \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

daar nu, zoo als algemeen bekend is, (Zie onder anderen I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* Tweede Druk. § 186.)

$$\int \frac{\delta x}{\sqrt{(x^2-1)}} = Nep.\ Log. \left\{ x + \sqrt{(x^2-1)} \right\}$$

en $$\int \frac{\delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = Boog\ Sin. x$$

is, hebben wij:

$$\text{voor } a > 1, y = \frac{1}{\sqrt{(a-1)}} Nep.Log. \left\{ x + \sqrt{(x^2-1)} \right\} + C .. (4)$$

$$\text{en voor } a < 1, y = \frac{1}{\sqrt{(1-a)}} . Boog\ Sin. x + C' \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Verder is volgens (2)

$$x = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}} \text{ en dus } \sqrt{(x^2-1)} = \mp x \sqrt{\frac{a-1}{1-ax^2}},$$

en door substitutie dezer waarden, veranderen de vergelijkingen (4) en (5), na herleiding, in

$$y = \frac{1}{\sqrt{(a-1)}} Nep.\ Log. \frac{x\sqrt{(a-1)} + \sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-ax^2)}} + C .. (6)$$

$$\text{en } y = \frac{1}{\sqrt{(1-a)}} Boog.\ Sin. \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}} + C' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Indien $a = 1$ is, kunnen deze formulen geen van beide gebruikt worden, maar dan is

$$\delta y = \frac{\delta x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

waaruit men (Zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 208) terstond vindt

$$y = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} + C'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Willen wij de standvastigen zoodanig bepalen, dat de integralen voor $x = 0$ verdwijnen, dan vinden wij, dat $C = 0$, $C'' = 0$ en $C' = \frac{-\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1-a)}}$ moet genomen worden; houden wij dan verder bij (7) in het oog, dat *Boog Sin.* $p - \frac{1}{2}\pi = -$ *Boog Cos.* p *is*, dan komt er ten laatste:

$$\text{voor } a > 1,\ y = \frac{1}{\sqrt{(a-1)}} \text{ Nep. Log. } \frac{x\sqrt{(a-1)}+\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-ax^2)}},$$

$$\text{voor } a < 1,\ y = -\frac{1}{\sqrt{(1-a)}} \text{ Boog Cos. } \sqrt{\frac{1-x^2}{1-ax^2}}$$

$$\text{en voor } a = 1,\ y = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

LXXXV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Men vraagt de uitdrukking $Sin.^5\frac{1}{2}\phi\ Cos.\phi\ Sin.\phi\ \partial\phi$ *te integreren?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, S. DIK, CORNSZ., D. W. HINSE *en* L. VAN DE KASTEELE.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Omdat $Sin\,\phi = 2Sin.\frac{1}{2}\phi\ Cos.\frac{1}{2}\phi$ en $Cos\,\phi = 1 - 2\,Sin.^2\frac{1}{2}\phi$ is, hebben wij dadelijk:

$$\int Sin.^5\tfrac{1}{2}\phi\, Cos\,\phi\ Sin.\phi\ \partial\phi = 2\int Sin.^6\tfrac{1}{2}\phi(1-2Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi)Cos\tfrac{1}{2}\phi\,\partial\phi$$
$$= 4\int Sin.^6\tfrac{1}{2}\phi\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi\,\partial.\tfrac{1}{2}\phi - 8\int Sin.^8\tfrac{1}{2}\phi\ Cos.\tfrac{1}{2}\phi\,\partial.\tfrac{1}{2}\phi$$
$$= 4\int Sin.^6\tfrac{1}{2}\phi\ \partial.\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi - 8\int Sin.^8\tfrac{1}{2}\phi\ \partial.\ Sin.\tfrac{1}{2}\phi$$
$$= \tfrac{4}{7}\ Sin.^7\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{8}{9}\ Sin.^9\tfrac{1}{2}\phi + C.$$

LXXXVI. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Er zijn drie getallen, zoodanig: dat, als men de beide eerste elk met 1 *vermeerdert, de uitkomsten tot elkander staan, als* 125 *tot* 216; *dat, als men de beide laatste elk met* 2 *vermeerdert, de uitkomsten tot elkander staan, als* 288 *tot* 445; *en dat, als men het eerste en laatste elk met* 3 *vermeerdert, de sommen zich als* 369 *tot* 784 *verhouden. Welke zijn die getallen?*

OPGELOST *door* S. DIK, CORNSZ., G. KOSTER, F. C. RADIJS, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNSZ.

De getallen door x, y en z voorstellende, heeft men de evenredigheden:

$$x + 1 : y + 1 = 125 : 216,$$
$$y + 2 : z + 2 = 288 : 445$$
en
$$x + 3 : z + 3 = 369 : 784.$$

Door de producten van de uiterste en middelste termen dezer evenredigheden aan elkander gelijk te stellen, verkrijgt men na herleiding de vergelijkingen:

$$216\,x + 91 = 125\,y \quad \ldots\ldots \quad (1),$$
$$445\,y + 314 = 288\,z \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
en
$$784\,x + 1245 = 369\,z \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Uit (1) volgt

$$x = \frac{125y-91}{216} = \frac{125y-91}{8\times27} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

en uit (3) $$x = \frac{369z-1245}{784} = \frac{369z-1245}{8\times98} \quad \ldots \quad (5),$$

derhalve is $$\frac{125y-91}{27} = \frac{369z-1245}{98}$$

of na herleiding

$$12250y+24697 = 9963z,$$

waaruit volgt

$$z = \frac{12250y+24697}{9963} = \frac{12250y+24697}{9\times1107} \quad \ldots \quad (6);$$

uit (2) volgt verder

$$z = \frac{445y+314}{288} = \frac{445y+314}{9\times32} \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

dus is ook

$$\frac{445y+314}{32} = \frac{12250y+24697}{1107},$$

waaruit dadelijk volgt

$$y = \frac{24697\times32-1107\times314}{1107\times445-12250\times32} = 4\tfrac{2}{5}.$$

Deze waarde van y in (4) en (7) substituerende, vindt men ook onmiddellijk $x = 2\frac{1}{8}$ en $z = 7\frac{8}{9}$; de begeerde getallen zijn derhalve $2\frac{1}{8}$, $4\frac{2}{5}$ en $7\frac{8}{9}$.

LXXXVII. VOORSTEL.

Men vraagt de waarden van x en y te vinden, uit de vergelijkingen:

$(x+y)\,c-(x-y)\,d=2a$ en $(x+y)\,a-(x-y)\,b=\frac{2c(a^2-b^2)}{c^2-d^2}$. ?

Opgelost door S. Dik, Cornsz., M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. C. Olivier, F. C. Radijs en G. Koster.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Voor de gegevene vergelijkingen kan men schrijven

$$(c-d)\,x+(c+d)\,y=2a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en
$$(a-b)\,x+(a+b)\,y=\frac{2c(a^2-b^2)}{c^2-d^2} \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

vermenigvuldigt men nu (1) met $a-b$ en (2) met $c-d$, dan komt er

$$(a-b)\,(c-d)\,x+(a-b)\,(c+d)\,y=2a(a-b)$$

en
$$(a-b)\,(c-d)\,x+(a+b)\,(c-d)\,y=\frac{2c(a^2-b^2)}{c+d};$$

de beide laatste vergelijkingen van elkander aftrekkende, vindt men

$$\left\{(a-b)(c+d)-(a+b)(c-d)\right\}y=2a(a-b)-\frac{2c(a^2-b^2)}{c+d},$$

of, door achtervolgende herleidingen,

$$\left\{(ac-bc+ad-bd)-(ac+bc-ad-bd)\right\}y=2(a-b)\left(a-\frac{c(a+b)}{c+d}\right),$$

$$(2ad-2bc)y=2(a-b)\,\frac{a(c+d)-c(a+b)}{c+d},$$

$$(ad-bc)y=(a-b)\,\frac{ad-bc}{c+d},$$

en
$$y=\frac{a-b}{c+d}.$$

Brengt men nu deze waarde voor y in (1) over, dan vindt men verder

$$(c-d)x+a-b=2a,$$

waaruit volgt

$$(c-d)x=a+b$$

en
$$x=\frac{a+b}{c-d}.$$

Alzoo zijn $x=\frac{a+b}{c-d}$ en $y=\frac{a-b}{c+d}$ de waarden van x en y, waarnaar gevraagd is.

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

In eenen gelijkbeenigen driehoek, waarvan de bazis* 10 *ellen is, heeft men eenen cirkel beschreven en bevonden, dat deszelfs middellijn* 6⅔ *ellen lang is. Men vraagt hoe lang de beenen van dezen driehoek zijn?

OPGELOST *door* J. C. OLIVIER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* M. G. SNOER.

I. OPLOSSING *van* J. C. OLIVIER.

Laat ABC (Fig. 34) de bedoelde gelijkbeenige driehoek en E het middelpunt van den daarin beschreven' cirkel zijn, dan deelen de lijnen, uit A en C naar E getrokken, de hoeken A en C midden door; het verlengde van CE deelt almede de bazis AB in twee gelijke deelen AD en BD, en het gedeelte ED van die deellijn is tevens de straal van den ingeschreven cirkel. Zij nu gegeven AB $= 2a$ of AD $=$ BA $= a$ en ED $= r$, dan is in den regthoekigen driehoek CAD

$$CD = AD\ Tang.\ CAD = a\ Tang.\ 2\ EAD$$

of, daar in het algemeen $Tang.\ 2\alpha = \frac{2 Tang. \alpha}{1 - Tang.^2 \alpha}$ is,

$$CD = 2a \frac{Tang. EAD}{1 - Tang.^2 EAD};$$

maar uit den regthoekigen driehoek EAD volgt

$$Tang.\ EAD = \frac{ED}{AD} = \frac{r}{a},$$

en hierdoor verandert de laatstgevondene waarde voor CD in

$$CD = 2a \frac{\frac{r}{a}}{1 - \frac{r^2}{a^2}} = \frac{2a^2 r}{a^2 - r^2}.$$

Stelt men nu hierin de gegevene getallenwaarden, $a = 5$ ellen en $r = 3\frac{1}{3}$ ellen, dan vindt men dadelijk

$$CD = 12 \text{ ellen}$$

en verder $AC = BC = \sqrt{(AD^2 + CD^2)} = 13$ ellen.

II. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij alles als in de vorige oplossing en zij AC $=$ BC $= x$, dan hebben wij

$Inh.Drieh.ABC = \frac{1}{2}r(AB+BC+AC) = \frac{1}{2}r(2a+2x) = r(a+x)$
en $Inh.Drieh.ABC = \frac{1}{2}AB \times CD = \frac{1}{2}AB\sqrt{(AC^2-AD^2)} = a\sqrt{(x^2-a^2)}$;
hieruit volgt

$$a\sqrt{(x^2-a^2)} = r(a+x),$$
$$a^2(x^2-a^2) = r^2(x+a)^2,$$
$$a^2(x^2-a) - r^2(x+a)^2 = 0$$

of $$(x+a)\{a^2(x-a) - r^2(x+a)\} = 0.$$

Aan deze vergelijking nu wordt voldaan, door te stellen

$$x+a = 0 \quad \text{of} \quad a^2(x-a) - r^2(x+a) = 0,$$

waaruit men vindt

$$x = -a \quad \text{of} \quad x = a\frac{a^2+r^2}{a^2-r^2};$$

daar nu de waarde $x = -a$ klaarblijkelijk geen eigenlijk antwoord op de vraag kan geven, bepalen wij ons tot de andere waarde van x en vinden dan, door $a = 5$ en $r = 3\frac{1}{3}$ te substitueren, $x = 13$; derhalve is

$$AC = BC = 13 \text{ ellen.}$$

LXXXIX. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Wanneer, uit de hoekpunten eens driehoeks, lijnen getrokken zijn, die elkander in één punt snijden, zoodat de drie hoeken, die deze drie lijnen, in de hoekpunten des driehoeks, ieder met eene verschillende zijde maken, onderling gelijk zijn, dan zal de cotangens van een' dezer gelijke hoeken, gelijk zijn aan de som der cotangenten van de hoeken des driehoeks. Men vraagt het bewijs hiervan?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, J. Bassan *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABC (Fig. 35) een driehoek, waarin het punt D zoodanig gelegen is, dat de hoeken DAB, DBC en DCA onderling gelijk zijn en stellen wij

$$hoek\ DAB = hoek\ DBC = hoek\ DCA = \phi,$$
$$hoek\ BAC = \alpha,\ hoek\ ABC = \beta \text{ en } hoek\ BCA = \gamma,$$

dan is

$$hoek\ DAC = \alpha - \phi,\ hoek\ DBA = \beta - \phi \text{ en } hoek\ DCB = \gamma - \phi.$$

Omdat in elken vierhoek, die eenen inspringenden hoek heeft, deze inspringende hoek gelijk is aan de som der drie

overige hoeken, zoo is in den vierhoek ADBC

$hoek\ ADB = hoek\ DBC + hoek\ BCA + hoek\ CAD$

of $hoek\ ADB = \phi + \gamma + \alpha - \phi = \alpha + \gamma$;

even zoo vindt men

$hoek\ BDC = \alpha + \beta$ en $hoek\ ADC = \beta + \gamma$;

hieruit volgt, dat het punt D, waarin de drie bedoelde lijnen elkander moeten snijden, om gelijke hoeken met de zijden eens gegeven driehoeks ABC te maken, kan geconstrueerd worden, door op AC en BC als koorden cirkelsegmenten te beschrijven, die respectievelijk de hoeken $\beta + \gamma$ en $\alpha + \beta$ bevatten; het snijpunt van de boogen dezer segmenten zal dan het punt D zijn.

Tot het bewijs der opgegevene stelling, trekken wij, uit de driehoeken ABD, DBC en ABC, respectievelijk de evenredigheden

$AB:BD = Sin.ADB:Sin.DAB = Sin.(\alpha+\gamma):Sin.\phi$,

$BD:BC = Sin.DCB:Sin.BDC = Sin.(\gamma-\phi):Sin.(\alpha+\beta)$

en $BC:AB = Sin.BAC:Sin.BCA = Sin.\alpha:Sin.\gamma$;

door de overeenkomstige termen dezer evenredigheden met elkander te vermenigvuldigen, geraakt men terstond tot de vergelijking

$$Sin.\alpha\ Sin.(\alpha+\gamma)\ Sin.(\gamma-\phi) = Sin.\gamma\ Sin.(\alpha+\beta)\ Sin.\phi,$$

of, omdat $\alpha+\gamma = 180^\circ-\beta$ en dus $Sin.(\alpha+\gamma) = Sin.\beta$ is,

$$Sin.\alpha\ Sin.\beta\ Sin.(\gamma-\phi) = Sin.\gamma\ Sin.\phi\ Sin.(\alpha+\beta);$$

ontwikkelen wij nu $Sin.(\gamma-\phi)$ en $Sin.(\alpha+\beta)$, dan komt er

$$Sin.\alpha\ Sin.\beta\ (Sin\ \gamma\ Cos\ \phi - Cos\ \gamma\ Sin.\phi) = Sin.\gamma\ Sin.\phi\ (Sin.\alpha\ Cos\beta + Cos.\alpha\ Sin.\beta),$$

en na deeling door $Sin.\alpha\ Sin.\beta\ Sin.\gamma\ Sin.\phi$

$$Cot.\phi - Cot.\gamma = Cot.\beta + Cot\ \alpha$$

of $$Cot.\phi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma,$$

waardoor het gestelde bewezen is.

AANMERKING *van* D. VAN LANKEREN MATTHES. Uit de driehoeken ADB, BDC en CDA volgen de evenredigheden:

$AD : BD = Sin.ABD : Sin.BAD = Sin.(\beta-\phi) : Sin.\phi$,

$BD : CD = Sin.BCD : Sin.CBD = Sin.(\gamma-\phi) : Sin.\phi$,

$CD : AD = Sin.CAD : Sin.ACD = Sin.(\alpha-\phi) : Sin.\phi$.

De overeenkomstige termen dezer evenredigheden met elkander vermenigvuldigende, komt men tot de vergelijking

$$Sin\ (\alpha-\phi)\ Sin.(\beta-\phi)\ Sin.(\gamma-\phi) = Sin^3\phi,$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$\frac{Sin.(\alpha-\phi)}{Sin.\alpha\, Sin.\phi}\cdot\frac{Sin.(\beta-\phi)}{Sin.\beta Sin.\phi}\cdot\frac{Sin.(\gamma-\phi)}{Sin.\gamma\, Sin.\phi} = \frac{1}{Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma};$$

neemt men voorts in aanmerking, dat in het algemeen $\frac{Sin.(p-q)}{Sin.p\, Sin.q} = Cot.q - Cot.p$ en $\frac{1}{Sin.p} = Cosec.p$ is, dan kan men de laatste vergelijking veranderen in

$$(Cot.\phi-Cot.\alpha)(Cot.\phi-Cot.\beta)(Cot.\phi-Cot.\gamma)=Cosec.\alpha Cosec.\beta Cosec.\gamma,$$

ontwikkelt men verder het eerste lid, dan verkrijgt men

$$\left.\begin{array}{c} Cot.^3\phi \\ -(Cot.\alpha+Cot.\beta+Cot.\gamma)Cot.^2\phi \\ +(Cot.\alpha Cot.\beta+Cot.\beta Cot.\gamma+Cot.\gamma Cot.\alpha)Cot.\phi \\ -Cot.\alpha Cot.\beta Cot.\gamma \end{array}\right\} = Cocec.\alpha Cosec.\beta Cosec.\gamma.$$

Substitueert men nu in den tweeden term, volgens de bewezene stelling, $Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma = Cot.\phi$, en in den derden term, volgens eene bekende eigenschap van de hoeken eens driehoeks, $Cot.\alpha\ Cot.\beta + Cot.\beta\ Cot.\gamma + Cot.\gamma\ Cot.\alpha = 1$ (Zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* Derde Druk. § 959), dan verandert de laatste vergelijking in

$$Cot.\phi - Cot.\alpha\ Cot.\beta\ Cot.\gamma = Cosec.\alpha\ Cosec.\beta\ Cosec.\gamma$$

of $\quad Cot.\phi = Cot.\alpha\ Cot.\beta\ Cot.\gamma + Cosec.\alpha\ Cosec.\beta\ Cosec.\gamma;$

dit met de bewezene stelling weder in verband brengende, komt er

$$Cot.\alpha+Cot.\beta+Cot.\gamma=Cot.\alpha Cot.\beta Cot.\gamma+Cosec.\alpha Cosec.\beta Cosec.\gamma,$$

en men heeft dus de algemeene stelling: *dat de som van de cotangenten der hoeken eens driehoeks gelijk is aan het product van die cotangenten opgeteld bij het product van de cosecanten.*

Voor de laatste waarde van $Cot.\phi$ kan men ook schrijven

$$Cot.\phi = \frac{Cos.\alpha Cos.\beta Cos.\gamma}{Sin.\alpha\, Sin.\beta\, Sin.\gamma} + \frac{1}{Sin\alpha Sin.\beta Sin.\gamma}$$

of $$Cot.\phi = \frac{2+2Cos.\alpha Cos.\beta Cos.\gamma}{2Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma};$$

daar nu $2Cos.\alpha\ Cos.\beta\ Cos.\gamma = 1 - Cos.^2\alpha - Cos.^2\beta - Cos.^2\gamma$ is, (Zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* Derde Druk. § 959) heeft men almede

$$Cot.\phi = \frac{3-Cos.^2\alpha-Cos.^2\beta-Cos.^2\gamma}{2Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma}$$

en $$Cot.\phi = \frac{Sin.^2\alpha + Sin.^2\beta + Sin.^2\gamma}{2Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma},$$

waaruit in verband met de bewezene stelling volgt

$$Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma = \frac{Sin.^2\alpha + Sin.^2\beta + Sin^2\gamma}{2Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma};$$

dus is: *de som van de cotangenten der hoeken eens driehoeks gelijk aan de som van de vierkanten der sinussen gedeeld door het dubbele product der sinussen.*

XC. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

Men vraagt almede te bewijzen, dat het vierkant van de cosecans van een' der gelijke hoeken, in het voorgaande voorstel omschreven, gelijk is aan de som van de vierkanten der cosecanten van de hoeken des driehoeks?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER, J. BASSAN *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Verheffen wij de vergelijking

$$Cot.\phi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma,$$

die in het vorige voorstel gevonden is, tot de tweede magt, dan komt er

$$Cot.^2\phi = Cot.^2\alpha + Cot.^2\beta + Cot.^2\gamma + 2(Cot.\alpha Cot.\beta + Cot.\beta Cot.\gamma + Cot.\gamma Cot.\alpha);$$

daar nu $Cot.\alpha\ Cot.\beta + Cot.\beta\ Cot.\gamma + Cot.\gamma\ Cot.\alpha = 1$ is, hebben wij ook

$$Cot.^2\phi = Cot.^2\alpha + Cot.^2\beta + Cot.^2\gamma + 2$$

en bij elk lid dezer vergelijking 1 optellende, kunnen wij voor dezelve schrijven

$$1 + Cot.^2\phi = 1 + Cot.^2\alpha + 1 + Cot.^2\beta + 1 + Cot.^2\gamma,$$

waaruit, omdat in het algemeen $1 + Cot.^2p = Cosec.^2p$ is, terstond volgt

$$Cosec.^2\phi = Cosec.^2\alpha + Cosec.^2\beta + Cosec.^2\gamma.$$

Hierdoor is alzoo het gestelde bewezen.

XCI. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

Men verlangt ook nog het bewijs, dat de cotangens van elk der, in de twee laatste voorstellen genoemde, gelijke hoeken, gelijk is aan het quotient, dat er komt, zoo men

viermaal den inhoud des driehoeks in de som van de vierkanten der zijden deelt?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, J. Bassan *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laten wij in Fig. 35, uit de hoekpunten des driehoeks, de loodlijnen AM, BN en CP op de overstaande zijden vallen, dan is, uit de regthoekige driehoeken APC en BPC,

$$Cot.\ PAC = \frac{AP}{CP} \text{ en } Cot.\ PBC = \frac{BP}{CP},$$

dat is

$$Cot.\alpha = \frac{AP}{CP} \text{ en } Cot.\ \beta = \frac{BP}{CP},$$

hieruit volgt door optelling

$$Cot.\alpha + Cot.\beta = \frac{AP+BP}{CP} = \frac{AB}{CP} = \frac{AB^2}{AB \times CP};$$

stellen wij dus den inhoud des driehoeks door I voor, dan is $AB \times CP = 2\,I$ en alzoo

$$Cot.\alpha + Cot.\beta = \frac{AB^2}{2\,I}.$$

Uit de regthoekige driehoeken BMA en CMA, vindt men even zoo

$$Cot.\beta + Cot.\gamma = \frac{BC^2}{2\,I},$$

en, uit de regthoekige driehoeken ANB en CNB,

$$Cot.\gamma + Cot.\alpha = \frac{AC^2}{2\,I}.$$

De halve som der drie laatste vergelijkingen nemende, vindt men

$$Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4\,I}$$

en dus is, volgens het LXXXIX Voorstel,

$$Cot.\phi = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4\,I},$$

hetwelk gevraagd was te bewijzen.

Aanmerking. Uit de voorlaatste vergelijking volgt

$$I = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4(Cot.\alpha+Cot.\beta+Cot.\gamma)};$$

in het algemeen is dus: *de inhoud eens driehoeks gelijk*

van de som van de vierkanten der zijden gedeeld door de vierdubbele som van de cotangenten der hoeken.

Men kan aan de gevondene formulen ligtelijk nog andere gedaanten geven; zoo is, bij voorbeeld, indien a, b en c de lijnen voorstellen, uit de hoekpunten naar het midden der overstaande zijden getrokken,

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = \tfrac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2);$$

(Zie het bewijs hiervan in het II Deel der *Verz. van Wisk. Voorst.* IX Voorstel.) hierdoor vindt men dus, uit de vorige formulen,

$$Cot.\phi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3\,I}$$

en

$$I = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3(Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma)}.$$

XCII. Voorstel.

Door K. Smit.

Een getal te vinden zoodanig, dat, indien men hetzelve tot de derde magt verheft, het getal, dat door de laatste cijfers van dit derdemagtsgetal uitgedrukt wordt, gelijk zij aan het te vindene getal; terwijl ook het dubbel van het te vindene getal plus of min de eenheid, en deszelfs viervoud plus of min de eenheid, aan dezelfde voorwaarde voldoet?

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij het bedoelde getal x en laat hetzelve uit n cijfers bestaan, dan zal $x^3 - x$ door 10^n deelbaar moeten zijn. Welk getal men ook voor x neme, zullen de getallen $2x + 1$, $2x - 1$, $4x + 1$ en $4x - 1$, ieder in het bijzonder, of uit even veel cijfers als het getal x, of uit ééne cijfer meer bestaan; naar gelang nu $2x + 1$ uit n of $n + 1$ cijfers bestaat, zal ook $(2x + 1)^3 - (2x + 1)$ door 10^n of door 10^{n+1} deelbaar moeten wezen en even zoo is het met $2x-1$, $4x + 1$ en $4x - 1$ gelegen; derhalve zullen de vijf uitdrukkingen

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) \quad (A),$$
$$(2x+1)^3 - (2x+1) = 4x(2x+1)(x+1) \quad (B),$$
$$(2x-1)^3 - (2x-1) = 4x(2x-1)(x-1) \quad (C),$$
$$(4x+1)^3 - (4x+1) = 8x(4x+1)(2x+1) \quad (D),$$
$$(4x-1)^3 - (4x-1) = 8x(4x-1)(2x-1) \quad (E),$$

alle ten minste door 10^n en dus ook door 5^n moeten kunnen gedeeld worden.

De drie factoren, waaruit elk dezer vijf uitdrukkingen bestaat, zijn van dien aard, dat, indien ééne van drieën door 5 deelbaar is, zulks met geen der beide overige het geval kan wezen; zullen dus al die uitdrukkingen door 5^n kunnen gedeeld worden, dan moet 5^n deelbaar zijn in den factor x, die aan alle gemeen is; en de overige factoren zijn dan niet door 5 deelbaar.

Voorts kan het getal x niet op ééne of meer nullen eindigen, want was dit het geval, dan zou x^3 op driemaal zoo veel nullen eindigen en dus zou dan het getal x niet door de laatste cijfers van het getal x^3 kunnen uitgedrukt worden. Het getal x kan dus niet door 10 deelbaar wezen.

Brengt men nu de voorwaarden, dat x wel door 5^n, maar niet door 10 deelbaar moet wezen, met elkander in verband, dan volgt daaruit, dat x een oneven getal van den vorm $(2a + 1)5^n$ zal moeten zijn en wij hebben alzoo

$$x = (2a + 1)5^n,$$

waarin n het getal cijfers verbeeldt, waaruit x bestaat, terwijl a een onbepaald geheel getal voorstelt.

Daar alzoo de uitdrukking (D), behalve den coëfficient 8, slechts onevene factoren bevat, zal zij door geene hoogere magt van 2 dan 2^3, en bij gevolg door geene hoogere magt van 10 dan 10^3, deelbaar kunnen zijn; $4x + 1$ zal dus uit niet meer dan 3 cijfers kunnen bestaan, waaruit volgt $4x + 1 < 1000$ of

$$x < 250.$$

Wij hebben reeds gezegd, dat, voor eene willekeurige waarde van x, $4x + 1$ of uit evenveel cijfers als x, of uit ééne cijfer meer bestaat; dit laatste kan echter, voor de waarde die x in ons geval hebben moet, geen plaats hebben. Want onderstellen wij, terwijl x uit n cijfers bestaat, dat $4x + 1$ uit $n + 1$ cijfers bestaan zou, dan zou (D) door 10^{n+1} en alzoo, in verband met het reeds aangevoerde, x door 5^{n+1} moeten kunnen gedeeld worden; maar het kleinste getal van n cijfers, dat door 5^{n+1} deelbaar is, is 625 en dus zou de gemaakte onderstelling vorderen, dat x ten minste 625 ware, hetgeen met de reeds gevondene

voorwaarde $x < 250$ zou strijden. De getallen x en $4x + 1$ bestaan dus uit evenveel cijfers en wel uit niet meer dan 3, zoodat n geene andere waarden dan 1, 2 of 3 hebben kan.

Stellen wij $n = 1$, als wanneer x en dus $4x + 1$ een getal van ééne cijfer is, dan moeten wij gelijktijdig hebben

$$4x + 1 < 10, \text{ dat is } x < 3 \text{ en } x = (2a + 1)5,$$

waaraan door geene waarde van a voldaan kan worden.

Stellen wij $n = 2$, als wanneer x en dus ook $4x + 1$ een getal van twee cijfers is, dan moeten wij gelijktijdig hebben

$$x > 10,\ 4x+1 < 100, \text{ dat is } x < 25 \text{ en } x = (2a+1)5^2,$$

waaraan mede geene waarde voor a voldoen kan.

Stellen wij $n = 3$, als wanneer x en dus ook $4x + 1$ een getal van drie cijfers is, dan moeten wij gelijktijdig hebben

$$x > 100,\quad x < 250 \text{ en } x = (2a + 1)5^3,$$

waaraan alleen $a = 0$ voldoet.

De waarde $x = 125$, die met $a = 0$ overeenstemt, is dus de eenige mogelijke waarde, die het begeerde getal kan hebben, en daar dezelve wezenlijk aan al de gestelde voorwaarden voldoet, is 125 het begeerde getal. Wij hebben dus ook:

$$\begin{aligned} x &= 125 & \text{en} \quad x^3 &= 1953125, \\ 2x-1 &= 249 & \text{en} \quad (2x-1)^3 &= 15438249, \\ 2x+1 &= 251 & \text{en} \quad (2x+1)^3 &= 15813251, \\ 4x-1 &= 499 & \text{en} \quad (4x-1)^3 &= 124251499, \\ 4x+1 &= 501 & \text{en} \quad (4x+1)^3 &= 125751501; \end{aligned}$$

wordende, door de laatste cijfers van elk dezer derde magten, respectievelijk de getallen uitgedrukt, die tot de derde magt verheven zijn geworden.

XCIII. Voorstel.

Door K. Smit.

Drie derdemagtsgetallen te vinden, van zoodanige eigenschap, dat de getallen, die door derzelver laatste cijfers worden uitgedrukt, de derdemagtswortels uit de gevraagde getallen zijn, en eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* J. S. Speijer, F. C. Radijs, J. Basman, G. Koster *en* M. G. Snoer.

Oplossing van J. S. Speijer.

Indien wij de derdemagtswortels uit de gevraagde getallen voorstellen door $x - y$, x en $x + y$, dan zijn die getallen zelve $(x - y)^3$, x^3 en $(x + y)^3$. Laat nu $x - y$ uit m, x uit n en $x + y$ uit p cijfers bestaan, dan zullen wij moeten voldoen aan de voorwaarden, dat de uitdrukkingen

$$(x-y)^3 - (x-y) = (x-y)(x-y-1)(x-y+1) \quad (A),$$
$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) \quad \ldots\ldots \quad (B),$$
$$(x+y)^3 - (x+y) = (x+y)(x+y-1)(x+y+1) \quad (C),$$

respectievelijk door 10^m, 10^n en 10^p kunnen gedeeld worden, terwijl, zoo als in het voorgaande voorstel gebleken is, de getallen $x - y$, x en $x + y$ op geene nul eindigen en dus ook niet door 10 deelbaar mogen wezen.

De uitdrukking (B) moet door 10^n en dus ook door 5^n deelbaar wezen; is een van hare factoren x, $x - 1$ of $x + 1$ door 5 deelbaar, dan kan zulks met geen der beide andere het geval zijn; dus moet of alleen x of alleen $x - 1$ of $x + 1$ door 5^n deelbaar zijn. Wij zullen dien ten gevolge de beide gevallen onderscheiden, dat x door 5^n deelbaar is, en dat $x - 1$ of $x + 1$ een van beide door 5^n deelbaar zijn.

1°. Is x door 5^n deelbaar, dan moet, omdat x op geene nul kan eindigen, $x = (2a + 1)5^n$ zijn, zoo als uit het voorgaande voorstel blijkt. Neemt men nu n willekeurig aan, en daarna a zoodanig, dat x een getal van n cijfers worde en tevens $(x - 1)(x + 1)$ door 2^n deelbaar zij, welk laatste zoo $n < 4$ is altijd zal plaats hebben, dan zal de voorwaarde, dat (B) door 10^n deelbaar zij, vervuld wezen.

De uitdrukking (C) moet door 10^p dus, omdat p niet kleiner dan n kan zijn, ook door 5^n deelbaar wezen; dit vordert nu, dat of y, of $y - 1$ of $y + 1$ door 5^n gedeeld kan worden; men zal dus een dezer getallen van den vorm $b5^n$ moeten nemen, waarin b een even getal zal moeten zijn, indien men y dien vorm geeft, want nam men $y = (2b + 1)5^n$, dan zou $x - y = (2a + 1)5^n - (2b + 1)5^n$ op eene nul eindigen, hetgeen niet zijn mag.

Heeft men aan y ééne der genoemde vormen gegeven,

dan wordt klaarblijkelijk de uitdrukking (A) ook door 5^n en, daar m niet grooter dan n zijn kan, ook door 5^m deelbaar; men zal dus met den vorm

$$x = (2a + 1)5^n \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

eene der vormen

$$y = 2b5^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$
$$y = b5^n + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$
$$y = b5^n - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

moeten verbinden, en daarin aan b zulke waarden moeten geven, dat, $x - y$ en $x + y$ getallen van m en p cijfers wordende, (A) door 2^m, (C) door 2^p en bovendien, naar gelang men (2), (3) of (4) gebruikt, $x + y$, $x + y - 1$ of $x + y + 1$ door 5^p, dat is: $2a + 2b + 1$ of $2a + b + 1$ door 5^{p-n} deelbaar worden; terwijl in allen gevalle $y < x$ moet blijven.

Stellen wij, bij voorbeeld, $n = 1$, dan kan men in (1) alleen $a = 0$ nemen, omdat, voor grootere waarden van a, x geen getal van eene cijfer zijn zou; en wij hebben dan $x = 5$; alsnu is (2) onbruikbaar, want $b = 0$ zou $y = 0$ geven, hetgeen de bedoeling der vraag zou missen, en $b = 1$ zou $y = 10$ en dus $y > x$ geven; in (3) echter kan men nu $b = 0$ nemen, maar ook alleen $b = 0$, omdat $b = 1$ reeds $y > x$ zou doen worden; alsdan is $y = 1$ en men heeft

$$(x-y)^3 = 64, \; x^3 = 125 \text{ en } (x+y)^3 = 216,$$

welke getallen geenszins tegen de overige opgegevene beperkingen strijden en dus aan de vraag voldoen. In verband met $n = 1$ en $x = 5$, kan men in (4) alleen $b = 1$ nemen, dan wordt $y = 4$ en men heeft

$$(x-y) = 1, \; x^3 = 125, \; (x+y)^3 = 729,$$

welke getallen almede aan het voorstel beantwoorden.

Stelt men $n = 2$, dan kan men in (1) $a = 0$ en $a = 1$ nemen, waardoor $x = 25$ en $x = 75$ gevonden wordt. In verband met $n = 2$ en $x = 25$, zou volgens (2) $y > x$ worden; volgens (3) zou men $b = 0$ kunnen nemen en daardoor $y = 1$ vinden, dan zou $x + y$ een getal van twee cijfers worden, zonder dat $(x + y)$ $(x + y - 1)$ $(x + y + 1)$ door 2^2 deelbaar werd, zoodat (3) geene

bruikbare waarde voor y geven kan; volgens (4) kan men $b = 1$ nemen en vindt dan $y = 24$, waardoor men ter beantwoording des voorstels de getallen

$$(x-y)^3 = 1, \quad x^3 = 15625 \text{ en } (x+y)^3 = 117649$$

vindt. In verband met $n = 2$ en $x = 75$, zou men in (2) $b = 1$, in (3) $b = 0$, $b = 1$ en $b = 2$, in (4) $b = 1$, $b = 2$ en $b = 3$ kunnen nemen, waardoor men verkrijgen zou $y = 50$, $y = 1$, $y = 26$, $y = 51$, $y = 24$, $y = 49$, $y = 74$; voor $y = 1$ en $y = 49$, is $x - y$ een getal van twee cijfers, zonder dat $(x - y)(x - y - 1)(x - y + 1)$ door 2^3 deelbaar is; voor $y = 26$ en $y = 74$, is x een getal van 2 en $x + y$ een getal van 3 cijfers, zonder dat $2a + b + 1$ door 5^{p-n} deelbaar is; voor $y = 51$ is $x + y$ een getal van drie cijfers, zonder dat $(x + y)(x + y - 1)(x + y + 1)$ door 2^3 deelbaar is en al deze waarden van y strijden dus tegen de opgegevene beperkingen; maar voor $y = 50$ en $y = 24$ is dit het geval niet en men vindt voor deze waarden van y respectievelijk de getallen

$$(x-y)^3 = 15625, \; x^3 = 421875, \; (x+y)^3 = 1953125$$

en $(x-y)^3 = 132651$ $x^3 = 421875$ $(x+y)^3 = 970299$, die aan het voorstel voldoen.

Het is duidelijk, dat men dezen zelfden weg volgende, door $n = 3, 4$, enz. te stellen nog meerdere getallen zal vinden, die aan de vraag beantwoorden.

2°. Is $x - 1$ of $x + 1$ door 5^n deelbaar, dan zal men slechts $x \pm 1 = a5^n$ behoeven te nemen, zonder er op te letten of a een even of oneven getal zij, mits slechts altijd $ax(x \mp 1)$ door 2^n deelbaar blijve, hetgeen weder, indien $n < 4$ is, altijd van zelve zal plaats hebben; voorts moet, na n willekeurig aangenomen te hebben, a zoo bepaald worden, dat $x = a5^n \mp 1$ een getal van n cijfers zij. Hieraan voldaan zijnde, zal de uitdrukking (B) door 10^n deelbaar zijn.

Schrijft men nu de uitdrukkingen (A) en (C) in deze gedaanten:

$$\{(x+1)-(y+1)\}\{(x+1)-(y+2)\}\{(x+1)-y\} \quad . \; (A'),$$
$$\{(x+1)+(y-1)\}\{(x+1)+(y-2)\}\{(x+1)+y\} \quad . \; (C'),$$

of in deze

$$\{(x-1)-(y-1)\}\{(x-1)-y\}\{(x-1)-(y-2)\} \cdot (A'),$$
$$\{(x-1)+(y+1)\}\{(x-1)+y\}\{(x-1)+(y+2)\} \cdot (C'),$$

dan blijkt het terstond, dat (A) en (C) nu niet gelijktijdig door eenige magt van 5 deelbaar kunnen wezen, ten zij men $y = b5^n$ neme; derhalve zullen (A) en (C) niet door 10^m en 10^p deelbaar zijn, ten zij men y dien vorm geve en verder b zoodanig bepale, dat $x - y$ en $x + y$ getallen van m en p cijfers wordende, (A) door 2^m, (C) door 2^p en bovendien $x \pm 1 + y$ door 5^p of $a + b$ door 5^{p-n} deelbaar zij, terwijl weder in allen gevalle $y < x$ moet blijven.

Stellen wij, bij voorbeeld, $n = 3$ en gebruiken wij het benedenste teeken, dan vinden wij $x = 125a + 1$; hierin kunnen wij $a = 3$ nemen, dan wordt $x = 376$; als nu moet $y = 125b$ zijn, hierin zal $b = 1$ aan al de opgegevene beperkingen voldoen, zoodat dan ook $y = 125$ nemende

$(x-y)^3 = 15813251$, $x^3 = 53157376$ en $(x+y)^3 = 125751501$ aan de vraag beantwoorden. Nemen wij nevens $x = 376$, $b = 3$ of $y = 375$, dan verkrijgen wij

$(x-y)^3 = 1$, $x^3 = 53157376$ en $(x+y)^3 = 423564751$, waardoor almede aan het voorstel wordt beantwoord. Ook in dit tweede geval zal men gemakkelijk nog meerdere getallen vinden, die het voorstel oplossen.

XCIV. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Eenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodat, wanneer men deszelfs dubbelen inhoud van elk der zijden aftrekt, de drie resten volkomen vierkanten zijn? (*)

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER *en* G. KOSTER.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Stellen wij voor de regthoekszijden x en y en voor de hypothenusa z, dan is de dubbele inhoud xy en wij zullen dan x en y zoodanig moeten bepalen, dat $x - xy$, $y - xy$ en $z - xy$ volkomen vierkanten zijn, terwijl nog daarenboven $x^2 + y^2 = z^2$ zal moeten wezen.

Omdat $x - xy$ en $y - xy$ of $x(1-y)$ en $y(1-x)$ vierkan-

(*) P. HALCKE, *Zinnen Confect*, No. 538.

ten moeten zijn, is het blijkbaar, dat x en y beide kleiner dan 1 moeten wezen, indien wij namelijk in den eigenlijken zin aan het voorstel willen beantwoorden en alzoo geene negatieve zijden toelaten. Stellen wij nu $1 - y = x$, dan is $1 - x = y$ en de beide uitdrukkingen $x - xy$ en $y - xy$ worden dan vierkanten; de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ verandert door deze stelling tevens in

$$x^2 + (1 - x)^2 = z^2.$$

Dewijl nu $z > 1 - x$ is, kunnen wij $z = 1 - nx$ stellen, als wanneer $n < 1$ is; alsdan hebben wij

$$x^2 + (1-x)^2 = (1-nx)^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{2-2n}{2-n^2},$$

alsdan is

$$y = 1 - x = \frac{2n-n^2}{2-n^2}$$

en

$$z = 1 - nx = \frac{2-2n+n^2}{2-n^2}.$$

Hierdoor wordt verder

$$z-xy = \frac{4-8n+6n^2-n^4}{(2-n^2)^2},$$

en er blijft niet anders over, dan deze uitdrukking tot een vierkant te maken, waartoe het voldoende is, dit met den teller $4 - 8n + 6n^2 - n^4$ te verrigten. Nemen wij nu $n = \frac{1}{m}$, als wanneer $m > 1$ is, dan wordt

$$4-8n+6n^2-n^4 = \frac{4m^4-8m^3+6m^2-1}{m^4}$$

en deze uitdrukking zal een vierkant zijn, indien wij hebben

$$4m^4 - 8m^3 + 6m^2 - 1 = p^2.$$

Laat nu (EULERS handelwijze volgende, zie *Elemens d'Algèbre*, 134) $p = 2m^2 - 2m + \frac{1}{2}$ gesteld worden, dan vinden wij hieruit $m = \frac{5}{8}$ en hoezeer nu $m < 1$ is en dus niet voldoen kan, zal deze eerstgevondene waarde voor m, hoezeer onbruikbaar, ons den weg wijzen, om eene bruikbare waarde voor m te vinden; want stellende $m = m' + \frac{5}{8}$, zoo vinden wij

$$4m'^4 + 2m'^3 + \tfrac{3}{8}m'^2 + \tfrac{65}{32}m' + \frac{1}{1024} = p^2,$$

en nemende nu (wederom EULER volgende) $p = -2m^2 + \frac{65}{2}m + \frac{71}{32}$, dan zal hieruit gevonden worden $m' = \frac{4223}{528}$. Hierdoor wordt dan $m = m' + \frac{5}{8} = \frac{4553}{528}$, $z = \frac{1}{m} = \frac{528}{4553}$ en brengende deze waarde van z in de bovengevondene uitdrukkingen voor x, y en z over, dan vinden wij eindelijk voor de zijden des driehoeks

$$x = \frac{18325825}{20590417}, \; y = \frac{2264592}{20590417} \text{ en } z = \frac{18465217}{20590417}$$

en men heeft dan ook werkelijk

$$x - xy = \left(\frac{18325825}{20590417}\right),$$

$$y - xy = \left(\frac{2264592}{20590417}\right)^2$$

en

$$z - xy = \left(\frac{18403967}{20590417}\right)^2,$$

terwijl bovendien $x^2 + y^2 = z^2$ is.

XCV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt een veelhoekig getal te vinden, waarvan de veelhoekige wortel een gegeven getal a is; zoodanig, dat de vierde magt van het gegeven getal a gelijk is aan het te vindene veelhoekige getal?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. BASSAN, D. W. HINSE, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat het veelhoekig getal een n-hoekig zijn, dan is, omdat de veelhoekige wortel a gegeven is, dat getal zelve

$$\frac{(n-2)a^2 - (n-4)a}{2};$$

en, dewijl dat getal gelijk moet zijn aan de vierde magt van a, hebben wij de vergelijking

$$\frac{(n-2)a^2 - (n-4)a}{2} = a^4,$$

waaruit achtervolgens wordt afgeleid:

$$(n-2)a - (n-4) = 2a^3,$$
$$na-2a - n+4 = 2a^3,$$
$$n(a-1) = 2a^3+2a-4,$$
$$n = \frac{2a^3+2a-4}{a-1}$$
en
$$n = 2a^2+2a+4.$$

Hieruit blijkt, dat n geheel van a afhankelijk is; was $a = 2$, bij voorbeeld, gegeven, dan zou $n = 16$ zijn; het 16-hoekig getal, waarvan de wortel 2 is, is dus gelijk aan de vierde magt van 2 en dat 16-hoekige getal zelf is 16; was $a = 3$ gegeven, dan zou $n = 28$ zijn; het 28-hoekige getal, dat 3 tot wortel heeft, is dus gelijk aan de vierde magt van 3 en dat 28-hoekige getal zelf is 81.

In het algemeen is elk $(2a^2 + 2a + 4)$-hoekig getal, dat a tot wortel heeft, gelijk aan de vierde magt van a.

Aanmerking. Was $a = 1$ gegeven, dan zou aan de vergelijking

$$\frac{(n-2)a^2 - (n-4)a}{2} = a^4$$

van zelve voldaan zijn; zoodat, onafhankelijk van n, alle veelhoekige getallen, die de eenheid tot wortel hebben, gelijk zijn aan de vierde magt van dien wortel.

XCVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

De m^{de} magt van elk willekeurig geheel getal a, is altijd een veelhoekig getal, dat hetzelfde getal a tot veelhoekigen wortel heeft. Men vraagt zulks te bewijzen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Bassan, D. W. Hinse, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. Snoer *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Dewijl alle veelhoekige getallen, die a tot wortel hebben, begrepen zijn in den vorm

$$\frac{(n-2)a^2 - (n-4)a}{2}$$

zullen wij slechts hebben te bewijzen, dat a^m, waarin a en m geheele getallen verbeelden, altijd tot den bovenstaanvorm herleidbaar is, zonder dat n daartoe een gebroken zou behoeven te zijn.

Stellen wij derhalve

$$\frac{(n-2)a^2-(n-4)a}{2}=a^m,$$

dan vinden wij daaruit achtervolgens:

$$(n-2)a-(n-4)=2a^{m-1},$$
$$(n-2)a-(n-2)=2(a^{m-1}-1),$$
$$(n-2)(a-1)=2(a^{m-1}-1),$$
$$n-2=2\frac{a^{m-1}-1}{a-1},$$
$$n=2+2\frac{a^{m-1}-1}{a-1};$$

substitueren wij nu deze waarde voor n in de eerste vergelijking, dan vinden wij de identieke vergelijking

$$\frac{\left\{\left(2+2\frac{a^{m-1}-1}{a-1}\right)-2\right\}a^2-\left\{\left(2+2\frac{a^{m-1}-1}{a-1}\right)-4\right\}a}{2}=a^m,$$

waarin altijd $\frac{a^{m-1}-1}{a-1}$ en dus ook $2+2\frac{a^{m-1}-1}{a-1}$ een geheel getal is en waarvan het eerste lid den algemeenen vorm der veelhoekige getallen heeft.

De m^{de} magt van elk geheel getal a is dus een $\left(2+2\frac{a^{m-1}-1}{a-1}\right)$-hoekig getal, dat hetzelfde getal a tot veelhoekigen wortel heeft.

XCVII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert de verschillende waarden van x te vinden, die aan de vergelijking $x^6=a^6$ voldoen?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, J. C. Olivier, W. J. C. Rammelman Elsevier, G. Koster, B. Lubbers *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

De gegevene vergelijking in de gedaante

$$x^6-a^6=0$$

schrijvende, kunnen wij het eerste lid van dezelve, als het verschil van twee vierkanten aangemerkt, terstond in twee factoren ontbinden, waardoor wij verkrijgen

$$(x^3+a^3)(x^3-a^3)=0.$$

Nu is x^3+a^3 door $x+a$ en x^3-a^3 door $x-a$

deelbaar, wij kunnen dus elken factor van het eerste lid nogmaals in twee factoren ontbinden en vinden daardoor

$$(x+a)\ (x-a)\ (x^2-ax+a^2)\ (x^2+ax+a^2) = 0.$$

Door nu beurtelings elken factor gelijk nul te stellen, vinden wij:

uit $x+a = 0,\quad x = -a;$

» $x-a = 0,\quad x = +a;$

» $x^2-ax+a^2 = 0,\quad x = \frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3});$

» $x^2+ax+a^2 = 0,\quad x = \frac{1}{2}a(-1\pm\sqrt{-3});$

wij hebben alzoo, voor de zes wortels der opgegevene vergelijking,

$$x = \pm a \text{ en } x = \tfrac{1}{2}a(\pm 1\pm\sqrt{-3}),$$

waarvan alleen de twee eerste bestaanbaar zijn.

XCVIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Men verlangt, voor de vier onbestaanbare vierdemagtswortels uit — 1, *uitdrukkingen te vinden, waarin alleen vierkantswortels, en geene wortels uit wortels voorkomen?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, D. W. Hinse, G. Koster *en* F. C. Radijs.

I. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

De gevraagde wortels zijn klaarblijkelijk de vier wortels der vierdemagtsvergelijking

$$x^4 + 1 = 0;$$

voor deze vergelijking kan men schrijven

$$(x^2-x\sqrt{2}+1)\ (x^2+x\sqrt{2}+1) = 0;$$

stelt men nu beurtelings elk der factoren van het eerste lid gelijk nul, dan vindt men uit

$$x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0,$$

door de gewone leerwijze der vierkantsvergelijkingen,

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}-1)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2};$$

en even zoo wordt uit

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0$$

gevonden

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2} - 1)} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

weshalve de begeerde wortels worden uitgedrukt door de formule

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2}.$$

II. Oplossing van J. S. Speijer.

Ontbinden wij het eerste lid der vergelijking $x^4 + 1 = 0$ in factoren, daartoe gebruik makende van de, bij I. R. Schmidt, *Beg. der Diff. en Int. Rek.* § 62, opgegevene formulen, en stellen wij ieder dezer factoren achtervolgens gelijk nul, dan vinden wij

$$x = Cos.\tfrac{1}{4}\pi \pm Sin.\tfrac{1}{4}\pi.\ \sqrt{-1}$$

en

$$x = Cos.\tfrac{3}{4}\pi \pm Sin.\tfrac{3}{4}\pi.\ \sqrt{-1}.$$

Omdat nu $Cos.\tfrac{1}{4}\pi = Sin.\tfrac{1}{4}\pi = Sin.\tfrac{3}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $Cos.\tfrac{3}{4}\pi = -\ Cos.\tfrac{1}{4}\pi = -\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ is, zoo hebben wij, voor de wortels der vergelijking $x^4 + 1 = 0$,

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\ \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

en

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{-1} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2},$$

even als boven.

Aanmerking. Omdat in het algemeen de deelers van $y^n + 1 = 0$ voorgesteld worden door

$$y - Cos.\ \frac{1}{n}\ \pi \mp Sin.\ \frac{1}{n}\ \pi.\ \sqrt{-1},$$

$$y - Cos.\ \frac{3}{n}\ \pi \mp Sin.\ \frac{3}{n}\ \pi.\ \sqrt{-1},$$

enz.

zullen ook de onbestaanbare n^{de} magtswortels uit $-\ 1$, door uitdrukkingen kunnen aangewezen worden, waarin alleen tweedemagtwortels voorkomen, indien zulks tevens het geval is met de Goniometrische waarden in de deelers voorkomende. Raadplegen wij nu de, bij J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* Derde Druk, opgegevene waarden der Sinussen en Cosinussen, dan zullen wij zien, dat die der Sinussen en Cosinussen van 15°, 30°, 45° en 60° alleen tweedemagtswortels bevatten. Hieruit volgt, dat, voor de onbestaanbare twaalfde-, zesde- en derdemagtswortels uit $-\ 1$, dergelijke uitdrukkingen als voor de vierdemagtswortels zullen gevonden worden. Men heeft namelijk: voor de derdemagtswortels uit $-\ 1$,

$$y = -\ 1$$

en

$$y = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.\ \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

voor de zesdemagtswortels uit $-\ 1$,

$$y = \pm\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}$$

en

$$y = \pm\ \sqrt{-1};$$

en voor de twaalfdemagtswortels uit -1,

$$y=\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{-1}=\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{-6}-\sqrt{-2}),$$

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{-1}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$

en $y=\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{-1}=\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\pm\tfrac{1}{4}(\sqrt{-6}+\sqrt{-2})$.

XCIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt de waarde van de uitdrukking $\dfrac{Nep.Log.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ *te vinden?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, D. W. HINSE *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men heeft de algemeene formule

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\ Nep.\ Log.\ \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=Boog\ Tang.\ x$$

(Zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 59). Stelt men hierin $x=1$, dan wordt:

$$Boog\ Tang.\ x=Boog\ Tang.\ 1=\tfrac{1}{4}\pi$$

en $\dfrac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\dfrac{(1+\sqrt{-1})^2}{(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})}=\dfrac{2\sqrt{-1}}{2}=\sqrt{-1}$,

waardoor de algemeene formule verandert in

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\ Nep.\ Log.\ \sqrt{-1}=\tfrac{1}{4}\pi$$

of

$$\frac{Nep.\ Log.\ \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

zoodat de gevraagde waarde gelijk is aan $\tfrac{1}{2}\pi$.

AANMERKING. Voor de laatste vergelijking kan men schrijven

$$Nep.\ Log.\ (\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}}=\tfrac{1}{2}\pi$$

of, daar $\dfrac{1}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$ is,

$$Nep.\ Log.\ (\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\pi;$$

gaat men nu van de logarithmen tot de getallen over, dan vindt men nog

$$(\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}=e^{\frac{1}{2}\pi},$$

waarin e de bazis van het Neperiaansche logarithmenstel beteekent.

C. VOORSTEL,

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Uit de vergelijking

$Sin.\phi+Cos.\phi+Tang.\phi+Cot.\phi+Sec.\phi+Cosec.\phi=a(=17)$, *de waarde van den boog* ϕ *te vinden?*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, D. W. HINSE *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Indien wij de beide leden der gegevene vergelijking vermenigvuldigen met $Sin.\phi\ Cos.\phi$, komt er

$$(Sin.\phi+Cos.\phi)Sin.\phi Cos.\phi+Sin.^2\phi+Cos.^2\phi+Sin.\phi+Cos.\phi=aSin.\phi Cos.\phi,$$

waarvoor men, omdat $Sin.^2\phi + Cos.^2\phi = 1$ is, ook kan schrijven

$$(Sin.\phi+Cos.\phi)(Sin.\phi Cos.\phi+1)=aSin.\phi Cos.\phi-1;$$

brengen wij deze vergelijking in het vierkant, daarbij in aanmerking nemende, dat $(Sin.\phi + Cos.\phi)^2 = Sin.^2\phi + 2Sin.\phi\ Cos.\phi + Cos.^2\phi = 1 + 2Sin.\phi\ Cos.\phi$ is, dan komt er

$$(1+2Sin.\phi Cos.\phi)(Sin.\phi Cos.\phi+1)^2=(aSin.\phi Cos.\phi-1)^2$$

of, na ontwikkeling en rangschikking der termen volgens de afdalende magten van $Sin.\phi\ Cos.\phi$,

$$2Sin.^3\phi Cos.^3\phi-(a^2-5)Sin.^2\phi Cos.^2\phi+(2a+4)Sin.\phi Cos.\phi=0.$$

Aan deze vergelijking wordt nu wel voldaan door $Sin.\phi\ Cos.\phi = 0$, maar deze waarde voldoet niet aan de oorspronkelijke vergelijking, en is, door de plaats gehad hebbende vermenigvuldiging met $Sin.\phi\ Cos.\phi$, ingevoerd geworden; wij kunnen dus door $Sin.\phi\ Cos.\phi$ deelen en verkrijgen dan

$$2Sin.^2\phi Cos.^2\phi-(a^2-5)Sin.\phi Cos.\phi+2a+4=0$$

of $$4Sin.^2\phi Cos.^2\phi-2(a^2-5)Sin.\phi Cos.\phi+4a+8=0;$$

daar verder $2Sin.\phi\ Cos.\phi = Sin.2\phi$ is, hebben wij ten laatste

$$Sin.^2 2\phi-(a^2-5)Sin.2\phi+4a+8=0,$$

waaruit, volgens de gewone leerwijze der vierkantsvergelijkingen, gevonden wordt

$$Sin.2\phi = \frac{a^2-5}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{(a^2-5)^2}{4} - 4a-8\right\}},$$

dat is $$Sin2\phi = \frac{(a^2-5) \pm \sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)}}{2},$$

waarvoor men, omdat de grootheid, onder het wortelteeken

voorkomende, door $(a+1)^2$ deelbaar is, ook schrijven kan

$$Sin.2\phi = \frac{(a^2-5) \pm (a+1)\sqrt{(a^2-2a-7)}}{2},$$

zoodat nu de waarde van 2ϕ en dus ook de boog ϕ bekend wordt.

Voor $a = 17$ vindt men

$$Sin.2\phi = 142+18\sqrt{62} \quad \text{en} \quad Sin.2\phi = 142-18\sqrt{62},$$

waarvan alleen de laatste waarde in aanmerking kan komen, omdat $Sin.2\phi$ niet grooter dan 1 mag zijn. Deze laatste waarde berekenende en verder de tafels gebruikende, vinden wij

$$Sin.2\phi = 0,\ 26786,$$

$$2\phi = 15°\ 32'\ 12'' \text{ of } 2\phi = 164°,\ 27'\ 48''$$

en $\phi = 7°\ 46'\ 6''$ of $\phi = 82°\ 13'\ 54''$.

Daar men verder uit de tafels zal vinden:

$Sin.\ 7°\ 46'\ 6'' = Cos.\ 82°\ 13'\ 54'' = 0,\ 13517,$
$Cos.\ 7°\ 46'\ 6'' = Sin.\ 82°\ 13'\ 54'' = 0,\ 99082,$
$Tang.\ 7°\ 46'\ 6'' = Cot.\ 82°\ 13'\ 54'' = 0,\ 13642,$
$Cot.\ 7°\ 46'\ 6'' = Tang.\ 82°\ 13'\ 54'' = 7,\ 33031,$
$Sec.\ 7°\ 46'\ 6'' = Cosec.\ 82°\ 13'\ 54'' = 1,\ 00926,$
$Cosec.\ 7°\ 46'\ 6'' = Sec.\ 82°\ 13'\ 54'' = 7,\ 39820,$

en de som dezer getallen nagenoeg 17 is, blijkt bij de proef, dat de waarden $\phi = 7°\ 46'\ 6''$ en $\phi = 82°\ 13'\ 54''$, nagenoeg aan de gegevene vergelijking, $a = 17$ zijnde, voldoen.

Aanmerking. Het getal a kan niet willekeurig gegeven worden; vooreerst moet de wortelgrootheid $\sqrt{(a^2-2a-7)}$ bestaanbaar zijn, en ten andere behoort $\pm Sin.2\phi <$ of $= \pm 1$ te wezen. Zoo wij $a^2-2a-7 = 0$ stellen, volgt daaruit $a = 1 \pm 2\sqrt{2}$; hierdoor blijkt, dat de wortelgrootheid onbestaanbaar zal zijn, zoodra a tusschen de grenzen $1 + 2\sqrt{2}$ en $1 - 2\sqrt{2}$ gegeven wordt; en, met uitzondering van het geval, dat $a = -1$ is, wordt dan ook $Sin.2\phi$ onbestaanbaar. Om verder na te gaan, welke waarden a hebben kan, zonder dat $Sin.2\phi$ buiten de grenzen $+1$ en -1 valt, stellen wij

$$Sin.2\phi = \frac{a^2-5+\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)}}{2} = X$$

en $$Sin.2\phi = \frac{a^2-5-\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)}}{2} = Y.$$

Nemen wij nu in de eerste plaats aan, dat a positief is, dan moet, zoo als reeds gebleken is, $a > 1 + 2\sqrt{2}$ en dus $a^2 > 9 + 4\sqrt{2}$ zijn; in verband hiermede kan nooit $X < 1$ zijn, want uit $a^2 > 9 + 4\sqrt{2}$ volgt dat $a^2 - 5 > 4 + 4\sqrt{2}$, $\frac{a^2-5}{2} > 2 + 2\sqrt{2}$, $\frac{a^2-5}{2} > 1$ en dus ook $X > 1$ is. Zal, voor zulk eene positieve waarde van a, Y eene bruikbare waarde voor $Sin.2\phi$ geven, dan moet $Y > -1$ en $Y < 1$ zijn, dat is wij moeten hebben:

$$a^2-5-\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)}>-2$$

en

$$a^2-5-\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)}<2;$$

de eerste dezer voorwaarden geeft achtervolgens:

$$a^2-3>\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)},$$

$$a^4-6a^2+9>a^4-10a^2-16a-7,$$

$$4a^2+16a+16>0,$$

$$4(a+2)^2>0$$

en is dus van zelve vervuld; uit de tweede volgt, dat men zal moeten hebben:

$$a^2-7<\sqrt{(a^4-10a^2-16a-7)},$$

$$a^4-14a^2+49<a^4-10a^2-16a-7,$$

$$0<4a^2-16a-56,$$

$$0<a^2-4a-14,$$

$$18<a^2-4a+4,$$

$$3\sqrt{2}\sqrt{}<a-2$$

of eindelijk

$$a>2+3\sqrt{2}.$$

Nemen wij in de tweede plaats aan, dat a negatief is, en stellen wij gemakshalve $a = -b$, waardoor

$$Sin.2\phi = \frac{b^2-5+\sqrt{(b^4-10b^2+16b-7)}}{2} = X$$

en

$$Sin.2\phi = \frac{b^2-5-\sqrt{(b^4-10b^2+16b-7)}}{2} = Y$$

wordt, dan is de vraag, welke positieve waarden b hebben kan. Uit de voor a aangewezene grenzen, ten aanzien van de bestaanbaarheid der worteluitdrukking, blijkt, dat $b > 2\sqrt{2} - 1$ en dus $b^2 > 9 - 4\sqrt{2}$ moet wezen; zal nu, voor zulk eene waarde van b, X eene bruikbare waarde voor $Sin.2\phi$ opleveren, dan moet $X > -1$ en $X < 1$ zijn, men zal dus moeten hebben

$$b^2 - 5 + \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} > -2$$

en $b^2 - 5 + \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} < 2$;

de eerste dezer voorwaarden is van zelve vervuld, want uit $b^2 > 9 - 4\sqrt{2}$ volgt, dat $b^2 - 3 > 6 - 4\sqrt{2}$, dus ook $b^2 - 3 > 0$, $b^2 - 5 > -2$ en zoo veel te meer $b^2 - 5 + \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} > -2$ is; uit de tweede volgt, dat men zal moeten hebben

$$\sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} < 7 - b^2;$$

is nu $b > \sqrt{7}$, dan kan deze voorwaarde niet vervuld worden, maar anders moet men hebben

$$b^4 - 10b^2 + 16b - 7 < 49 - 14b^2 + b^4,$$
$$4b^2 + 16b - 56 < 0,$$
$$b^2 + 4b - 14 < 0,$$
$$b^2 + 4b + 4 < 18,$$
$$b + 2 < 3\sqrt{2},$$

en eindelijk $b < -2 + 3\sqrt{2}$.

Zal in dit geval ook Y eene bruikbare waarde voor *Sin.*2ϕ zijn, dan moet $Y > -1$ en $Y < 1$ wezen; men moet dan hebben

$$b^2 - 5 - \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} > -2$$

en $b^2 - 5 - \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)} < 2$;

de eerste van deze voorwaarden kan men herleiden tot

$$b^2 - 3 > \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)},$$
$$b^4 - 6b^2 + 9 > b^4 - 10b^2 + 16b - 7,$$
$$4b^2 - 16b + 16 > 0$$

of $4(b - 2)^2 > 0$,

waaruit blijkt, dat zij van zelve vervuld is; uit de tweede voorwaarde volgt, dat men zal moeten hebben

$$b^2 - 7 < \sqrt{(b^4 - 10b^2 + 16b - 7)};$$

is nu $b < \sqrt{7}$, dan zal deze voorwaarde van zelve vervuld zijn, maar is $b > \sqrt{7}$, dan moet men hebben

$$b^4 - 14b^2 + 49 < b^4 - 10b^2 + 16b - 7,$$
$$0 < 4b^2 + 16b - 56,$$
$$0 < b^2 + 4b - 14,$$
$$18 < b^2 + 4b + 4,$$
$$3\sqrt{2} < b + 2$$

en eindelijk $b > -2 + 3\sqrt{2}$,

hetgeen reeds in de onderstelling $b > \sqrt{7}$ ligt opgesloten en dus geene nieuwe voorwaarde aanwijst.

Uit dit alles blijkt dan: dat $a > 2 + 3\sqrt{2}$ zijnde, de waarde van *Sin*.2ϕ door het bovenste teeken te gebruiken grooter dan 1 zal worden, maar door het onderste teeken te nemen tusschen -1 en 1 zal vallen;
dat $a < 2 + 3\sqrt{2}$ en $a > 1 + 2\sqrt{2}$ zijnde, wel de wortelgrootheid bestaanbaar is, maar beide de waarden van *Sin*.2ϕ grooter dan 1 zullen worden;
dat $a < 1 + 2\sqrt{2}$ en $-a < -1 + 2\sqrt{2}$ zijnde, de wortelgrootheid onbestaanbaar is;
dat $-a > -1 + 2\sqrt{2}$ en $-a < -2 + 3\sqrt{2}$ zijnde, de beide waarden van *Sin*.2ϕ tusschen -1 en $+1$ zullen liggen;
en dat $-a > -2 + 3\sqrt{2}$ zijnde, de waarde van *Sin*.2ϕ voor het bovenste teeken grooter dan 1 zijn zal, maar voor het benedenste tusschen -1 en $+1$ zal liggen.

Zoo heeft men:

voor $a = 7$; $Sin.2\phi = \frac{44+16\sqrt{7}}{2}$ en $Sin.2\phi = \frac{44-16\sqrt{7}}{2} = 0,839$;

voor $a = 6$; $Sin.2\phi = \frac{31+7\sqrt{17}}{2}$ en $Sin.2\phi = \frac{31-7\sqrt{17}}{2} = 1,069$;

voor $a = 4$; $Sin.2\phi = \frac{11+5}{2} = 8$ en $Sin.2\phi = \frac{11-5}{2} = 3$;

voor $a = 3$; $Sin.2\phi = 2 \pm \sqrt{-5}$;

voor $a = -1,5$; $Sin.2\phi = \frac{-2,75 \pm 0,05\sqrt{-175}}{2}$;

voor $a = -1,9$; $Sin.2\phi = 0,983...$ en $Sin.2\phi = 0,407...$;
voor $a = -2$; $Sin.2\phi = 1$ en $Sin.2\phi = 0$;
voor $a = -2,1$; $Sin.2\phi = 0,403$ en $Sin.2\phi = -0,993$;
voor $a = -2,3$, $Sin.2\phi = 1,25$ en $Sin.2\phi = -0,96$;
voor $a = -17$, $Sin.2\phi = 142 + 16\sqrt{79}$ en $Sin.2\phi = 142 - 16\sqrt{79} = -0,105$;

enz.

CI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Eenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodat, als men bij het getal, dat den inhoud uitdrukt, de getallen optelt, die de lengten der regthoekszijden aangeven, er twee volkomen vierkanten komen? (*)

(*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect*, N°. 339. — Dit voorstel is onder No. 24 van dit Deel reeds opgegeven; van hetzelve verlangt men eene andere oplossing.

Opgelost *door* J. S. Speijer, K. Smit, G. Koster, F. C. Radijs *en* J. A. Hansen.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Om dit voorstel algemeener op te lossen, dan zulks vroeger (Zie het XXIV. Voorstel van dit Deel.) is gedaan, stellen wij voor de regthoekszijden x en y, dan is de inhond $\frac{1}{2}xy$, zoodat dan de uitdrukkingen $\frac{1}{2}xy + x$ en $\frac{1}{2}xy + y$ volkomen vierkanten zullen moeten zijn. Stellende te dien einde

$$\tfrac{1}{2}xy + x = m^2x^2 \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}xy + y = n^2y^2$$

of

$$y + 2 = 2m^2x^2 \quad \text{en} \quad x + 2 = 2n^2y,$$

zoo zal men, deze vergelijkingen ten opzigte van x en y oplossende, vinden

$$x = \frac{4n^2+2}{4m^2n^2-1} \quad \text{en} \quad y = \frac{4m^2+2}{4m^2n^2-1}.$$

Wil men nu daarenboven, dat de hypothenusa rationaal zij, dan moeten m en n zoodanig bepaald worden, dat

$$x^2 + y^2 = \frac{(4m^2+2)^2+(4n^2+2)^2}{(4m^2n^2-1)^2}$$

een volkomen vierkant worde; en daartoe is het, omdat de noemer dezer breuk reeds een vierkant is, genoegzaam den teller

$$T = (4m^2+2)^2 + (4n^2+2)^2$$

tot een vierkant te maken.

Hiertoe zal het noodig zijn, voor eene der beide letters m of n eene zekere waarde aan te nemen, en daarna te trachten, de waarde van de andere dier beide letters te vinden. Stellen wij dan eens $n = \frac{1}{4}$, zoo wordt

$$T = (4m^2+2)^2 + \tfrac{81}{16} = 16m^4+16m^2 + \tfrac{145}{16};$$

om deze uitdrukking tot een vierkant te maken, volgen wij de handelwijze door Euler opgegeven, doch zullen alvorens eene waarde voor m dienen op te sporen, waardoor T een vierkant wordt. Na eenige beproevingen, vinden wij dat $m = \frac{1}{2}$ hieraan voldoet; wij stellen dus $m = p + \frac{1}{2}$ en verkrijgen daardoor

$$T = 16p^4 + 32p^3 + 40p^2 + 24p + \tfrac{225}{16} \ldots (A).$$

Nemen wij nu, voor den vierkantswortel uit deze uitdrukking, den vorm $ap^2 + bp + \frac{15}{4}$ aan, dan moet

$$16p^4+32p^3+40p^2+24p+\tfrac{225}{16} = a^2p^4+2abp^3+(\tfrac{15}{2}a+b^2)p^2+\tfrac{15}{2}bp+\tfrac{225}{16}$$

wezen; door verder $\frac{15}{2}a + b^2 = 40$ en $\frac{15}{2}b = 24$ te nemen, waardoor $b = \frac{16}{5}$ en $a = \frac{1488}{375}$ wordt, verandert de laatste vergelijking in

$$16p^4 + 32p^3 = (\tfrac{1488}{375})^2 p^4 + \frac{2.\,1488.\,16}{375.\;5}p^3,$$

waaruit, na door p^3 gedeeld te hebben, volgt

$$p = -\tfrac{2150}{83} \text{ en } m = p + \tfrac{1}{2} - \tfrac{4217}{166}.$$

Deze waarde voor m, benevens de vroeger aangenomene $n = \frac{1}{4}$, in de bovenstaande waarden van x en y substituerende, vinden wij voor de zijden des driehoeks:

$$x = \frac{4n^2+2}{4m^2n^2-1} = \frac{82668}{5890955},$$

$$y = \frac{4m^2+2}{4m^2n^2-1} = \frac{94916624}{5890955}$$

en $$\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{94916660}{5890955}.$$

Daar er nu één driehoek gevonden is, zal men ligtelijk nog meerdere kunnen vinden, door in de uitdrukking (A) $p = q - \frac{2150}{83}$ te stellen.

Even zoo zullen de in het XXIV. Voorstel gevondene waarden kunnen dienen, om meerdere driehoeken te vinden, die aan de vraag voldoen. Dáár is namelijk voor de regthoekszijden gevonden $x = \frac{16}{19}$ en $y = \frac{12}{19}$; hiermede komt overeen $m = \frac{5}{4}$ en $n = \frac{3}{2}$. De uitdrukking

$$T = (4m^2 + 2)^2 + (4n^2 + 2)^2$$

gaat voor $n = \frac{3}{2}$ over in

$$T = 16m^4 + 16m^2 + 125$$

en moet klaarblijkelijk voor $m = \frac{5}{4}$ een vierkant worden; zij dus $m = p + \frac{5}{4}$, dan verandert dezelve in

$$T = 16p^4 + 80p^3 + 166p^2 + 165p + \tfrac{3025}{16}.$$

Laat nu $ap^2 + bp + \frac{55}{4}$, voor den vierkantswortel hieruit, aangenomen worden, dan zal men, even als boven te werk gaande, vinden $p = \frac{11}{3}$, $m = p + \frac{5}{4} = \frac{59}{12}$ en eindelijk

$$x = \tfrac{144}{2835},\; y = \tfrac{1292}{2835} \text{ en } \sqrt{(x^2 + y^2)} = \tfrac{1300}{2835}.$$

Aanmerking. Had men, in de uitdrukking (A), $p = 0$ genomen dan zou $m = \frac{1}{2}$ en $4m^2n^2 - 1$ negatief geworden zijn. Hierdoor zoude men ook voor x en y negatieve waarden verkregen hebben en dus het vraagstuk opgelost

hebben: *Om eenen regthoekigen driehoek te vinden, zoodat, als men van het getal, dat den inhoud uitdrukt, de getallen aftrekt, die de lengten der regthoekszijden aangeven, er twee volkomen vierkanten komen.* Door $m = \frac{1}{2}$ nevens $n = \frac{1}{4}$ te nemen, zal men alzoo voor zulk eenen driehoek vinden, $-x = \frac{12}{5}$, $-y = \frac{16}{5}$ en $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{20}{5}$.

Men zal ook zulk eenen driehoek verkrijgen, als men, voor den vierkantswortel uit de uitdrukking (A), den vorm $4p^2 + bp + \frac{15}{4}$ aanneemt en vervolgens $\frac{15}{2}b = 24$ stelt; alsdan zal men vinden $p = \frac{3}{80}$, $m = p + \frac{1}{2} = \frac{43}{80}$ en dus, altijd $n = \frac{1}{4}$ zijnde, $-x = \frac{6400}{2039}$, $-y = \frac{8076}{2039}$ en $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{11024}{2039}$.

II. Oplossing *van* K. Smit.

Stel voor de regthoekszijden $2ax$ en $2bx$, dan is de inhoud $2abx^2$, de hypothenusa $2x\sqrt{(a^2 + b^2)}$, en het komt er dus op aan, dat de drie uitdrukkingen

$$2abx^2 + 2ax,\ 2abx^2 + 2bx \text{ en } a^2 + b^2$$

tot volkomene vierkanten gemaakt worden.

Laat $$2abx^2 + 2ax = a^2c^2x^2$$
en $$2abx^2 + 2bx = b^2d^2x^2$$
zijn, dan vindt men

$$x = \frac{2}{ac^2 - 2b} \text{ en } x = \frac{2}{bd^2 - 2a},$$

waaruit volgt, dat

$$ac^2 - 2b = bd^2 - 2a$$

of $$a(c^2 + 2) = b(d^2 + 2)$$

moet wezen. Indien men nu $a = d^2 + 2$ stelt, is $b = c^2 + 2$ en men heeft dan

$$a^2 + b^2 = d^4 + 4d^2 + c^4 + 4c^2 + 8.$$

Om nu ook deze uitdrukking tot een vierkant te maken, stelle men voor den wortel uit dezelve $d^2 + 2 + 2e^2$, dan heeft men

$$d^4 + 4d^2 + c^4 + 4c^2 + 8 = d^4 + 4d^2 + 4 + 4d^2e^2 + 8e^2 + 4e^4,$$

waaruit volgt

$$d^2 = \frac{c^4 + 4c^2 + 4 - 8e^2 - 4e^4}{4e^2}.$$

Stellende verder $$d = \frac{c^2 - 2}{2e},$$

zoo is $$c^4 + 4c^2 + 4 - 8e^2 - 4e^4 = c^4 - 4c^2 + 4,$$

waaruit volgt

$$c^2 = \frac{4e^2 + 2e^4}{4}.$$

Stellende eindelijk

$$c = \frac{e^2 f - 2e}{2},$$

dan wordt

$$4e^2 + 2e^4 = e^4 f^2 - 4e^3 f + 4e^2;$$

waaruit volgt

$$e = \frac{4f}{f^2 - 2}.$$

Nemende nu $f = 2$, dan is $e = 4$, $c = 12$, $d = \frac{21}{4}$, $b = 146$, $a = \frac{5073}{10}$, $x = \frac{2}{45305}$; en hierdoor verkrijgt men, voor de zijden des driehoeks:

$2ax = \frac{5073}{181400}$, $2bx = \frac{2336}{181400}$ en $2x\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{5585}{181400}$.

CII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Op zekere plaats gaat de zon des avonds te 8 uren onder, en dat tweemaal zoo veel graden benoorden het westen, als toen ter tijd hare declinatie was. Men vraagt naar de poolshoogte van die plaats en naar de Zonsdeclinatie? (*)

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, G. KOSTER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat, van de bedoelde plaats, T (Fig. 36) het toppunt, NPTZ den middagcirkel en NWZ de westelijke helft van den horizon voorstellen, waarin N het noorden, Z het zuiden en W het westen verbeeldt; zij voorts P de noordpool en S de plaats waar de zon zich bij haren ondergang bevindt, dan late men door de punten P en S den declinatie-cirkel PS gaan; hierdoor ontstaat er een regthoekige bolvormige driehoek PNS, regthoekig in N zijnde.

Stellen wij nu de poolshoogte door x en de zonsdeclinatie door y voor, dan is PN $= x$, PS $= 90° - y$ en volgens de opgegevene voorwaarde WS $= 2y$ of SN $= 90° - 2y$; voorts is *hoek* SPN de uurhoek van den tijd, die er van het ondergaan der zon tot middernacht verloopen moet, en omdat deze tijd 4 uren bedraagt, zoo is *hoek* SPN $= 60°$.

(*) P. HALCKER, *Zinnen Confect*, No. 569.

Zoo als bekend is, heeft men in den driehoek PNS:

$$Cos.\ PS = Cos.\ PN \times Cos.\ SN$$

en
$$Sin.\ SN = Sin.\ SPN \times Sin.\ PS;$$

door in deze vergelijkingen de bovenstaande waarden over te brengen, vindt men

$$Cos.\ (90^\circ - y) = Cos.x.\ Cos.\ (90^\circ - 2y)$$

en
$$Sin.\ (90^\circ - 2y) = Sin.60^\circ\ Sin.\ (90 - y),$$

of wel
$$Sin.y = Cos.x\ Sin.2y$$

en
$$Cos.2y = \tfrac{1}{2}Cos.y.\ \sqrt{3}.$$

Deze laatste vergelijking wordt achtervolgens herleid tot:

$$2Cos.^2y - 1 = \tfrac{1}{2}Cos.y.\ \sqrt{3},$$

$$2Cos.^2y - (\tfrac{1}{2}\sqrt{3})\ Cos.y - 1 = 0$$

en
$$Cos.^2y - (\tfrac{1}{4}\sqrt{3})\ Cos.y - \tfrac{1}{2} = 0,$$

waaruit door oplossing gevonden wordt

$$Cos.y = \tfrac{1}{8}\sqrt{3} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{35}.$$

Uit de vergelijking $Sin.y = Cos.x\ Sin.2y$ volgt verder,

$$Cos.x = \frac{Sin.y}{Sin.2y} = \frac{Sin.y}{2Sin.yCos.y} = \frac{1}{2Cos.y};$$

en hierin de zoo even gevondene waarde van $Cos.y$ substituerende, verkrijgt men, na behoorlijke herleiding,

$$Cos.x = -\tfrac{1}{8}\sqrt{3} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{35}.$$

Omdat eindelijk x en y, uit den aard der zaak, niet grooter dan 90° kunnen zijn, zoo moeten de Cosinussen dier bogen positief zijn; derhalve heeft men

$$Cos.x = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{3}}{8} = 0,\ 5230036$$

en
$$Cos.y = \frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{8} = 0,\ 9560163,$$

waaruit volgens de tafels gevonden wordt:

voor de poolshoogte, $x = 58^\circ\ 27'\ 57'',\ 8$

en - voor de declinatie, $y = 17^\circ\ 3'\ 23'',\ 2.$

Aanmerking. Hoewel de Cosinussen, van negatieve bogen kleiner dan 90°, insgelijks positief zijn, zullen echter de gevraagde breedte en declinatie niet negatief, dat is zuidelijk, kunnen wezen. Want was y negatief, dan zou ook WS negatief zijn, en de zon zou dan *bezuiden* het westen onder gaan, hetgeen met de opgave strijdt. En was x negatief, dan zou ook y negatief moeten zijn, alzoo in den driehoek PNS

$$Tang.\ NP = Tang.\ PS \times Cos.\ NPS$$

of $$Tang.\ x = Tang.\ (90^\circ - y)\ Cos.\ 60^\circ = \tfrac{1}{2}\ Cot.y$$

is, en uit de laatste vergelijking volgt, dat x en y met hetzelfde teeken moeten aangedaan zijn.

CIII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men vraagt naar de poolshoogte van eene plaats, waar de zon des morgens zoo veel graden benoorden het oosten opgaat, als dezelve in het zuiden beneden het toppunt komt te staan?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, G. KOSTER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat van de bedoelde plaats T (Fig. 37) het toppunt, NPTZ den middagcirkel en NOZ de oostelijke helft van den horizon verbeelden, waarin N het noorden, Z het zuiden en O het oosten voorstelt; zij voorts P de noordpool, S de plaats waar de zon opgaat en S′ de plaats waar zij in het zuiden komt te staan, dan zal, als men door P en S den declinatie-cirkel PS brengt, zoowel PS als PS′ het complement der declinatie en dus PS = PS′ zijn.

Men stelle nu de poolshoogte PN $= \phi$, en hetgeen de zon benoorden het oosten opgaat OS $= \alpha$, dan is, volgens de opgave, ook TS′ $= \alpha$ en verder SN $= 90^\circ - \alpha$, PT $= 90^\circ - \phi$ en PS $=$ PS′ $=$ PT $+$ TS′ $= 90^\circ - \phi + \alpha = 90^\circ - (\phi - \alpha)$. Daar nu uit den regthoekigen bolvormigen driehoek PNS volgt:

$$Cos.\ PS = Cos.\ PN \times Cos.\ SN,$$

heeft men onmiddellijk de vergelijking

$$Cos.\ \{90^\circ - (\phi - \alpha)\} = Cos.\phi\ Cos.\ (90^\circ - \alpha)$$

of $$Sin.\ (\phi - \alpha) = Cos.\phi\ Sin.\alpha,$$

dat is: $$Sin.\phi\ Cos.\alpha - Cos.\phi\ Sin.\alpha = Cos.\phi\ Sin.\alpha,$$

waaruit volgt

$$Sin.\phi\ Cos.\alpha = 2Cos.\phi\ Sin.\alpha$$

of $$Tang.\phi = 2Tang.\alpha.$$

De poolshoogte wordt hierdoor terstond bepaald, indien slechts gegeven is, hoe veel graden de zon benoorden het oosten opgaat. Is het laatstgenoemde aantal graden niet gegeven, dan is het voorstel onbepaald, en men kan dan nog eene voorwaarde aannemen, om hetzelve bepaald te doen

worden. Neemt men, bij voorbeeld, den tijd van den opgang der zon willekeurig aan, dan is de hoek SPN bekend en men heeft, uit den driehoek PNS,

$$Tang.\ SN = Sin.\ PN \times Tang.\ SPN,$$

dat is, *hoek* SPN $= \beta$ stellende,

$$Tang.\ (90^\circ - \alpha) = Sin.\phi\ Tang.\beta,$$

$$Cot.\alpha = Sin.\phi\ Tang.\beta$$

of

$$Tang.\alpha = \frac{Cot.\beta}{Sin.\phi};$$

en deze vergelijking met de boven reeds gevondene verbindende, zal men ϕ gemakkelijk kunnen vinden.

Aanmerking *van* G. Koster. Indien men, om het voorstel bepaald te maken, er de voorwaarde wilde bijvoegen, dat de zon ook nog in het oosten even hoog boven den horizon moest staan als dezelve in het zuiden beneden het toppunt bleef, dan zou, indien het punt S″ op den vertikaalcirkel OT de zonsplaats in het oosten voorstelt, OS″ $=$ OS moeten wezen; het vlak van den dagcirkel SS″S′ moet dan het vlak van den horizon onder eenen hoek van 45° snijden, en dus ook de poolshoogte $\phi = 45^\circ$ zijn. Alsdan wordt, volgens de vergelijking $Tang.\phi = 2\ Tang.\alpha$,

$$Tang.\alpha = \tfrac{1}{2} = 0,5$$

en dus nagenoeg $\alpha = 26^\circ\ 34'$,

waardoor voor de declinatie gevonden wordt $: 90^\circ - PS = 90^\circ - (90^\circ - (\phi - \alpha)) = \phi - \alpha = 45^\circ - 26^\circ\ 34' = 18^\circ\ 26'$.

Indien dus de poolshoogte 45° en de declinatie 18° 26′ is, zal aan het voorstel, met bijvoeging der genoemde nieuwe voorwaarde, voldaan worden; kunnende voorts deze poolshoogte en declinatie zoowel zuidelijk als noordelijk zijn, mits slechts beide van denzelfden naam.

CIV. Voorstel.

Door K. Smit.

De zon 19° 28′ noorder-declinatie hebbende, gaat op zekere plaats zoo veel graden benoorden het oosten op, als hare grootste hoogte op dien dag boven den horizon bevonden wordt. Men vraagt de poolshoogte van de plaats en het uur van den zonsopgang te vinden?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, G. Koster *en* F. C. Radijs.

OPLOSSING van J. S. SPEIJER.

Dezelfde figuur als in het voorgaande voorstel gebruikende, zal nu $ZS' = OS$ moeten zijn, omdat de zon hare grootste hoogte boven den horizon bereikt heeft, wanneer zij zich in het zuiden en dus in het punt S' bevindt.

Men stelle nu $PN = \phi$, $OS = \alpha$, *hoek* $SPN = \beta$ en de gegevene declinatie $= \delta$, dan is ook $ZS' = \alpha$, en verder $SN = 90° - \alpha$, $PS = PS' = 90° - \delta$ en $\phi = PN = 180° - PS' - ZS' = 180° - (90° - \delta) - \alpha = 90° - (\alpha - \delta)$; de vergelijking

$$Cos.\ PS = Cos.\ SN \times Cos.\ PN,$$

uit den regthoekigen bolvormigen driehoek PNS getrokken, gaat hierdoor over in

$$Sin.\delta = Sin.\alpha\ Sin.(\alpha - \delta).$$

Deze vergelijking verandert verder, door toepassing der algemeene formule $Sin.p\ Sin.q = \frac{1}{2}Cos.\ (p-q) - \frac{1}{2}Cos.\ (p+q)$, in

$$Sin.\delta = \tfrac{1}{2}Cos.\delta - \tfrac{1}{2}Cos.(2\alpha - \delta),$$

en hieruit volgt dadelijk

$$Cos.(2\alpha - \delta) = Cos.\delta - 2Sin.\delta \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

door welke formule α berekend kan worden.

De poolshoogte wordt daarna door de formule

$$\phi = 90° - (\alpha - \delta)$$

gevonden; maar men kan even gevoegelijk ϕ onmiddellijk berekenen, want uit $\phi = 90° - (\alpha - \delta)$ volgt

$$\alpha = 90° - \phi + \delta,$$

$$2\alpha = 180° - 2\phi + 2\delta,$$

$$2\alpha - \delta = 180° - (2\phi - \delta)$$

en $$Cos.(2\alpha - \delta) = -Cos.(2\phi - \delta),$$

waardoor men in verband met (1) heeft

$$Cos.(2\phi - \delta) = 2Sin.\delta - Cos.\delta \ . \ . \ . \ (2).$$

Om het uur van den zonsopgang te vinden, hebben wij, uit den bolvormigen driehoek PNS,

$$Sin.\ SN = Sin.\ SPN \times Sin.\ PS$$

of $$Cos.\alpha = Sin.\beta\ Cos.\delta,$$

waaruit volgt $$Sin.\beta = \frac{Cos.\alpha}{Cos.\delta} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3);$$

deze hoek β hierdoor berekend en in uren overgebragt wordende, zal den tijd na middernacht aangeven, waarop de opgang der zon plaats heeft.

Voor $\delta = 19^\circ\ 28'$, vindt men door (1) en (2) $\phi = 62^\circ\ 45'\ 13''$ en $\alpha = 46^\circ\ 42'\ 47''$; door (3) vindt men dan verder $\beta = 46^\circ\ 39'\ 15''$, of in tijd $\beta = 3^u\ 6'\ 37''$.

Aanmerking. Omdat α noodwendig positief moet zijn, zal hier slechts één antwoord op het voorstel bestaan.

CV. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Uit de hoekpunten A, B *en* C *van eenen gegevenen driehoek* ABC, (*Fig.* 38) *kunnen lijnen* AD, BE *en* CF *getrokken worden, die achtervolgens met de zijden* AB, BC *en* CA *gelijke hoeken maken. Hoe groot moeten deze gelijke hoeken zijn, opdat de driehoek, die door de onderlinge snijding der alzoo te trekken lijnen ontstaat, gelijk en gelijkvormig aan den gegevenen driehoek zij?*

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. van Lankeren Matthes, D. W. Hinse *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat DEF de driehoek zijn, die door de onderlinge snijding der getrokkene lijnen ontstaat, dan zal, hoe groot ook de gelijke hoeken BAD, CBE en ACF mogen genomen zijn, de driehoek DEF altijd gelijkvormig met den gegeven driehoek ABC zijn; want stellende *hoek* BAD = *hoek* CBE = *hoek* ACF = ψ, dan is:

$$\text{hoek } EDF = \text{hoek } DAC + \text{hoek } DCA = \text{hoek } DAC + \psi,$$

$$\text{hoek } BAC = \text{hoek } DAC + \text{hoek } BAD = \text{hoek } DAC + \psi,$$

en dus
$$\text{hoek } EDF = \text{hoek } BAC;$$

op gelijke wijze blijkt, dat *hoek* DEF = *hoek* ABC en *hoek* DFE = *hoek* ACB is; de driehoeken ABC en DEF zijn alzoo gelijkhoekig en dus ook gelijkvormig.

Zal nu de driehoek DEF bovendien gelijk zijn aan den driehoek ABC, dan moet ψ zoodanig bepaald worden, dat een der zijden van den eenen driehoek gelijk worde aan de gelijkstandige zijde van den anderen; bij voorbeeld, zoo, dat EF = BC zij. Stellen wij daartoe kortheidshalve

$$\text{hoek } BAC = \text{hoek } EDF = \alpha,$$

$$\text{hoek } ABC = \text{hoek } DEF = \beta$$

en
$$\text{hoek } ACB = \text{hoek } DFE = \gamma,$$

dan vinden wij, uit den driehoek EAB,

$$EB = \frac{AB \times Sin.EAB}{Sin.AEB} = \frac{AB\ Sin.\psi}{Sin.BED} = \frac{AB\ Sin.\psi}{Sin.\beta};$$

maar omdat $AB : BC = Sin.\gamma : Sin.\alpha$ en $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ is, hebben wij ook

$$AB = \frac{BC Sin.\gamma}{Sin.\alpha} = \frac{BC Sin.(\alpha+\beta)}{Sin.\alpha},$$

en door substitutie hiervan, gaat de bovenstaande waarde van EB over in

$$EB = BC\ Sin.\psi.\ \frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin.\alpha\ Sin.\beta};$$

voorts is, uit den driehoek CBF,

$$BF = \frac{BC Sin.BCF}{Sin.BFC} = \frac{BC Sin.(\psi-\gamma)}{Sin.\gamma} = BC Sin.\psi\ \frac{Sin.(\psi-\gamma)}{Sin.\psi Sin.\gamma},$$

en deze waarde bij die van EB optellende, komt er

$$EF = EB + BF = BC\ Sin.\psi \left\{\frac{Sin.(\alpha+\beta)}{Sin.\alpha Sin.\beta} + \frac{Sin.(\psi-\gamma)}{Sin.\psi Sin.\gamma}\right\},$$

of, daar in het algemeen $\frac{Sin.(p \pm q)}{Sin.p Sin.q} = Cot.q \pm Cot.p$ is,

$$EF = BC\ Sin.\psi\ \{Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\psi\} \ldots (1).$$

Dewijl nu EF = BC moet zijn, hebben wij

$$BC = BC\ Sin.\psi\ \{Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\psi\},$$

waaruit, na door BC $Sin.\psi$ gedeeld te hebben, volgt:

$$Cosec.\psi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\psi,$$

$$Cosec.\psi + Cot.\psi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma$$

of wel $$Cot.\tfrac{1}{2}\psi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma \ldots (2),$$

waardoor de grootte der gelijke hoeken gevonden is, naar welke in de opgaaf gevraagd wordt.

Aanmerkingen. 1°. De oplossing van het LXXXIX. Voorstel, kan onmiddellijk uit de hier gevondene vergelijking (1) afgeleid worden; want noemen wij ϕ de gelijke hoeken, welken de te trekken lijnen met de zijden des driehoeks moeten maken, opdat die lijnen elkander in een zelfde punt snijden, dan moet in (1) voor $\psi = \phi$, EF = 0 worden, waaruit volgt

$$0 = BC\ Sin.\phi\ (Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\phi);$$

omdat nu de factor BC $Sin.\phi$ in dit geval niet gelijk nul kan zijn, moet $Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\phi = 0$ wezen, waaruit, even als in het genoemde voorstel gevonden is, volgt

$$Cot.\phi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma \quad \ldots \quad (3).$$

2°. Uit het verband der vergelijkingen (2) en (3) volgt onmiddellijk

$$\psi = 2\phi;$$

construeert men dus, gelijk in de oplossing van het LXXXIX. Voorstel is aangewezen, het punt P zoodanig, dat *hoek* BAP = *hoek* CBP = *hoek* ACP = ϕ zij, en maakt men vervolgens

hoek BAD = 2 *hoek* BAP, *hoek* CBE = 2 *hoek* CBP en *hoek* ACF = 2 *hoek* ACP,

dan zal hierdoor de driehoek DEF geconstrueerd zijn, die gelijk en gelijkvormig aan den driehoek ABC is en door de onderlinge snijding der volgens de opgave getrokkene lijnen wordt gevormd.

3°. Uit het XCI. Voorstel volgt, dat men ook nog heeft

$$Cot.\tfrac{1}{2}\psi = \frac{AB^2+BC^2+AC^2}{4\,I}.$$

CVI. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Hoe groot moeten de gelijke hoeken zijn, waarvan in het voorgaande voorstel gesproken is, opdat de driehoek, door de onderlinge snijding der te trekken lijnen ontstaande, zoo groot mogelijk zij?

Opgelost door J. S. Speijer, D. van Lankeren Matthes, D. W. Hinse en F. C. Radijs.

Oplossing van J. S. Speijer.

Daar in het vorige voorstel is aangetoond, dat de driehoek DEF steeds gelijkvormig is aan den gegeven' driehoek, zoo heeft men

$$\frac{Inh.\ drieh.\ DEF}{Inh.\ drieh.\ ABC} = \frac{EF^2}{BC^2};$$

opdat dus de driehoek DEF zoo groot mogelijk worde, zal het genoegzaam zijn, de gelijke hoeken ψ zoodanig te bepalen, dat de verhouding $\frac{EF^2}{BC^2}$ zoo groot mogelijk en dus $\frac{EF}{BC}$ positief of negatief genomen een maximum zij.

Stellen wij nu $\frac{EF}{BC} = x$, en kortheidshalve $Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma = S$, dan volgt, uit de vergelijking (1) van

het vorige voorstel,

$$z = Sin.\psi\ (S - Cot.\psi)$$

of wel $$z = S.\ Sin.\psi - Cos.\psi;$$

hiervan de differentiaal-quotienten opmakende, heeft men

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = S.\ Cos.\psi + Sin.\psi$$

en $$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = - S.\ Sin.\psi + Cos.\psi.$$

Door nu $\frac{\partial z}{\partial \psi} = 0$ te stellen, vindt men dadelijk

$$Tang.\psi = - S;$$

de hieruit voortvloeijende waarde van ψ kan $\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}$ positief of negatief maken, maar daar uit de bovenstaande waarden van z en $\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}$ blijkt, dat altijd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = - z$$

is, zoo zal, ingeval $\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}$ negatief is, z een maximum en positief, maar ingeval, $\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}$ positief is, z een minimum en negatief wezen; doch in beide gevallen wordt z^2 of $\frac{EF^2}{BC^2}$ een maximum.

De inhoud van den driehoek DEF zal dus zoo groot mogelijk zijn, indien men ψ zoodanig neemt, dat men heeft

$$Tang.\psi = - (Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma).$$

Aanmerkingen. 1°. Verbindt men deze vergelijking, met de in het LXXXIX. Voorstel gevondene vergelijking

$$Cot.\phi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma,$$

dan volgt daaruit

$$\psi = 90^\circ + \phi.$$

Construeert men dus, even als in de 2de Aanmerking op het vorige voorstel, het punt P (Fig. 38) en trekt men vervolgens, door de hoekpunten des driehoeks ABC, lijnen, die loodregt op PA, PB en PC staan, dan zal door de on-

derlinge snijding dezer lijnen den grootst mogelijken driehoek ontstaan.

2°. Stellen wij, in de uitdrukking $x = S. Sin.\psi - Cos.\psi$, de gevondene waarde $Tang.\psi = - S$, dan komt er

$$x = - Sin.\psi\ Tang.\psi - Cos.\psi = - \frac{Sin.^2\psi}{Cos.\psi} - Cos.\psi$$

$$= - \frac{Sin.^2\psi + Cos.^2\psi}{Cos.\psi} = - \frac{1}{Cos.\psi} = - Sec.\psi;$$

dus is $x^2 = Sec.^2\psi = 1 + Tang.^2\psi = 1 + S^2$

of $x^2 = 1 + (Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma)^2$,

hetgeen men, even als in het XC. Voorstel handelende, ook herleiden kan tot

$$x^2 = Cosec.^2\alpha + Cosec.^2\beta + Cosec.^2\gamma.$$

Het is deze uitdrukking, die de verhouding van den genoemden grootst mogelijken driehoek tot den gegevenen aanwijst.

CVII. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Uit de hoekpunten van eenen gegevenen driehoek, kan men lijnen trekken, die met de overstaande zijden des driehoeks gelijke hoeken maken. Hoe groot moeten deze gelijke hoeken zijn, opdat de driehoek, die door de onderlinge snijding der alzoo te trekken lijnen ontstaat, gelijk en gelijkvormig aan den gegeven' driehoek zij?

Opgelost door J. S. Speijer, D. van Lankeren Matthes, D. W. Hinse *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Zij ABD (Fig. 39) de gegeven driehoek, en laat uit de hoekpunten A, B en C respectievelijk de lijnen AA', BB' en CC' zoodanig getrokken zijn, dat de hoeken AA'C, BB'A en CC'B aan elkander gelijk zijn, dan zal de driehoek DEF, door de onderlinge snijding der lijnen AA', BB' en CC' ontstaande, altijd gelijkvormig met den gegeven' driehoek zijn. Want stellende *hoek* AA'C = *hoek* BB'A = *hoek* CC'B = ϕ, dan is

hoek EDF = *hoek* ACC' + *hoek* BB'A = *hoek* ACC' + ϕ

hoek BAC = *hoek* ACC' + *hoek* CC'A = *hoek* ACC' + ϕ

en dus *hoek* EDF = *hoek* BAC;

even zoo blijkt, dat *hoek* DEF $=$ *hoek* ABC en *hoek* DFE $=$ *hoek* ACB is; de driehoeken ABC en DEF zijn dus gelijkhoekig en bij gevolg gelijkvormig.

Zal nu de driehoek DEF bovendien gelijk zijn aan den driehoek ABC, dan moet ϕ zoodanig bepaald worden, dat eene der zijden van den eenen driehoek gelijk worde aan de gelijkstandige zijde van den anderen; bij voorbeeld zoo, dat EF $=$ BC zij. Stellen wij daartoe

$$hoek\ BAC = hoek\ EDF = \alpha,$$
$$hoek\ ABC = hoek\ DEF = \beta$$

en

$$hoek\ ACB = hoek\ DFE = \gamma,$$

dan is *hoek* ABF $=$ *hoek* BB'A $+$ *hoek* BA'B $= \phi + \alpha$ en dus vinden wij uit den driehoek ABF,

$$AF = \frac{AB \times Sin.ABF}{Sin.AFB} = \frac{AB.Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\gamma},$$

of, omdat $\frac{AB}{Sin.\gamma} = \frac{BC}{Sin.\alpha}$ is,

$$AF = \frac{BC.Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\alpha};$$

verder is *hoek* ACE $=$ *hoek* EDF $-$ *hoek* BB'A $= \alpha - \phi$, en dus volgt, uit den driehoek AEC,

$$AE = \frac{AC \times Sin.ACE}{Sin.AEC} = \frac{AC.Sin.(\alpha-\phi)}{Sin.\beta},$$

of, omdat $\frac{AC}{Sin.\beta} = \frac{BC}{Sin.\alpha}$ is,

$$AE = \frac{BC.Sin.(\alpha-\phi)}{Sin.\alpha};$$

en door optelling der gevondene waarden voor AF en AE, verkrijgen wij nu

$$EF = \frac{BC}{Sin.\alpha}\left\{Sin.(\alpha+\phi)+Sin.(\alpha-\phi)\right\}$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$EF = \frac{BC}{Sin.\alpha}.\ 2Sin.\alpha\ Cos.\phi = 2BC\ Cos.\phi \ldots\ldots (1).$$

Dewijl nu EF $=$ BC moet zijn, hebben wij

$$BC = 2BC\ Cos.\phi,$$

waaruit dadelijk volgt

$$Cos.\phi = \tfrac{1}{2} \text{ en } \phi = 60^\circ;$$

de gelijke hoeken moeten dus, om aan de voorwaarden van het voorstel te voldoen, hoeken van 60° zijn.

Aanmerking. Indien er gevraagd ware, ϕ zoodanig te bepalen, dat de te trekken lijnen elkander in een zelfde punt sneden, dan zou men in de vergelijking (1) slechts EF = 0 moeten stellen; hieruit zou dan volgen $Cos.\phi = 0$ en $\phi = 90°$, hetgeen dan ook met de bekende eigenschap der driehoeken overeenkomt.

CVIII. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Hoe groot moeten de gelijke hoeken zijn, waarvan in het voorgaande voorstel gesproken is, opdat de driehoek, door de onderlinge snijding der te trekken lijnen ontstaande, zoo groot mogelijk zij?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. van Lankeren Matthes, D. W. Hinse *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Daar, blijkens het vorige voorstel, de driehoek DEF, die door de onderlinge snijding der te trekken lijnen ontstaat, gelijkvormig met den gegeven driehoek ABC is, heeft men

$$\frac{Inh.\ drieh.\ DEF}{Inh.\ drieh.\ ABC} = \frac{EF^2}{BC^2} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2;$$

maar, blijkens de vergelijking (1) van het vorige voorstel, is $\frac{EF}{BC} = 2Cos.\phi$, en derhalve ook

$$\frac{Inh.\ drieh.\ DEF}{Inh.\ drieh.\ ABC} = 4Cos^2\phi \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Omdat nu de inhoud van den driehoek ABC standvastig is, zal die van den driehoek DEF, blijkens de laatste vergelijking, zoo groot mogelijk zijn, indien $Cos.\phi$ zoo groot mogelijk, dat is: indien $Cos.\phi = 1$ en dus $\phi = 0$ genomen wordt. De bedoelde lijnen moeten dan, door de hoekpunten van den gegeven driehoek, evenwijdig met de overstaande zijden, getrokken worden.

De inhoud van dien grootsten driehoek wordt onmiddellijk gevonden, door in (2) $\phi = 0$ te stellen, waardoor men verkrijgt

$$Inh.\ drieh.\ DEF = 4 \times Inh.\ drieh.\ ABC.$$

Aanmerking. Indien men de lijnen, die door de hoekpunten van den driehoek ABC gaan en gelijke hoeken met de overstaande zijden maken, construeert, voor de beide

gevallen: 1°. dat deze lijnen door een zelfde snijpunt gaan, en 2°. dat zij den grootstmogelijken driehoek vormen, dan zullen, blijkens de bovenstaande oplossing en de aanmerking op het vorige voorstel, de lijnen tot het eene geval behoorende loodregt staan op die, welke tot het andere geval behooren.

Deze eigenschap stemt overeen met die, welke in de eerste aanmerking op het CVI. Voorstel is aangewezen, voor de lijnen, die door de hoekpunten gaan en gelijke hoeken met de achtervolgende zijden maken.

CIX. Voorstel.

Door D. van Lankeren Matthes.

Wanneer men, uit de hoekpunten A, B *en* C *van eenen gegevenen driehoek* ABC, (*Fig.* 40) *lijnen* AD, BE *en* CF *trekt, die achtervolgens met de zijden* AB, BC *en* CA *gelijke hoeken maken, zoodat er door de onderlinge snijding dier lijnen eenen nieuwen driehoek ontstaat, kan men, door de genoemde gelijke hoeken grooter of kleiner te nemen, een oneindig aantal zulke nieuwe driehoeken verkrijgen. Indien men nu in al deze driehoeken wederom lijnen uit de hoekpunten trekt, die achtervolgens met de aangrenzende zijden gelijke hoeken maken en daarenboven elkander in een zelfde punt snijden, begeert men de meetkunstige plaats van al deze snijpunten te vinden?*

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat in den driehoek DEF, die door de onderlinge snijding der lijnen AD, BE en CF ontstaat, DG, EG en FG volgens de opgaaf getrokken zijn, dan is, indien wij de gelijke hoeken respectievelijk door ψ en ϕ voorstellen,

$$\textit{hoek } BAD = \textit{hoek } CBE = \textit{hoek } ACF = \psi,$$

$$\textit{hoek } EDG = \textit{hoek } FEG = \textit{hoek } DFG = \phi$$

en het zal er dan op aankomen, de meetkunstige plaats van het punt G te bepalen.

Volgens het LXXXIX. Voorstel hebben wij

$$\textit{Cot.}\phi = \textit{Cot.}\ EDF + \textit{Cot.}\ FED + \textit{Cot.}\ DFE;$$

maar volgens het CV. Voorstel zijn de hoeken EDF, FED en DFE respectievelijk gelijk aan de hoeken van den gege-

ven' driehoek, zoodat wij, deze hoeken door α, β en γ voorstellende, hebben

$$Cot.\phi = Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma.$$

volgens het CV VOORSTEL is verder

$$EF = BC\ Sin.\psi \{Cot.\alpha + Cot.\beta + Cot.\gamma - Cot.\psi\},$$

en door substitutie der vorige waarde

$$EF = BC\ Sin.\psi\ (Cot.\phi - Cot.\psi);$$

trekken wij dus uit den driehoek EFG de formule

$$FG = \frac{EF Sin.FEG}{Sin.EGF} = \frac{EF Sin.\phi}{Sin.EGF},$$

dan vinden wij, door hierin de laatstgevondene waarde voor EF over te brengen en op te merken, dat *hoek* EGF $= 180° -$ *hoek* FEG $-$ *hoek* EFG $= 180° - \phi - ($*hoek* DFE $- \phi) = 180° -$ *hoek* DFE $= 180° - \gamma$ is,

$$FG = \frac{BC Sin.\psi Sin.\phi}{Sin.\gamma}\ (Cot.\phi - Cot.\psi);$$

terwijl uit den driehoek BFC almede volgt.

$$FC = \frac{BC Sin.FBC}{Sin.BFC} = \frac{BC Sin.\psi}{Sin.\gamma}.$$

Trekken wij nu, ter bepaling van de meetkunstige plaats van het punt G, de lijn CG, dan is in den driehoek CGF (Zie J. DE GELDER, *Beg. der Meètk.* derde Druk. §. 1053.)

$$Cot.\ FGC = \frac{FG}{FC}\ Cosec.\ CFG - Cot.\ CFG,$$

of
$$Cot.\ FGC = \frac{FG}{FC}\ Cosec.\phi - Cot.\phi,$$

en brengen wij hierin voor FG en FC de bovengevondene waarden, dan komt er, in aanmerking nemende, dat $Sin.\phi \times Cosec.\phi = 1$ is,

$$Cot.\ FGC = (Cot.\phi - Cot.\psi) - Cot.\phi = - Cot.\psi,$$

waaruit volgt

$$hoek\ FGC = 180° - \psi.$$

Hierdoor vinden wij vervolgens

$$hoek FCG = 180° - hoek FGC - hoek GFC = 180° - (180° - \psi) - \phi$$
$$= \psi - \phi$$

en $$hoek ACG = hoek ACD - hoek FCG = \psi - (\psi - \phi) = \phi.$$

Het is klaar, dat men, de lijnen AG en BG trekkende, op dezelfde wijze zal verkrijgen

$$hoek\ BAG = \phi \quad en \quad hoek\ CBG = \phi,$$

en dat bij gevolg, geheel onafhankelijk van ψ, het punt G, dat punt zijn zal, waarin de lijnen elkander snijden, die uit de hoekpunten des driehoeks zoodanig getrokken worden, dat zij met de achtervolgende zijden gelijke hoeken maken en een gemeenschappelijk snijpunt hebben. De begeerde meetkunstige plaats is dus een enkel punt, waarvan de constructie in de oplossing van het LXXXIX. Voorstel is aangewezen.

CX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

De naam van mijne geboorteplaats wordt met acht letters geschreven; deze letters aanduidende, door de getallen, die hare plaats in het alphabet aanwijzen, hebben zij de volgende eigenschappen: de 1ste, 3de, 3de + 5de *en* 1ste + 4de + 5de *zyn vier op elkander volgende vierkante getallen; de* 6de, 7de, 5de, + 8ste *en* 2de + 7de *zijn vier op elkander volgende vijfhoekige getallen en hebben respectievelijk dezelfde wortels als de genoemde vierkante getallen; overigens is de som van de* 1ste, 4de, 7de *en* 8ste *letter ééne eenheid meer, dan de som der vier overige letters. Hoe is de naam mijner geboorteplaats?*

Opgelost *door* B. Lubbers, J. A. Hansen, D. W. Hinse, L. van de Kasteele, G. Koster, P. Krom, F. C. Radijs *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* B. Lubbers.

De getallen, die de letters aanduiden, door p, q, r, s, t, u, v en w voorstellende, en den vierkantswortel uit het eerste van die getallen x noemende, heeft men volgens de opgaaf:

$$p=x^2 \quad \ldots \quad (1),$$
$$r=(x+1)^2=x^2+2x+1 \quad \ldots \quad (2),$$
$$r+t=(x+2)^2=x^2+4x+4 \quad \ldots \quad (3),$$
$$p+s+t=(x+3)^2=x^2+6x+9 \quad \ldots \quad (4),$$
$$u=\tfrac{1}{2}x(3x-1)=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x \quad \ldots \quad (5),$$
$$v=\tfrac{1}{2}(x+1)\{3(x+1)-1\}=\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+1 \ldots (6),$$
$$t+w=\tfrac{1}{2}(x+2)\{3(x+2)-1\}=\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{2}x+5 . (7),$$
$$q+v=\tfrac{1}{2}(x+3)\{3(x+3)-1\}=\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{17}{2}x+12 . (8),$$

en
$$p+s+v+w=q+r+t+u+1 \quad \ldots \quad (9).$$

Hieruit vindt men: door (2) van (3) af te trekken,

$$t = 2x + 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10);$$

door de som van (1) en (10) af te trekken van (4),

$$s = 4x + 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11);$$

door (10) van (7) af te trekken,

$$w = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x + 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12);$$

door (6) van (8) af te trekken,

$$q = 6x + 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13);$$

en eindelijk, door de bovenstaande waarden van p, q, r, s, t, u, v en w in (9) te substitueren,

$$\left.\begin{array}{r} x^2 \\ +\ 4x + 6 \\ +\ \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{5}{2}x + 1 \\ +\ \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x + 2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 6x + 11 \\ +\ x^2 + 2x + 1 \\ +\ 2x + 3 \\ +\ \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1. \end{array}\right.$$

Deze vergelijking behoorlijk herleidende, komt er

$$3x^2 + x - 14 = 0,$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -2\tfrac{1}{3};$$

alleen de eerste waarde bruikbaar zijnde, zoo vinden wij, door $x = 2$ in de vergelijkingen (1), (13), (2), (11), (10), (5), (6) en (12) te substitueren,

$$p=4,\ q=23,\ r=9,\ s=14,\ t=7,\ u=5,\ v=12,\ w=15,$$

met deze getallen stemmen overeen de letters

D W I N G E L O,

die alzoo de gevraagde geboorteplaats doen kennen.

CXI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert eene contra-harmonische evenredigheid in geheele getallen te vinden, waarvan de eerste en de laatste term beide driehoekige getallen zijn, welker wortels 3 verschillen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. S. Speijer, F. C. Radijs, G. Koster, D. W. Hinse *en* J. A. Hansen.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de wortels der beide driehoekige getallen door x en $x + 3$ worden voorgesteld, dan zijn die driehoekige getallen zelve

$$\frac{x^2+x}{2} \quad \text{en} \quad \frac{x^2+7x+12}{2};$$

daar nu deze getallen de uiterste termen der contra-harmo-

nische evenredigheid moeten zijn, en de middelste term van zulk eene evenredigheid altijd gevonden wordt, als men de som van de uiterste termen in de som hunner vierkanten deelt, zoo hebben wij, dien middelsten term door M voorstellende,

$$M = \frac{\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2+7x+12}{2}\right)^2}{\frac{x^2+x}{2} + \frac{x^2+7x+12}{2}}$$

of na herleiding

$$M = \frac{x^4+8x^3+37x^2+84x+72}{2x^2+8x+12} \quad \ldots\ldots (A).$$

Door nu den noemer in den teller werkelijk te deelen, vinden wij ook nog

$$M = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6 + \frac{3x^2+12x}{2x^2+8x+12}$$

en $$M = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 7\tfrac{1}{2} - \frac{18}{2x^2+8x+12},$$

waaruit volgt

$M > \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ en $M < \frac{1}{2}x^2 + 2x + 7\frac{1}{2}$,

zoodat wij moeten hebben

$$M = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + a,$$

waarin $a > 6$ en $a < 7\frac{1}{2}$ is.

Is nu x oneven, dan moet, opdat M een geheel getal zij, a den vorm $p + \frac{1}{2}$ hebben en dan kan tusschen de aangewezene grenzen alleen $a = 6\frac{1}{2}$ zijn. Is echter x even, dan kan M geen geheel getal zijn, zonder dat ook a een geheel getal en dus tusschen de genoemde grenzen $a = 7$ zij. Bij gevolg moeten wij hebben:

$M = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6\frac{1}{2}$ of $M = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 7$.

Voor de eerste waarde van M gaat de vergelijking (A) over in

$$\frac{x^4+8x^3+37x^2+84x+72}{2x^2+8x+12} = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6\tfrac{1}{2}$$

of na herleiding in

$$x^2 + 4x - 3 = 0,$$

maar hieruit geene meetbare waarden voor x voortvloeijende, is deze vergelijking, en dus ook de eerste waarde van M, onbruikbaar.

Voor de tweede waarde van M, volgt uit (A)

$$\frac{x^4+8x^3+37x^2+84x+72}{2x^2+8x+12} = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 7;$$

deze vergelijking wordt herleid tot

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

en uit dezelve wordt gevonden $x = 2$ of $x = -6$; naar gelang men nu voor x de eerste of tweede dezer waarden gebruikt, vindt men voor de gevraagde reeks

3, 13 en 15 of 15, 13 en 3.

CXII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer om eenen cirkel een gelijkbeenige driehoek beschreven is, waarvan de hoogte tweemaal zoo groot is als de middellijn des cirkels, begeert men de zijden van zulk eenen driehoek, in de kleinst mogelijke geheele getallen uit te drukken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, D. W. HINSE, G. KOSTER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER *en* J. A. HANSEN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat ABC (Fig. 41) de driehoek zijn, beschreven om den cirkel, die M tot middelpunt heeft; trekken wij dan naar de raakpunten D en E, de stralen MD en ME, dan staan deze stralen regthoekig op de zijden AB en AC en het verlengde van ME gaat tevens door den top B des driehoeks, zoodat BE de hoogte van den driehoek is.

Zij nu $ME = MD = r$, dan is volgens de opgave $BE = 4r$, dus $BM = 3r$ en $BD = \sqrt{(BM^2 - MD^2)} = 2r\sqrt{2}$; daar voorts de driehoeken ABE en MBD, als regthoekige driehoeken, die eenen scherpen hoek gemeen hebben, gelijkvormig zijn, hebben wij de evenredigheden:

$BD : MB = BE : AB$ en $BD : MD = BE : AE$

of $2r\sqrt{2} : 3r = 4r : AB$ en $2r\sqrt{2} : r = 4r : AE$,

waaruit volgt

$$AB = 3r\sqrt{2} \text{ en } AE = r\sqrt{2};$$

omdat nu de zijden AB en BC onderling gelijk zijn en de zijde AC het dubbel van AE is, hebben wij voor de zijden des driehoeks

$$AB = 3r\sqrt{2},\ BC = 3r\sqrt{2} \text{ en } AC = 2r\sqrt{2};$$

om voor deze zijden de kleinst mogelijke geheele getallen te bekomen, moet dus klaarblijkelijk $r = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ genomen wor-

den, waardoor wij vinden

$$AB = 3,\ BC = 3 \text{ en } AC = 2.$$

CXIII. Voorstel.

Door P. Krom.

Twee getallen te vinden, waarvan het product 48 *is; terwijl hunne som vermeerdert met de som hunner vierkanten* 114 *oplevert?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. A. Hansen, G. Koster, J. S. Speijer, P. Krom, F. C. Radijs, C. van Schaick *en* L. van de Kasteele.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Stel de gevraagde getallen door x en y voor, dan is, volgens de opgave,

$$xy = 48 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

en

$$x^2 + y^2 + x + y = 114 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Zoo men het dubbel van (2) bij (1) optelt, komt er

$$(x+y)^2 + (x+y) = 210,$$

waardoor men vindt

$$x+y = 14 \text{ of } x+y = -15 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wanneer men voorts het vierkant van (3) met het viervoud van (1) vermindert, en uit de rest den vierkantswortel trekt, wordt

$$x-y = \pm 2 \text{ of } x-y = \pm \sqrt{33} \quad . \quad . \quad (4).$$

Indien men eindelijk de halve som van (3) en (4) neemt, komt er

$$x = 8 \text{ en } y = 6,$$

$$x = -7\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{33} \text{ en } y = -7\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{33},$$

of omgekeerd.

CXIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Een zeker getal van twee cijfers bestaat uit het product van twee factoren, welker som gelijk is aan $1\frac{1}{2}$ *maal de som der cijfers; een dezer factoren is gelijk aan het cijfer der eenheden, en het omgekeerde van het getal wordt gevonden, door hetzelve met tweemaal het vierkant van het cijfer der tientallen te vermeerderen. Welk is dat getal?*

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Speijer, J. A. Hansen, D. W. Hinse, L. van de Kasteele, G. Koster, F. C. Radijs *en* C. van Schaick.

I. OPLOSSING *van* S. DIK, CORNSZ.

Stel het cijfer der tientallen door x en dat der eenheden door y voor, dan kan men ook y voor één' der factoren nemen en den anderen factor door z voorstellen. Men heeft nu, volgens de opgave, de vergelijkingen:

$$10x + y = yz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$\tfrac{3}{2}(x + y) = y + z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en
$$10x + y + 2x^2 = 10y + x \quad \ldots \quad (3).$$

Uit (1) en (2) vindt men respectievelijk:

$$z = \frac{10x+y}{y} \text{ en } z = \frac{3x+y}{2} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

dus is
$$\frac{10x+y}{y} = \frac{3x+y}{2}$$

en hieruit vindt men

$$x = \frac{y^2-2y}{20-3y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Deze waarde voor x in (3) overbrengende, komt er na herleiding

$$y^3 - 58y^2 + 661y - 1980 = 0,$$

van welke vergelijking de wortels zijn

$$y = 5, \quad y = 9 \quad \text{en} \quad y = 44.$$

Alleen de eerste waarde van y is hier bruikbaar; want $y = 9$ nemende, zou volgens (5) $x = -9$ worden, en dit, zoowel als $y = 44$, strijdt met de noodzakelijke voorwaarde, dat x en y geheele positieve getallen kleiner dan 10 moeten wezen. Men heeft derhalve $y = 5$, alzoo is volgens (5) $x = 3$, en dus is het gevraagde getal 35.

Voor de factoren, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, heeft men verder $y = 5$ en $z = \dfrac{10x+y}{y} = 7$.

II. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Alles als in de voorgaande oplossing stellende, kunnen wij voor de vergelijking (3) schrijven

$$2x^2 = 9(y - x).$$

Omdat x en y geheele getallen moeten zijn, blijkt hieruit, dat x van den vorm $3n$ moet wezen, n weder een geheel getal zijnde; stellen wij dus $x = 3n$, dan gaat de vorige vergelijking over in

$$18n^2 = 9(y - 3n),$$

waaruit volgt $y = 2n^2 + 3n$.

Omdat y ook kleiner dan 10 moet zijn, zal men voor n niet anders dan 1 kunnen nemen; alsdan wordt

$$x = 3n = 3 \text{ en } y = 2n^2 + 3n = 5;$$

het gevraagde getal is dus 35.

Het blijkt hieruit, dat, indien men gebruik maakt van de voorwaarde, dat x en y enkele cijfers en dus geheele positieve getallen kleiner dan 10 moeten wezen, de beide eerste voorwaarden kunnen ontbeerd worden.

CXV. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

De integraal van $x\delta x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ *te vinden?*

Opgelost door L. J. Ulman, L. van de Kasteele, J. Bassan, F. C. Radijs, J. S. Speijer en D. W. Hinse.

Oplossing van L. J. Ulman.

Schrijven wij de voorgestelde uitdrukking onder den vorm $x\delta x \frac{x+a}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ en noemen wij de te vindene integraal z, dan hebben wij te integreren

$$\delta z = x\delta x \frac{x+a}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{x^2\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} + \frac{ax\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

en dus is

$$z = \int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} + a\int\frac{x\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Volgens eene algemeene herleidingsformule (Zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* §. 201, formule III) is

$$\int\frac{x^m\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{(x^2-a^2)}}{m} - \frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

derhalve $\int\frac{x^2\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{1}{2}a^2\int\frac{\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$;

nu is $\int\frac{\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = Nep.\ Log.\ \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$

en $\int\frac{x\delta x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \sqrt{(x^2-a^2)}$,

wij hebben dus, door substitutie dezer laatste waarden,

$$z = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2 Nep.Log.\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + a\sqrt{(x^2-a^2)} + C$$

of $z = \frac{1}{2}(x+2a)\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{1}{2}a^2 Nep.Log. \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a} + C,$

hetwelk de begeerde integraal is.

Schrijven wij dezelve onder den vorm

$$z = \frac{1}{2}(x+2a)\sqrt{(x^2-a^2)} - a^2 Nep.Log. \left\{\sqrt{\frac{x+a}{2a}} + \sqrt{\frac{x-a}{2a}}\right\} + C,$$

dan verkrijgen wij dezelfde uitdrukking, welke in gemeld werk §. 269 wordt opgegeven als den gevonden' inhoud der kromme lijn, waarvan de vergelijking is $y = x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

CXVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal van $\frac{\partial x\sqrt{(x^2-4)}}{x^2-3}$ *te vinden?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. S. Speijer, D. W. Hinse *en* J. Bassan.

I. Oplossing *van* L. J. Ulman.

Ten einde dit voorstel op eene algemeene wijze op te lossen, stellen wij $4 = a^2$ en $3 = b^2$, dan hebben wij, de te vindene integraal y noemende, te integreren

$$\partial y = \frac{\partial x\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^2-b^2} = \frac{(x^2-a^2)}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}\partial x$$

$$= \frac{(x^2-b^2)-(a^2-b^2)}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}\partial x = \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} - \frac{(a^2-b^2)\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

dewijl nu $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = Nep.\ Log.\ (x+\sqrt{(x^2-a^2)})$ is, zoo hebben wij dadelijk

$$y = Nep.Log.(x+\sqrt{(x^2-a^2)}) - (a^2-b^2)\int\frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

zoodat wij ons nu alleen met het vinden van den laatsten term hebben bezig te houden.

Stellen wij in dezelve $\sqrt{(x^2-a^2)} = (x-a)z$, dat is $\frac{x+a}{x-a} = z^2$, dan is

$$x = \frac{a(z^2+1)}{z^2-1} \text{ en } \partial x = \frac{-4az\partial z}{(z^2-1)^2},$$

door substitutie waarvan wij, na herleiding, verkrijgen:

$$\frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{-2(z^2-1)\partial z}{(a^2-b^2)z^4+2(a^2+b^2)z^2+(a^2-b^2)};$$

vermenigvuldigen wij deze uitdrukking met $-(a^2-b^2)$, dan komt er

$$-\frac{(a^2-b^2)\delta x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}=\frac{2(z^2-1)\delta z}{z^4+2\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)z^2+1},$$

in welk laatste gebroken, de factoren van den noemer klaarblijkelijk $z^2+\frac{a+b}{a-b}$ en $z^2+\frac{a-b}{a+b}$ zijn, zoodat men dit gebroken, door het gebruik der onbepaalde coëfficienten, in twee andere verdeelende, gemakkelijk vindt

$$-\frac{(a^2-b^2)\delta x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}=\frac{1+\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a+b}{a-b}}\delta z+\frac{1-\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a-b}{a+b}}\delta z,$$

waaruit volgt

$$-(a^2-b^2)\int\frac{\delta x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}}=\int\frac{1+\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a+b}{a-b}}\delta z+\int\frac{1-\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a-b}{a+b}}\delta z,$$

weshalve het vinden van den laatsten term, die in de bovenstaande waarde van y voorkomt, tot het vinden der beide laatste integralen is terug gebragt.

Daar de noemers, die er in voorkomen, beide onbestaanbare of beide bestaanbare factoren hebben, naar gelang $a > b$ of $a < b$ is, komen er bij de integratie twee verschillende gevallen te onderscheiden.

Eerste Geval. Is $a > b$, dan is, volgens de formule

$$\int\frac{\delta u}{u^2+r^2}=\frac{1}{r}\text{ Boog Tang. }\frac{u}{r},$$

$$\int\frac{1+\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a+b}{a-b}}\delta z=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)\text{ Boog Tang. }z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Tang. }z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

en $$\int\frac{1-\frac{a}{b}}{z^2+\frac{a-b}{a+b}}\delta z=\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\text{ Boog Tang. }z\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$=-\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Tang. }z\sqrt{\frac{a+b}{a-b}};$$

door de som dezer integralen te nemen, en daarbij gebruik te maken van de algemeen bekende formule

$$\text{Boog Tang. } p - \text{Boog Tang. } q = \text{Boog Tang. } \frac{p-q}{1+pq},$$ vinden wij

$$-(a^2-b^2)\int\frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}} = -\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Tang. }\frac{2bz}{(1+z^2)\sqrt{(a^2-b^2)}}$$

of daar $z = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ is, door substitutie dezer waarde,

$$-(a^2-b^2)\int\frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}} = -\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Tang. }\frac{b}{x}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2-b^2}};$$

derhalve is in dit geval

$$y = \text{Nep. Log. }(x+\sqrt{(x^2-a^2)}) - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Tang. }\frac{b}{x}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2-b^2}} + C \;\ldots\; (I);$$

en voor a en b de opgegevene getallen stellende, komt er

$$y = \int\frac{\partial x\sqrt{(x^2-4)}}{x^2-3} = \text{Nep. Log. }(x+\sqrt{(x^2-4)}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ Boog Tang. }\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x} + C.$$

Dewijl in het algemeen $\text{Boog Tang. } p = \text{Boog Sin. } \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$ is, kunnen wij in plaats van (I) ook schrijven

$$y = \text{Nep. Log. }(x+\sqrt{(x^2-a^2)}) - \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\text{ Boog Sin. }\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}} + C.$$

Tweede Geval. Is $b > a$, dan is volgens de algemeene formule

$$\int \frac{\partial u}{u^2 - r^2} = \frac{1}{2r}\ Nep.\ Log. \frac{u-r}{u+r};$$

$$\int \frac{1+\frac{a}{b}}{z^2 - \frac{b+a}{b-a}}\partial z = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\ }\right)\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right) Nep.\ Log. \frac{z-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{z+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2b}\ Nep.\ Log. \frac{z-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{z+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}$$

en

$$\int \frac{1-\frac{a}{b}}{z^2 - \frac{b-a}{b+a}}\partial z = \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right) Nep.\ Log. \frac{z-\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}{z+\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2b}\ Nep.\ Log. \frac{z-\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}{z+\sqrt{\frac{b-a}{b-a}}};$$

door de som dezer twee integralen te nemen, en daarbij gebruik te maken van de algemeen bekende formule *Log.* p + *Log.* q = *Log.* pq, vinden wij

$$-(a^2-b^2)\int \frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2b}\ Nep.\ Log. \frac{z^2 - \frac{2bz}{\sqrt{(b^2-a^2)}} + 1}{z^2 + \frac{2bz}{\sqrt{(b^2-a^2)}} + 1},$$

of, daar $z = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ is, door substitutie dezer waarde,

$$-(a^2-b^2)\int \frac{\partial x}{(x^2-b^2)\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2b}\ Nep.\ Log. \frac{x-b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{x+b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}};$$

derhalve is in dit tweede geval

$$y = Nep.\ Log.\ (x+\sqrt{(x^2-a^2)}) + \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2b}\ Nep.\ Log.\ \frac{x-b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{x+b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}} + C \ldots\ldots (II),$$

welke formule van (I) slechts in vorm verschilt, kunnende de eene uit de andere afgeleid worden, door behulp der bekende vergelijking

$$Boog\ Tang.\ p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\ Nep.\ Log.\ \frac{1+p\sqrt{-1}}{1-p\sqrt{-1}}.$$

Voor de opgegevene getallen, zou de formule (II) de begeerde integraal, in den onbestaanbaren vorm

$$y = \int \frac{\partial x\sqrt{(x^2-4)}}{x^2-3}\ Nep.\ Log.\ (x+\sqrt{(x^2-4)}) + (\tfrac{1}{6}\sqrt{-3})\ Nep.\ Log.\ \frac{x+\sqrt{-3(x^2-4)}}{x-\sqrt{-3(x^2-4)}} + C$$

geven (*).

(*) Bij de substitutie der getallen, in de formule (II), dient men op te letten, dat voor $\sqrt{\frac{3(x^2-4)}{-1}}$ moet geschreven worden $-\sqrt{-3(x^2-4)}$; want indien de onbestaanbaarheid dezer vormen later door eene vermenigvuldiging met $\sqrt{-1}$ werd verdreven, zou men verkrijgen

$$\sqrt{\frac{3(x^2-4)}{-1}} \times \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{\sqrt{-1}} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3(x^2-4)}$$

en, omdat in het algemeen $\sqrt{-p} \times \sqrt{-q} = -\sqrt{pq}$ en dus $-\sqrt{-p} \times \sqrt{-q} = \sqrt{pq}$ is, ook

$$-\sqrt{-3(x^2-4)} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3(x^2-4)}.$$

II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Tot het integreren der opgegevene uitdrukking

$$\partial y = \frac{\partial x \sqrt{(x^2-4)}}{x^2-3},$$

stellen wij $\sqrt{(x^2-4)} = xz$, dan is $x^2 - 4 = x^2z^2$, dus $x^2 = \frac{4}{1-z^2}$ en $x^2 - 3 = \frac{4}{1-z^2} - 3 = \frac{1+3z^2}{1-z^2}$, zoodat onze vergelijking overgaat in

$$\partial y = \frac{(1-z^2)zx\partial x}{1+3z^2};$$

differentiëren wij nu $x^2 = \frac{4}{1-z^2}$, dan komt er $x\partial x = \frac{4z\partial z}{(1-z^2)^2}$, waardoor wij dan verder verkrijgen

$$\partial y = \frac{4z^2\partial z}{(1+3z^2)(1-z^2)}.$$

Verdeelen wij vervolgens, op de gewone wijze, het gebroken $\frac{4z^2}{(1+3z^2)(1-z^2)}$ in twee gedeeltelijke breuken, dan vinden wij

$$\frac{4z^2}{(1+3z^2)(1-z^2)} = \frac{1}{1-z^2} - \frac{1}{1+3z^2},$$

hierdoor wordt

$$\partial y = \frac{\partial z}{1-z^2} - \frac{\partial z}{1+3z^2}$$

en dus

$$y = \int\frac{\partial z}{1-z^2} - \int\frac{\partial z}{1+3z^2}.$$

De beide laatste integralen algemeen bekend zijnde, vinden wij terstond

$$y = \textit{Nep. Log.} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \textit{Boog Tang.}\ z\sqrt{3} + C.$$

Nu volgt uit de gestelde vergelijking $\sqrt{(x^2-4)} = xz$,

De beide leden der vergelijking $\sqrt{\frac{3(x^2-4)}{-1}} = -\sqrt{-3(x^2-4)}$, met $\sqrt{-1}$ vermenigvuldigd wordende, verkrijgt men alzoo identieke producten; en dit zou het geval niet zijn, indien men de leden der vergelijking $\sqrt{\frac{3(x^2-4)}{-1}} = +\sqrt{-3(x^2-4)}$, met $\sqrt{-1}$ vermenigvuldigde.

dat $z = \frac{\sqrt{(x^2-4)}}{x}$ is; wij substitueren dus deze waarde, in de gevondene waarde van y, en verkrijgen daardoor, na herleiding,

$$y = Nep.Log.\frac{x+\sqrt{(x^2-4)}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} BoogTang.\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x} + C'$$

of, zoo wij $C' = C + Nep.\ Log.\ 2$ stellen,

$$y = Nep.Log.(x+\sqrt{(x^2-4)}) - \frac{1}{\sqrt{3}} BoogTang.\frac{\sqrt{3(x^2-4)}}{x} + C,$$

even als in de vorige oplossing.

CXVII. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal van $\partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)}$ te vinden?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Bassan, D. W. Hinse *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Dewijl $\partial.Tang.\phi = \frac{\partial\phi}{Cos.^2\phi} = \partial\phi Sec.^2\phi$ is, is ook $\partial\phi = \frac{\partial.Tang.\phi}{Sec.^2\phi}$ en wij hebben dus vooreerst

$$\int\partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)} = \int\frac{(\partial.Tang.\phi)\sqrt{(Tang\ \phi-1)}}{Sec.^2\phi}.$$

Stellen wij nu $\sqrt{(Tang.\phi-1)} = z$, dan is $Tang.\phi = z^2+1$, $\partial Tang.\phi = 2z\partial z$, $Sec.^2\phi = Tang.^2\phi + 1 = z^4 + 2z^2 + 2$ en derhalve

$$\int\partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)} = \int\frac{2z^2\partial z}{z^4+2z^2+2}.$$

De tweedemagtsfactoren van den noemer zijn klaarblijkelijk $z^2+1+\sqrt{-1}$ en $z^2+1-\sqrt{-1}$, doch deze onbestaanbaar zijnde, ontbinden wij dezelve in eerstemagtsfactoren, als wanneer wij bekomen

$$x^4+2x^2+2=\{x+\sqrt{(-1-\sqrt{-1})}\}\{x-\sqrt{(-1-\sqrt{-1})}\}\{x+\sqrt{(-1+\sqrt{-1})}\}\{x-\sqrt{(-1+\sqrt{-1})}\};$$

noemen wij deze factoren, in de volgorde, waarin zij hierboven voorkomen, x', x'', x''' en x'''', dan zijn derzelver producten $x'x''$ en $x'''x''''$, gelijk wij zoo even gezien hebben onbestaanbaar; ook de producten $x'x''''$ en $x''x'''$ zullen onbestaanbaar bevonden worden; doch vermenigvuldigen wij x' met x''' en x'' met x'''', dan bekomen wij *bestaanbare* tweedemagtsfactoren, zoodat wij hebben

$$x^4+2x^2+2=\{x^2+x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}\}\{x^2-x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}\}.$$

Splitsen wij nu, door de leerwijze der onbepaalde coëfficienten, het gebroken $\frac{2x^2}{x^4+2x^2+2}$ in twee gebrokens van eenvoudiger vorm, dan bekomen wij

$$\int\frac{2x^2\partial x}{x^4+2x^2+2}=\int\frac{x\partial x\times\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}}{x^2-x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}-\int\frac{x\partial x\times\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}}{x^2+x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}.$$

Integreren wij verder ieder dezer laatste termen, volgens de gewone formule, dan komt er

$$\int\frac{2x^2\partial x}{x^4+2x^2+2}=$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}.\ Log.\ \sqrt{\frac{x^2-x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog\ Tang.\ \frac{x\sqrt{(2\sqrt{2}+\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}-x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}\ Log.\ \sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog\ Tang.\ \frac{x\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}}{2\sqrt{2}+x\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}};$$

vereenigen wij nu de beide logarithmen en de beide bogen, dan wordt

$$\int \frac{2z^2 \partial z}{z^4+2z^2+2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}.\ Log.\ \sqrt{\frac{z^2-z\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}{z^2+z\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}}$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog\ Tang.\ \frac{z\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}}{\sqrt{2}-z^2} + C;$$

vereenvoudigen wij voorts den logarithmischen term, door teller en noemer van het gebroken met $z^2-z\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}$ te vermenigvuldigen, en drukken wij den boog door zijnen Cosinus in plaats van door zijnen Tangens uit, dan verkrijgen wij

$$\int \frac{2z^2 \partial z}{z^4+2z^2+2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}.\ Log.\ \frac{z^2-z\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}+\sqrt{2}}{\sqrt{(z^4+2z^2+2)}}$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog\ Cos.\ \frac{\sqrt{2}-z^2}{\sqrt{(z^4+2z^2+2)}} + C;$$

stellen wij hierin eindelijk voor z deszelfs waarde $\sqrt{(Tang.\phi-1)}$, dan komt er

$$\int \partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}.Log.\frac{Tang.\phi-1+\sqrt{2}-\sqrt{\{(2\sqrt{2}-2)(Tang.\phi-1)\}}}{Sec.\phi}$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog.\ Cos.\ \frac{1+\sqrt{2}-Tang.\phi}{Sec.\phi} + C,$$

en deze integraal, die nu de begeerde is, blijft altijd bestaanbaar, zoo lang slechts $\sqrt{(Tang.\phi-1)}$ bestaanbaar is.

Zoo wij de deeling door $Sec.\phi$ werkelijk verrigten, dan gaat dezelve over in

$$\int \partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}+2)}.Log.\{Sin.\phi-(1-\sqrt{2})Cos.\phi-\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}Cos.\phi(Sin.\phi-Cos.\phi$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}.\ Boog\ Cos.\ \{(1+\sqrt{2})Cos.\phi-Sin.\phi\} + C,$$

en deze uitdrukking is nog voor verdere herleiding vatbaar. Nemen wij, bij voorbeeld, in aanmerking, dat $1+\sqrt{2} = Tang.\ 67^\circ\ 30'$ en $-1+\sqrt{2} = Tang.\ 22^\circ\ 30'$ is, alsmede dat men heeft $2\sqrt{2}-2 = \frac{4}{2\sqrt{2}+2}$, dan vinden wij,

$\phi + 22° 30' = \psi$ en $\sqrt{(2\sqrt{2}+2)} = a$ stellende,

$$\int \delta\phi \sqrt{(Tang.\phi - 1)} = \tfrac{1}{2} a Log.\left\{Sin.\psi - \sqrt{\left(Cos.^2\psi - \frac{\sqrt{2}}{4a^2}\right)}\right\}$$

$$+ \frac{1}{a}\ Boog\ Cos.\ (a\sqrt{2}.\ Cos.\psi) + C.$$

CXVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Welke waarden van ϕ maken de functie

$$y = Nep.\ Log.\ \left(Tang.\phi^{Cot.\phi}\right)$$

tot een maximum of minimum?

Opgelost *door* J. S. Speijer, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

De gegevene functie kan ook aldus geschreven worden:

$$y = Cot.\phi \times Nep.\ Log.\ Tang.\phi;$$

differentiëren wij dezelve nu twee achtereenvolgende malen, dan komt er

$$\frac{\delta y}{\delta \phi} = \frac{1 - Nep.Log.Tang.\phi}{Sin.^2\phi}$$

en $$\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2} = -\frac{Tang.\phi + 2 Sin.\phi Cos.\phi (1 - Nep.Log.Tang.\phi)}{Sin.^4\phi}.$$

Stellen wij vooreerst $\frac{\delta y}{\delta \phi} = 0$, dan volgt daaruit

$Nep.\ Log.\ Tang.\phi = 1$ en dus $Tang.\phi = e = 2{,}7182818$, waarmede volgens de tafels overeenstemt

$$\phi = 69°\ 48'\ 9''\ \text{nagenoeg.}$$

Voor deze waarde van ϕ vinden wij dat

$$\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2} = -\frac{e}{Sin.^4\phi}$$

wordt; deze waarde van $\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2}$ is klaarblijkelijk negatief en dus maakt de gevondene waarde voor ϕ de functie y tot een maximum. De waarde van dit maximum is

$$y = \frac{1}{e}.$$

Stellen wij ten tweede $\frac{\delta y}{\delta \phi} = \infty$, dan volgt daaruit $\phi = 0$; om te onderzoeken of deze waarde van ϕ voor y een maximum of minimum geeft, hebben wij de waarden te raadplegen, die, wanneer δ een zeer klein boogje voorstelt, y verkrijgt voor $\phi = + \delta$, $\phi = 0$ en $\phi = - \delta$. Nu is:

voor $\phi = + \delta$, y zeer groot negatief,
voor $\phi = 0$, $y = - \infty$,
voor $\phi = - \delta$, y onbestaanbaar;

hieruit blijkt, dat $\phi = 0$, y noch tot een maximum, noch tot een minimum maakt, maar dat als ϕ, tot $\phi = 0$ is afgenomen, y hare grootst mogelijke negatieve waarde bereikt heeft, zonder dat met eene verdere afneming van ϕ, bestaanbare waarden voor y kunnen gepaard gaan.

CXIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Eenen regthoekigen driehoek te berekenen en te construeren, als behalve deszelfs omtrek ook nog gegeven is de loodlijn, die uit den regten hoek op de hypothenusa valt?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. W. HINSE, J. A. HANSEN, G. KOSTER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zij ABC (Fig. 42) de bedoelde driehoek, regthoekig in B, en waarin uit B eene loodlijn BD op de schuine zijde is nedergelaten. Stellende nu voor de gegevens en voor de onbekenden

$AB+BC+AC=a$, $BD=b$, $AB=x$, $BC=y$ en $AC=z$,
dan hebben wij vooreerst

$$x + y + z = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

terwijl wij, den inhoud des driehoeks op twee verschillende wijzen, namelijk door $\frac{1}{2}AB \times BC$ en $\frac{1}{2}AC \times BD$, uitdrukkende, ook nog vinden

$$xy = bz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Om, uit deze drie vergelijkingen, x, y en z op te lossen, hebben wij volgens (1)

$$(x + y)^2 = (a - z)^2$$

of

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 2az + z^2;$$

hiervan (2) aftrekkende, vinden wij

$$2xy = a^2 - 2ax;$$

en hierin voor xy de waarde volgens (3) stellende, komt er

$$2bx = a^2 - 2ax,$$

waaruit dadelijk volgt $x = \frac{a^2}{2(a+b)}$ . . . . (4).

Deze waarde van x in (1) en (3) overbrengende, verkrijgen wij na herleiding

$$x + y = \frac{a^2+2ab}{2(a+b)} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

en $xy = \frac{a^2 b}{2(a+b)}$ . . . . (6);

hierdoor de som en het product der onbekenden x en y bekend zijnde, vinden wij voor die onbekenden zelve

$$x = \frac{a^2+2ab \pm a\sqrt{(a^2-4ab-4b^2)}}{4(a+b)} \quad \ldots\ (7)$$

en $y = \frac{a^2+2ab \mp a\sqrt{(a^2-4ab-4b^2)}}{4(a+b)}$ . . . (8),

waardoor de berekening der zijden is afgeloopen.

Het is klaar, dat de driehoek onbestaanbaar zal zijn, zoodra men heeft

$$a^2 < 4ab + 4b^2;$$

neemt men nu in aanmerking, dat altijd uit den aard der zaak $a > 2b$ en dus $a - 2b$ positief moet zijn, dan kan men de laatste ongelijkheid herleiden tot

$$a^2 - 4ab + 4b^2 < 8b^2,$$
$$(a - 2b)^2 < 8b,$$
$$a - 2b < 2b\sqrt{2},$$
$$a < 2b\sqrt{2} + 2b$$

en $b > \frac{a}{2\sqrt{2}+2}$,

waarvoor men, omdat $\frac{1}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ is, ook schrijven kan

$$b > \tfrac{1}{2}a(\sqrt{2}-1);$$

alzoo is $b = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$ eene limiet, waarboven b niet mag gegeven worden, om het voorstel mogelijk te maken. Was juist $b = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$ gegeven, dan zou de wortelgrootheid in (7) en (8) voorkomende verdwijnen, en de regthoekige driehoek zou dan tevens gelijkbeenig zijn.

Indien men tot de oplossing de trigonometrie gebruiken wil, dan stelle men *hoek* BAC $= \phi$, dan is:

$$AB = \frac{BD}{Sin.BAC} = \frac{b}{Sin.\phi},$$

$$BC = \frac{BD}{Sin.BCA} = \frac{b}{Cos.\phi}$$

en $$AC = \frac{BC}{Sin.BAC} = \frac{b}{Sin.\phi Cos.\phi};$$

door optelling dezer waarden vindt men

$$a = \frac{b}{Sin.\phi} + \frac{b}{Cos.\phi} + \frac{b}{Sin.\phi Cos.\phi}$$

of $$2aSin.\phi\ Cos.\phi = 2b(Sin.\phi + Cos.\phi) + 2b.$$

Daar nu in het algemeen $2Sin.\phi\ Cos.\phi = Sin.2\phi$ en $Sin.\phi + Cos.\phi = \sqrt{(1 + Sin.2\phi)}$ is, kunnen wij voor deze vergelijking ook schrijven

$$aSin.2\phi = 2b\sqrt{(1 + Sin.2\phi)} + 2b,$$

en daarna uit dezelve achtervolgens afleiden:

$$aSin.2\phi - 2b = 2b\sqrt{(1 + Sin.2\phi)},$$

$$a^2Sin.^22\phi - 4abSin.2\phi + 4b^2 = 4b^2 + 4b^2Sin.2\phi,$$

$$a^2Sin.^22\phi - 4abSin.2\phi = 4b^2Sin.2\phi,$$

$$a^2Sin.2\phi - 4ab = 4b^2$$

en eindelijk $$Sin.2\phi = \frac{4b(a+b)}{a^2}.$$

Hierdoor de waarde van ϕ gevonden zijnde, kan men de zijden, door de bovenstaande formulen

$$AB = \frac{b}{Sin.\phi},\ BC = \frac{b}{Cos.\phi}\ \text{en}\ AC = \frac{b}{Sin.\phi Cos.\phi},$$

berekenen. Voor AC kan men ook schrijven

$$AC = \frac{2b}{Sin.2\phi}$$

en, zoo men hierin voor $Sin.2\phi$ de gevondene waarde stelt, verkrijgt men even als vroeger

$$AC = \frac{a^2}{2(a+b)}.$$

Door op te merken, dat $Sin.2\phi$ niet grooter dan 1 zal mogen wezen, en dat dus

$$\frac{4b(a+b)}{a^2} > 1$$

zijnde, de driehoek onbestaanbaar wordt, geraakt men tot dezelfde voorwaarde, die boven gevonden is.

De waarde, die wij voor de schuinsche zijde vonden, geeft een gemakkelijk middel aan de hand, om den driehoek uit de gegevens te construeren. Maakt men namelijk (Fig. 42) CE $= \frac{1}{2}(a + b)$ en stelt men uit C op CE eene loodlijn CF $= \frac{1}{2}a$, trekt men vervolgens FE en uit F eene loodlijn op FE, die het verlengde van CE in A snijdt, dan zal AC de schuinsche zijde des driehoeks zijn; want uit deze constructie volgt de evenredigheid

$$AC : CF = CF : CE,$$

dat is $AC : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}(a+b)$,

waaruit gevonden wordt

$$AC = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{a^2}{2(a+b)},$$

hetgeen juist de waarde is, die de schuinsche zijde volgens de berekening hebben moet. Beschrijven wij dus verder op AC als middellijn een' halven cirkel, maken wij CG $= b$ en trekken wij uit G, evenwijdig met AC, eene lijn, die den cirkelomtrek in B en B' snijdt, dan zullen deze snijpunten de hoekpunten zijn van de regte hoeken der driehoeken ABC en AB'C, die beide aan het voorstel voldoen.

CXX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Van twee krachten P *en* Q, *die tot eene enkele kracht* R *kunnen zamengesteld worden, is* P *in rigting en hoegrootheid gegeven; van* Q *is alleen bekend, dat hare rigting door een gegeven punt gaat, maar men kent ook nog een punt van de rigting der zamengestelde kracht* R. *De vraag is nu, om de rigting der kracht* Q *zoodanig te bepalen, dat die kracht zoo klein mogelijk zij?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

De krachten P en Q tot eene enkele kunnende zamengesteld worden, zoo volgt daaruit vooreerst, dat derzelver rigtingen in een zelfde vlak moeten gelegen zijn. Laat nu AB (Fig. 43) de rigting der kracht P, C het gegevene punt van de rigting van Q en G het bekende punt van de rigting der resultant R zijn; nemen wij dan voor de kracht Q eene willekeurige rigting CD aan, zetten wij, uit het snijpunt E van CD en AB, op AB eene lijn Ep af, die de gegeve-

P 5

ne hoegrootheid der kracht P voorstelt, trekken wij door G en E eene onbepaalde regte lijn, daarna uit p eene lijn pr, die evenwijdig met CD loopt, en eindelijk uit het snijpunt r van pr en EG, evenwijdig met AB, eene lijn rq, CD in q snijdende, dan stelt Eq de grootte van eene kracht Q voor, door C gaande en met P zamengesteld eene resultant opleverende, die door G gaat. Om aan het voorstel te voldoen, komt het er dus op aan de rigting CD zoodanig aan te nemen, dat de lijn Eq, door de bovenstaande constructie verkregen, zoo klein mogelijk worde.

Het is eene bekende eigenschap van de zamenstelling van twee krachten, dat, zoo men, uit een willekeurig punt van de resultant, loodlijnen op de rigtingen der krachten laat vallen, deze loodlijnen omgekeerd evenredig met de krachten zijn. Laat men dus uit G de loodlijnen GM en GN op AB en CD vallen, dan is

$$GM \times Ep = GN \times Eq.$$

Nu is Ep, als de hoegrootheid der kracht P voorstellende, standvastig gegeven; ook GM is standvastig, omdat de stelling van de lijn AB en de plaats van het punt G gegeven is; de beide leden der bovenstaande vergelijking hebben alzoo eene standvastige waarde en opdat Eq zoo klein mogelijk zij, zal het dus noodig zijn GN zoo groot mogelijk te maken; dat wil zeggen, de rigting CD zal zoodanig genomen moeten worden, dat de loodlijn uit G op CD vallende zoo groot mogelijk zij. Daar nu, als men CD om het punt C laat draaijen, deze loodlijn nooit grooter kan worden, dan de afstand van G tot C, nemen wij GC voor die loodlijn, dan zal CD′ door C regthoekig op GC getrokken, de rigting zijn, die men aan de kracht Q moet geven, om aan het voorstel te beantwoorden.

Herhaalt men dus voor de lijn CD′ dezelfde constructie, die boven voor de lijn CD is verrigt, zijnde deze laatste constructie in de figuur door overeenkomstige letters met accenten aangewezen, dan zal de lijn E′q′, daardoor verkregen, de kleinste zijn onder alle lijnen, die, voor andere rigtingen van CD, op dezelfde wijze geconstrueerd worden.

Dat de rigting der kracht Q loodregt op GC moet zijn, om aan het voorstel te beantwoorden, kan ook stelkunstig

blijken. Laat namelijk de hoek GCD als eene veranderlijke grootheid worden aangenomen, en verlengen wij CG, totdat zij AB in F snijdt, dan zijn CG, GF en de hoek EFG standvastig en door de voorwaarden des voorstels volkomen bepaald. Stellen wij dus CG $= a$, GF $= b$, *hoek* EFG $= \alpha$ en *hoek* GCD $= \phi$, dan volgt uit de driehoeken GCE en GFE

$$Sin.\,FEG = \frac{FG \times Sin.EFG}{EG} = \frac{bSin.\alpha}{EG}$$

en

$$Sin.\,CEG = \frac{CG \times Sin.ECG}{EG} = \frac{aSin.\phi}{EG};$$

nu is volgens de eigenschappen van het parallelogram der krachten

$$P : Q = Ep : Eq = Sin.\,qEr : Sin.\,pEr$$

en dus ook $\quad P : Q = Sin.\,CEG : Sin.\,FEG;$

stellen wij hierin voor de beide laatste termen de bovenstaande waarden, dan komt er:

$$P : Q = aSin.\phi : bSin.\alpha,$$

welke evenredigheid, omdat GN $= aSin.\phi$ en GM $= bSin.\alpha$ is, de reeds aangevoerde eigenschap in zich sluit.

Uit deze evenredigheid volgt onmiddellijk

$$Q = \frac{PbSin.\alpha}{aSin.\phi},$$

en uit deze formule voor Q ziet men dadelijk, dat Q de kleinst mogelijke waarde zal hebben, indien $Sin.\phi$ zoo groot mogelijk en dus $Sin\phi = 1$ of $\phi = 90°$ is.

CXXI. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

De differentiaal-uitdrukking $\dfrac{x^2 \partial x}{ab^2 + \sqrt{(a^2 b^2 - 4bx^2)}}$ *te integreren?*

Opgelost door L. J. Ulman, L. van de Kasteele, J. S. Speijer en J. Bassan.

Oplossing van L. J. Ulman.

De te vindene integraal door y voorstellende, hebben wij

$$y = \int \frac{x^2 \partial x}{ab^2 + \sqrt{(a^2 b^2 - 4bx^2)}},$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$y = \frac{1}{ab} \int \frac{x^2 \partial x}{b+\sqrt{\left(1-\frac{4}{a^2 b}x^2\right)}}.$$

Stellen wij nu $\frac{4}{a^2 b}\, x^2 = Sin.^2\phi$, dan is $x^2 = \frac{a^2 b Sin.^2\phi}{4}$, $x = \frac{1}{2}(a\sqrt{b})\; Sin\,\phi$, $\partial x = \frac{1}{2}(a\sqrt{b})\; Cos.\phi\partial\phi$ en wij hebben alzoo

$$y = \tfrac{1}{8}(a^2\sqrt{b})\int \frac{Sin.^2\phi\, Cos.\phi\partial\phi}{b+Cos\,\phi} = \tfrac{1}{8}(a^2\sqrt{b})\int \frac{Cos.\phi - Cos.^3\phi}{b+Cos.\phi}\partial\phi.$$

Door werkelijke deeling vinden wij

$$\frac{Cos.\phi - Cos^3\phi}{b+Cos.\phi} = -Cos.^2\phi + bCos.\phi + (1-b^2) - \frac{b-b^3}{b+Cos.\phi}.$$

en wij hebben hierdoor

$$y = \tfrac{1}{8}(a^2\sqrt{b})\left\{-\int Cos.^2\phi\partial\phi + b\int Cos.\phi\partial\phi + (1-b^2)\int\partial\phi - (b-b^3)\int\frac{\partial\phi}{b+Cos.\phi}\right\}$$

Nu is:

$$-\int Cos.^2\phi\partial\phi = -\tfrac{1}{2}Sin.\phi Cos.\phi - \tfrac{1}{2}\phi,$$
$$b\int Cos.\phi\partial\phi = bSin.\phi$$

en

$$(1-b^2)\int\partial\phi = \phi - b^2\phi,$$

door substitutie van welke waarden y overgaat in

$$y = \tfrac{1}{8}(a^2\sqrt{b})\left\{bSin.\phi - \tfrac{1}{2}Sin.\phi Cos.\phi + (\tfrac{1}{2}-b^2)\phi - (b-b^3)\int\frac{\partial\phi}{b+Cos.\phi}\right.$$

of

$$y = \frac{a^2 b\sqrt{b}}{8}\,Sin.\phi - \frac{a^2\sqrt{b}}{16}\,Sin.\phi\; Cos.\phi + \frac{a^2(1-2b^2)\sqrt{b}}{16}\phi$$
$$-\frac{a^2 b(1-b^2)\sqrt{b}}{8}\int\frac{\partial\phi}{b+Cos.\phi}.$$

Verder is (Zie I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* §. 254), naar gelang $b < 1$ of $b > 1$ is,

$$\int\frac{\partial\phi}{b+Cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{(1-b^2)}}\;Log.\;\frac{1+bCos.\phi+Sin.\phi\sqrt{(1-b^2)}}{b+Cos.\phi}$$

of $\int\frac{\partial\phi}{b+Cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-1)}}$ Boog $Cos.\;\frac{1+bCos\,\phi}{b+Cos.\phi}$;

in het eerste geval is dus

$$y = \frac{a^2 b\sqrt{b}}{8}\,Sin.\phi - \frac{a^2\sqrt{b}}{16}\,Sin.\phi\; Cos.\phi + \frac{a^2(1-2b^2)\sqrt{b}}{16}\,\phi$$
$$-\frac{a^2 b\sqrt{b}(1-b^2)}{8}\,Log.\,\frac{1+bCos.\phi+Sin.\phi\sqrt{(1-b^2)}}{b+Cos.\phi},$$

en in het tweede geval

$$y = \frac{a^2b\sqrt{b}}{8}\, Sin\,\phi - \frac{a^2\sqrt{b}}{16}. Sin.\phi\, Cos.\phi + \frac{a^2(1-2b^2)\sqrt{b}}{16}\phi$$
$$+ \frac{a^2b\sqrt{b(b^2-1)}}{8}\, Boog\ Cos.\, \frac{1+b\,Cos.\phi}{b+Cos.\phi}.$$

Substitueren wij nu hier weder, overeenkomstig de door ϕ voorgestelde waarde,

$$Sin.\phi = \frac{2x}{a\sqrt{b}},\ Cos.\phi = \frac{\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{ab}$$

$$\text{en } \phi = Boog\ Cos.\ \frac{\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{ab},$$

dan komt er, na behoorlijke herleiding,

$$y = \frac{abx}{4} - \frac{x\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{8b} + \frac{a^2(1-2b^2)\sqrt{b}}{16} Boog Cos. \frac{\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{ab}$$
$$- \frac{a^2b\sqrt{b(1-b^2)}}{8}\, Log.\, \frac{ab+b\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}+2x\sqrt{b(1-b^2)}}{ab^2+\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}$$

of

$$y = \frac{abx}{4} - \frac{x\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{8b} + \frac{a^2(1-2b^2)\sqrt{b}}{16} Boog Cos. \frac{\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{ab}$$
$$+ \frac{a^2b\sqrt{b(b^2-1)}}{8}\, Boog\ Cos.\, \frac{ab+b\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}}{ab^2+\sqrt{(a^2b^2-4bx^2)}},$$

naar gelang $b < 1$ of $b > 1$ mogt wezen.

CXXII. VOORSTEL.

Door D. van Lankeren Matthes.

De som te vinden van de oneindig voortloopende reeks

$$\frac{x^2}{1.2} - \frac{11x^4}{1.2.3.4} + \frac{29x^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{55x^8}{1...8} + \frac{89x^{10}}{1.....10} - enz.$$

in elk van welker termen de coëfficient des tellers 1 *minder is, dan het product van de twee laatste factoren des noemers?*

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, J. Bassan, D. W. Hinse, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Men schrijve de reeks in dezen vorm

$$\frac{(1.2-1)x^2}{1.2} - \frac{(3.4-1)x^4}{1.2.3.4} + \frac{(5.6-1)x^6}{1......6} - \frac{(7.8-1)x^8}{1...8} + enz.$$

en stelle de gevraagde som door S voor, dan is klaarblijkelijk, door elken term in twee andere te verdeelen,

$$S = x^2 - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1....6} - \frac{x^8}{1.....6} + enz.$$

$$\text{of } S = x^2 - \frac{x^2}{1.2}(1+x^2) + \frac{x^4}{1.2.3.4}(1+x^2) - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}(1+x^2) + enz.$$

Telt men nu bij de leden dezer vergelijking de eenheid op, en deelt men dezelve vervolgens door $1 + x^2$, dan komt er

$$\frac{1+S}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + enz.$$

Het tweede lid van deze laatste vergelijking de bekende ontwikkeling van *Cos.x* zijnde, is derhalve

$$\frac{1+S}{1+x^2} = Cos.x,$$

waaruit voor de begeerde som onmiddellijk gevonden wordt

$$S = (1+x^2)\ Cos.x - 1.$$

CXXIII. VOORSTEL.

Door D. VAN LANKEREN MATTHES.

De oneindig voortloopende reeks

$$\frac{1}{1.2} - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} - \frac{x^3}{4.5} + \frac{x^4}{5.6} - enz.$$

te sommeren?

OPGELOST *door* D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, D. W. HINSE, F. C. RADIJS *en* L. J. ULMAN.

I. OPLOSSING *van* D. VAN LANKEREN MATTHES.

Daar in het algemeen $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ is, kunnen wij elken term der opgegevene reeks in het verschil van twee andere verdeelen; zoo is, bij voorbeeld,

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},\ \frac{x}{2.3} = \frac{x}{2} - \frac{x}{3},\ \frac{x^2}{3.4} = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4},\ enz.$$

Stellen wij nu de som der reeks door S voor, dan vinden wij, door deze verdeeling van elken term in twee andere,

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{5}x^3 + \tfrac{1}{5}x^4 - enz.;$$

hieruit vloeit nu achtervolgens voort,

$$S - 1 = -\tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{3}x(1+x) - \tfrac{1}{4}x^2(1+x) + \tfrac{1}{5}x^3(1+x) - enz.,$$

$$\frac{S-1}{1+x} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{5}x^3 - enz.,$$

$$\frac{x^2(S-1)}{1+x} = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - enz.$$

en $$\frac{x^2(S-1)}{1+x} + x = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - enz.$$

Het tweede lid dezer vergelijking is de ontwikkeling van *Nep. Log.* $(1 + x)$, derhalve hebben wij ook

$$\frac{x^2(S-1)}{1+x} + x = Nep.\ Log.\ (1+x),$$

waaruit achtervolgens gevonden wordt

$$x^2(S-1) + x(1+x) = (1+x)\ Nep.\ Log.\ (1+x),$$

$$x^2S = (1+x)\ Nep.\ Log.\ (1+x) - x$$

en $$S = \frac{1+x}{x^2}\ Nep.\ Log.\ (1+x) - \frac{1}{x},$$

hetwelk dan nu de begeerde som is.

II. Oplossing van J. S. Speijer.

De som der opgegevene reeks wederom door S voorstellende en dezelve met x^2 vermenigvuldigende, vinden wij

$$x^2S = \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \frac{x^6}{5.6} - enz.;$$

deze vergelijking differentiërende, verkrijgen wij

$$\delta(x^2S) = (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - enz.)\delta x$$

of, omdat den veelledigen factor de ontwikkeling van *Nep. Log.* $(1+x)$ is,

$$\delta(x^2S) = \delta x\ Nep.\ Log.\ (1+x);$$

derhalve is $$x^2S = \int \delta x\ Nep.\ Log.\ (1+x).$$

Nu is, volgens de algemeene herleidingsformule der integraalrekening,

$$\int \delta x Nep.Log.(1+x) = x Nep.Log.(1+x) - \int x\delta.Nep.Log.(1+x),$$

waardoor achtervolgens gevonden wordt

$$x^2S = x\ Nep.\ Log.\ (1+x) - \int x\delta.\ Nep.\ Log.\ (1+x)$$

$$= x\ Nep.\ Log.\ (1+x) - \int \frac{x\delta x}{1+x}$$

$$= x\ Nep.\ Log.\ (1+x) - \int \frac{(1+x)\delta x - \delta x}{1+x}$$

$$= x\ Nep.\ Log.\ (1+x) - \int \delta x + \int \frac{\delta x}{1+x}$$

$$= x\ Nep.\ Log.\ (1+x) - x + Nep.\ Log.\ (1+x) + C.$$

Omdat het eerste lid der vergelijking voor $x = 0$ verdwijnt, moet dit ook met het tweede lid plaats hebben,

derhalve moet $C = 0$ zijn; wij hebben alzoo

$$x^2 S = x \, Nep.\, Log.\, (1+x) - x + Nep.\, Log.\, (1+x)$$

of $$x^2 S = (1+x) \, Nep.\, Log.\, (1+x) - x$$

waaruit, even als in de vorige oplossing gevonden is, volgt

$$S = \frac{1+x}{x^2} \, Nep.\, Log.\, (1+x) - \frac{1}{x}.$$

AANMERKING. Door, in de opgegevene reeks en in de gevondene som, beurtelings $x = 1$ en $x = -1$ te stellen, vindt men:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + enz. = 2 \, Nep.\, Log.\, 2 - 1$$

en $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + enz. = 1;$$

de halve som dezer vergelijkingen nemende, verkrijgt men nog

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + enz. = Nep.\, Log.\, 2.$$

CXXIV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De differentiaal-uitdrukking $\frac{Sin.\phi \partial\phi}{Sin.^2(\phi-\alpha) Sin.(\phi-\beta)}$ *te integreren?*

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BAŞSAN, D. W. HINSE, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Indien wij de opgegevene uitdrukking door ∂y aanduiden, $\phi - \alpha = \psi$ en $\alpha - \beta = \gamma$ stellen, waardoor $\phi = \psi + \alpha$, $\phi - \beta = \psi + \gamma$ en $\partial\phi = \partial\psi$ wordt, dan hebben wij te integreren

$$\partial y = \frac{Sin.(\psi+\alpha)\partial\psi}{Sin.^2\psi Sin.(\psi+\gamma)}.$$

Daar nu $\frac{\partial\psi}{Sin.^2\psi} = -\partial.Cot.\psi$ is, kunnen wij hiervoor schrijven

$$\partial y = -\frac{Sin.(\psi+\alpha)}{Sin.(\psi+\gamma)} \partial.Cot.\psi$$

of $$\partial y = -\frac{Sin.\psi Cos.\alpha + Cos.\psi Sin.\alpha}{Sin.\psi Cos.\gamma + Cos.\psi Sin.\gamma} \partial.\, Cot.\psi,$$

en, teller en noemer door $Sin.\psi$ deelende,

$$\delta y = -\frac{Cos.\alpha + Cot.\psi Sin.\alpha}{Cos.\gamma + Cot.\psi Sin.\gamma}\,\delta.\,Cot.\psi.$$

Door werkelijke deeling vinden wij verder

$$\frac{Cos.\alpha + Cot.\psi Sin.\alpha}{Cos.\gamma + Cot.\psi Sin.\gamma} = \frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma} - \frac{Sin\,\alpha Cos.\gamma - Cos.\alpha Sin.\gamma}{Sin.\gamma(Cos.\gamma + Cot.\psi Sin.\gamma)}$$
$$= \frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma} - \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma(Cot.\gamma + Cot.\psi)};$$

hierdoor wordt

$$\delta y = -\frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma}\,\delta.Cot.\psi + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma(Cot.\gamma + Cot.\psi)}\,\delta.Cot.\psi,$$

waaruit terstond volgt

$$y = -\frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma}\int\delta.Cot.\psi + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma}\int\frac{\delta.Cot.\psi}{Cot.\gamma + Cot.\psi},$$

$$y = -\frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma}Cot.\psi + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma}Nep.Log.(Cot.\gamma + Cot.\psi) + C,$$

of, daar $Cot.\gamma + Cot.\psi = \frac{Sin.(\psi+\gamma)}{Sin.\psi Sin.\gamma}$ is,

$$y = -\frac{Sin.\alpha}{Sin.\gamma}Cot.\psi + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2.\gamma}Nep.Log.\frac{Sin.(\psi+\gamma)}{Sin.\psi Sin.\gamma} + C.$$

Nemen wij nu

$$C = -\frac{Cos.\alpha}{Sin.\gamma} + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma}\,Nep.\ Log.\ Sin.\gamma,$$

dan vinden wij

$$y = -\frac{Sin.\alpha Cot.\psi + Cos.\alpha}{Sin.\gamma} + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma}Nep.Log.\frac{Sin.(\psi+\gamma)}{Sin.\psi};$$

of, $\frac{Sin.\alpha Cot.\psi + Cos.\alpha}{Sin.\gamma} = \frac{Sin.\alpha Cos.\psi + Cos.\alpha Sin.\psi}{Sin.\gamma Sin.\psi} = \frac{Sin.(\psi+\alpha)}{Sin.\gamma Sin.\psi}$

zijnde,

$$y = -\frac{Sin.(\psi+\alpha)}{Sin.\gamma Sin.\psi} + \frac{Sin.(\alpha-\gamma)}{Sin.^2\gamma}\,Nep.\ Log.\frac{Sin.(\psi+\gamma)}{Sin.\psi}.$$

Stellen wij eindelijk hierin weder voor ψ en γ de waarden $\psi = \phi - \alpha$ en $\gamma = \alpha - \beta$, dan komt er ten laatste

$$y = -\frac{Sin.\phi}{Sin.(\alpha-\beta)Sin.(\phi-\alpha)} + \frac{Sin.\beta}{Sin.^2(\alpha-\beta)}Nep.Log.\frac{Sin.(\phi-\beta)}{Sin.(\phi-\alpha)},$$

waarbij men nu weder eene willekeurige standvastige kan voegen.

Aanmerking. Dezelfde uitdrukking wordt gevonden, wanneer men, in het 4° *Voorbeeld* van I. R. Schmidt, *Diff.*

en Int. Rek. §. 257, β door $-\alpha$, en γ door $-\beta$, vervangt. Deze uitkomst is echter aldaar langs eenen geheel anderen weg verkregen.

CXXV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Wanneer bij het achtvoud van een driehoekig getal de eenheid wordt opgeteld, komt er, zoo als bekend is, een volkomen vierkant. Men begeert nu al zulke driehoekige getallen te vinden, die tevens de eigenschap hebben, dat, als men bij dezelve dadelijk de eenheid optelt, er insgelijks een volkomen vierkant ontstaat; onder deze voorwaarde echter, dat het drievoud van den wortel uit het laatstgenoemde vierkant 64 grooter zij, dan de wortel uit het vierkant, dat men verkrijgt, door de eenheid bij achtmaal het driehoekige getal op te tellen?

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, B. LUBBERS, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Laat x het begeerde driehoekige getal zijn, dan moeten $x+1$ en $8x+1$ volkomen vierkanten wezen, zoodanig, dat, als men $\sqrt{(x+1)} = y$ stelt, $3y - 64 = \sqrt{(8x+1)}$ zij.

Wij hebben dus

$$3y - 64 = \sqrt{(8x+1)}$$

en $$y = \sqrt{(x+1)};$$

deze vergelijkingen in het vierkant brengende, verkrijgen wij

$$9y^2 - 384y + 4096 = 8x + 1$$

en $$y^2 = x + 1;$$

nu het achtvoud van de laatste vergelijking van de voorgaande aftrekkende, blijft er over

$$y^2 - 384y + 4096 = -7,$$

dus is $$y^2 - 384y + 4103 = 0,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt

$$y = 192 \pm 181,$$

dat is $$y = 373 \quad \text{of} \quad y = 11.$$

Daar nu deze waarden van y rationaal zijn, zijn de overeenkomstige waarden van $\sqrt{(x+1)}$ en $\sqrt{(8x+1)}$ volkomen vierkanten; omdat $\sqrt{(8x+1)}$ een volkomen vier-

kant is, is de overeenkomstige waarde van x een driehoekig getal; wij verkrijgen dus voor x, omdat $x = y^2 - 1$ is, de driehoekige getallen 139128 en 120, hetwelk de eenigste zijn, die aan het voorstel beantwoorden.

Het eerste beantwoordt de vraag regtstreeks, omdat men dan heeft

$$\sqrt{(x + 1)} = 373, \sqrt{(8x + 1)} = 1055,$$

en ook werkelijk gevonden wordt

$$3 \times 373 - 64 = 1055.$$

Het tweede driehoekige getal beantwoordt de vraag alleen ingeval men $\sqrt{(8x + 1)}$ negatief neemt, want dan heeft men

$$\sqrt{(x + 1)} = 11, \sqrt{(8x + 1)} = -31$$

en

$$3 \times 11 - 64 = -31.$$

CXXVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Van een vierkant getal wiskundige voorstellen, minder dan 100, *mij door mijne wiskundige vrienden opgegeven, heb ik het grootste getal, zijnde ook een vierkant, opgelost en er is ook een vierkant getal onopgelost overgebleven. Wanneer men nu drie op elkander volgende termen van zekere harmonische reeks neemt en elk derzelve in het vierkant brengt, zal van deze vierkanten: het kleinste gelijk zijn aan het product van de getallen opgeloste en onopgeloste voorstellen; het middelste gelijk aan het product der getallen opgegevene en onopgeloste voorstellen; en het grootste gelijk aan het product der getallen opgegevene en opgeloste voorstellen. Hoe veel voorstellen waren mij opgegeven en hoe veel heb ik er opgelost?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, M. G. SNOEK, H. KLOOS, J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, P. KROM, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat het aantal opgegevene voorstellen door V, het aantal opgeloste door O, het aantal onopgeloste door N worden voorgesteld, en laat $\frac{A}{x+y}$, $\frac{A}{x}$, $\frac{A}{x-y}$ de termen der harmonische reeks zijn, dan geeft het voorstel aanleiding tot de drie vergelijkingen

$$\left(\frac{A}{x+y}\right)^2 = ON, \left(\frac{A}{x}\right)^2 = VN \text{ en } \left(\frac{A}{x-y}\right)^2 = VO.$$

Vermenigvuldigt men deze drie vergelijkingen met elkander, en neemt men den vierkants-wortel uit derzelver product, dan komt er

$$\frac{A^3}{x(x^2-y^2)} = VON;$$

en, deze vergelijking door elk der vorige deelende, vindt men

$$V = \frac{A(x+y)}{x(x-y)}, \; O = \frac{Ax}{x^2-y^2} \text{ en } N = \frac{A(x-y)}{x(x+y)}.$$

Daar wij nu, zonder aan de algemeenheid der oplossing te kort te doen, voor A eene willekeurige waarde mogen nemen, stellen wij $A = x(x^2-y^2)$, dan wordt

$$V = (x+y)^2, \; O = x^2 \text{ en } N = (x-y)^2;$$

en hierdoor is nu van zelve de voorwaarde vervuld, dat V, O en N vierkante getallen moeten wezen.

Omdat voorts $V = O + N$ moet zijn, hebben wij nog

$$(x+y)^2 = x^2 + (x-y)^2,$$

waaruit volgt

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 - 2xy + y^2,$$

$$4xy = x^2$$

en

$$x = 4y;$$

hierdoor wordt

$$V = (5y)^2, \; O = (4y)^2 \text{ en } N = (3y)^2.$$

De eenige nog niet in rekening gebragte voorwaarde, waardoor y bepaald kan worden, is dat V, O en N geheele getallen moeten zijn en tevens $V < 100$ moet wezen. Deze voorwaarde vordert onmiddellijk, dat $y = 1$ zij, en wij hebben dus

$$V = 25, \; O = 16 \text{ en } N = 9.$$

Alzoo waren er 25 voorstellen opgegeven en 16 van dezelve opgelost.

Aanmerking *van* M. G. Snoek. Men kan de getallen, waarnaar gevraagd wordt, zonder eenige berekening ook onmiddellijk vinden, door op te merken, dat 25 het eenige geheele getal kleiner dan 100 is, dat, zelf een vierkant zijnde, uit de som van twee geheele vierkante getallen bestaat.

CXXVII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt of het mogelijk is een getal te vinden, dat gelijktijdig vijf-, zeven- en zeventien-hoekig is, terwijl de wortels eene rekenkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Men stelle, dat van het begeerde getal de vijfhoekige wortel $x - 2a$, de zevenhoekige $x - a$ en de zeventienhoekige x zij, dan wordt dat getal zelve uitgedrukt door de drie vormen

$$\frac{3x^2-12ax+12a^2-x+2a}{2},$$

$$\frac{5x^2-10ax+5a^2-3x+3a}{2}$$

en

$$\frac{15x^2-13x}{2},$$

waarvan de waarden onderling gelijk moeten wezen.

Wij hebben dus de twee vergelijkingen

$$3x^2-12ax+12a^2-x+2a = 5x^2-10ax+5a^2-3x+3a$$

en $$3x^2-12ax+12a^2-x+2a = 15x^2-13x,$$

of vereenvoudigd

$$2x^2+2ax-2x = 7a^2-a$$

en $$12x^2+12ax-12x = 12a^2-2a.$$

Daar nu het voorste lid van de eene vergelijking juist het zesvoud van het voorste lid der andere is, moet deze zelfde verhouding ook tusschen de achterste leden bestaan, hieruit volgt

$$12a^2+2a = 42a^2-6a$$

of $$30a^2 = 8a,$$

en dus is $$a = \tfrac{4}{15};$$

want de waarde $a = 0$, die mede aan de vergelijking voldoen zou, is onbruikbaar, daar zij geene eigenlijke rekenkunstige reeks voor de wortels zou opleveren.

Substitueren wij nu deze waarde voor a in eene der vorige vergelijkingen, dan vinden wij

$$x^2 - \tfrac{11}{15}x = \tfrac{26}{225},$$

waaruit gevonden wordt

$$x = \tfrac{13}{15} \text{ of } x = -\tfrac{2}{15};$$

voor de eerste waarde van x zijn de wortels

$$x - 2a = \tfrac{5}{15},\ x - a = \tfrac{9}{15} \text{ en } x = \tfrac{13}{15},$$

en voor de tweede waarde van x zijn zij

$$x - 2a = -\tfrac{10}{15},\ x - a = -\tfrac{6}{15} \text{ en } x = -\tfrac{2}{15};$$

in het eerste geval wordt het gevraagde getal 0; in het tweede geval wordt hetzelve 1; zoodat het, met uitsluiting van 0 en 1, niet mogelijk is een getal aan te wijzen, dat gelijktijdig vijf-, zeven- en zeventien-hoekig is, en waarvan de wortels eene rekenkunstige reeks uitmaken.

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Indien men wilde aannemen, dat de vijf- of de zeventien hoekige wortel de middelste term der rekenkunstige reeks moest wezen, zou men voor de wortels slechts onbestaanbare of irrationale waarden vinden.

CXXVIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men verlangt twee achthoekige getallen te vinden, waarvan het product mede een achthoekig getal is, en waarvan het verschil gelijk is aan het verschil hunner wortels?

Opgelost *door* B. Lubbers, G. Koster, D. W. Hinse, M. G. Snoer *en* J. S. Speijer.

I. Oplossing *van* B. Lubbers.

Stellende de wortels der begeerde achthoekige getallen voor door

$$x + a \text{ en } x,$$

dan zijn die getallen zelve

$$3x^2 + 6ax + 3a^2 - 2x - 2a \text{ en } 3x^2 - 2x;$$

het verschil dezer getallen is nu $6ax + 3a^2 - 2a$, en daar dit verschil gelijk aan het verschil a der wortels moet zijn, hebben wij de vergelijking

$$6ax + 3a^2 - 2a = a$$

dat is $$3a^2 = 3a - 6ax$$

of $$a^2 = a - 2ax;$$

daar $a = 0$ niet in den eigenlijken zin aan de vraag zou kunnen beantwoorden, kunnen wij deze vergelijking door a deelen en vinden dan

$$a = 1 - 2x.$$

Door substitutie dezer waarde voor a, worden de gestelde wortels der achthoekige getallen

$$-x+1 \quad \text{en} \quad x,$$

en de getallen zelve

$$3x^2-4x+1 \quad \text{en} \quad 3x^2-2x;$$

voor hun product wordt alzoo gevonden

$$9x^4-18x^3+11x^2-2x$$

en dit moet nu weder een achthoekig getal zijn.

Daar alle achthoekige getallen de eigenschap hebben, dat hun drievoud met de eenheid verhoogd wordende, er een vierkant komt, en omgekeerd alle getallen die deze eigenschap hebben, achthoekig zijn, zoo hebben wij slechts

$$27x^4-54x^3+33x^2-6x+1$$

tot een vierkant te maken; en hieraan wordt klaarblijkelijk terstond voldaan, indien wij $x=1$, of $x=-1$ nemen.

Voor $x=1$, zouden de wortels 0 en 1 en ook de achthoekige getallen 0 en 1 zijn; daar echter dit de bedoeling der vraag niet is, nemen wij $x=-1$, dan worden de wortels 2 en -1, de achthoekige getallen zijn dan 8 en 5; en deze voldoen geheel aan de opgaaf, daar hun product 40 mede een achthoekig getal is, terwijl hun verschil 3 gelijk is aan het verschil hunner wortels.

II. Oplossing *van* G. Koster.

Stellende voor de wortels der begeerde achthoekige getallen

$$ax \quad \text{en} \quad x,$$

dan zijn die getallen zelve

$$3a^2x^2-2ax \quad \text{en} \quad 3x^2-2x,$$

en daar het verschil dezer getallen gelijk aan dat hunner wortels moet zijn, hebben wij de vergelijking

$$3a^2x^2-2ax-3x^2+2x=ax-x$$

of

$$3(a^2-1)x^2=3(a-1)x.$$

Daar, om aan de bedoeling der vraag te voldoen, noch $x=0$, noch $a-1=0$ kan wezen, deelen wij de vergelijking door $3(a-1)x$ en vinden dan

$$(a+1)x=1$$

of

$$x=\frac{1}{a+1},$$

door substitutie van welke waarde voor x de achthoekige getallen worden

$$\frac{a^2-2a}{(a+1)^2} \text{ en } \frac{-2a+1}{(a+1)^2};$$

het product dezer getallen, dat is

$$\frac{-2a^3+5a^2-2a}{(a+1)^4}$$

moet weder een achthoekig getal, en dus het drievoud daarvan met de eenheid verhoogd een vierkant zijn, alzoo moet

$$1+3\times\frac{-2a^3+5a^2-2a}{(a+1)^4}=\frac{a^4-2a^3+21a^2-2a+1}{(a+1)^4}$$

een vierkant worden, waartoe het genoegzaam is den teller tot een vierkant te maken. Stellen wij daartoe, de handelwijze van Euler volgende,

$$a^4-2a^3+21a^2-2a+1=(ma^2+na-1)^2$$

of $a^4-2a^3+21a^2-2a+1=m^2a^4+2mna^3+(n^2-2m)a^2-2na+1$, en nemen wij vervolgens, vooreerst $m=1$, daarna $2mn=-2$ en dus $n=-1$, dan vinden wij

$$a^4-2a^3+21a^2-2a+1=a^4-2a^3-a^2+2a+1,$$

waaruit volgt $\quad 22a^2=4a$

en $\quad a=5\tfrac{1}{2};$

hierdoor wordt $\quad x=\dfrac{1}{a+1}=\tfrac{2}{13}$

en dan zijn de wortels der verlangde achthoekige getallen

$$ax=\tfrac{11}{13} \text{ en } x=\tfrac{2}{13},$$

dus die getallen zelve

$$3a^2x^2-2ax=\tfrac{77}{169} \text{ en } 3x^2-2x=-\tfrac{40}{169}.$$

Het verschil dezer getallen is, even als dat hunner wortels, $\frac{9}{13}$; en hun product $-\frac{3080}{28561}$ is wederom een achthoekig getal, dat $-\frac{10}{169}$ tot wortel heeft.

CXXIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men verlangt al de geheele achthoekige getallen, grooter dan 8, *te vinden, die de eigenschap hebben, dat hun achtvoud wederom een achthoekig getal is?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. S. Speijer, B. Lubbers *en* M. G. Snoek.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Daar de achthoekige getallen de eigenschap hebben, dat hun drievoud met de eenheid vermeerderd een vierkant is, zoo kunnen wij de te vindene achthoekige getallen door den vorm $\frac{x^2-1}{3}$ voorstellen. Het achtvoud hiervan of $\frac{8(x^2-1)}{3}$ zal dan weder een achthoekig getal moeten voorstellen, en dus zal $3 \times \frac{8(x^2-1)}{3} + 1 = 8x^2 - 7$ een volkomen vierkant moeten wezen.

Passen wij nu, om voor x zoodanige geheele getallen te vinden, welke $8x^2 - 7$ tot een volkomen vierkant maken, den regel toe, door EULER (Zie *Algebra*, II Deel, bl. 328 en volg.) opgegeven, dan zullen wij, omdat $x = \pm 1$ aan dit vereischte voldoet, voor x twee verschillende reeksen verkrijgen, namelijk:

$x = 1, 4, 23, 134,$ *enz.*

en $x = -1, -2, -11, -64,$ *enz.*

wordende in beide reeksen den n^{den} term gevonden, wanneer men het zesvoud van den $(n-1)^{den}$ term vermindert met den $(n-2)^{den}$ term.

Vermits nu $\frac{x^2-1}{3} = \frac{(x+1)(x-1)}{3}$ altijd een geheel getal is, wanneer x niet door 3 gedeeld kan worden, en de bovenstaande reeksen geene veelvouden van 3 bevatten, zoo zal elk dezer waarden, voor x in den vorm $\frac{x^2-1}{3}$ overgebragt, een achthoekig getal doen kennen, hetwelk (zoo men $x = \pm 1$, $x = -2$ en $x = 4$ uitzondert) aan de vereischten voldoen zal.

Voor $x = -11$, $x = 23$, $x = -64$, *enz.* vindt men, als de opvolgende achthoekige getallen, die aan de vraag voldoen, 40, 176, 1365, *enz.*, waarvan de achtvouden: 320, 1408, 10920, *enz.* wederom achthoekige getallen zijn.

CXXX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke contra-harmonische reeksen van drie termen hebben de eigenschap, dat, zoo men haren eersten term met de

eenheid verhoogt, maar de twee andere termen onveranderd laat, de reeks evenwel contra-harmonisch blijve?

Opgelost *door* G. Koster, J. S. Spreijer, J. A. Hansen, D. W. Hinse, B. Lubbers, F. C. Radijs *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* G. Koster.

Stel voor de termen der contra-harmonische reeks x, y en z, dan moeten ook $x+1$, y en z volgens het voorstel contra-harmonisch evenredig zijn. Naar den aard der contra-harmonische reeksen, heeft men dus de twee volgende gewone evenredigheden:

$$y-x : z-y = z : x$$

en

$$y-x-1 : z-y = z : x+1.$$

In deze evenredigheden zijn de middelste termen dezelfde, dus volgt er uit

$$x(y-x) = (x+1)(y-x-1),$$

waaruit na ontwikkeling terstond gevonden wordt

$$y = 2x+1;$$

de termen der reeks worden derhalve

$$x,\ 2x+1 \text{ en } z.$$

Nu kan men x naar welgevallen aannemen, en hierdoor de waarde van z bepalende, zal men telkens drie getallen verkrijgen, welke aan het begeerde voldoen.

Wil men echter de reeksen in geheele getallen bepalen, dan mag x niet willekeurig genomen worden. Men moet voldoen aan de evenredigheid

$$x+1 : z-2x-1 = z : x,$$

hieruit volgt

$$x^2+x = z^2-2zx-z,$$

$$x^2+2zx+x+z = z^2,$$

$$(x+z)^2+(x+z) = 2z^2,$$

$$x+z = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(2z^2+\tfrac{1}{4})},$$

$$x = \frac{-2z-1\pm\sqrt{(8z^2+1)}}{2}$$

en

$$2x+1 = -2z \pm \sqrt{(8z^2+1)}.$$

Derhalve moet z zoodanig genomen worden, dat $\sqrt{(8z^2+1)}$ rationaal zij in geheele getallen; hieraan nu wordt (volgens Euler, *Algebra*, II Deel, §. 103) voldaan door te nemen

$$z = 0;\ 1.\ 6;\ 35,\ 204, \text{ enz.},$$

in welke reeks van waarden den n^{den} term gevonden wordt, als men het zesvoud van den $(n - 1)^{den}$ vermindert met den $(n - 2)^{den}$. Voorts kan, om voor x en $2x + 1$ positieve getallen te verkrijgen, in de bovenstaande formulen alleen het bovenste teeken gelden, terwijl uit dien hoofde ook, de waarden $x = 0$ en $x = 1$ niet gebruikt kunnen worden.

Wij hebben alzoo:

Voor $z = 6$, $2x + 1 = 5$ en $x = 2$;
—— $z = 35$, $2x + 1 = 29$ en $x = 14$;
—— $z = 204$, $2x + 1 = 169$ en $x = 84$;
enz.

zoodat 2, 5 en 6; 14, 29 en 35; 84, 169 en 204; *enz.* de contra-hamonische reeksen van drie termen zijn, die de in het voorstel opgegevene eigenschap bezitten.

CXXXI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Wanneer men op 53° 36′ *Noorderbreedte, tegen eenen verticaal staanden en juist naar het Oosten gekeerden muur, eene stift van* 10 *duimen lengte loodregt op het vlak van dien muur stelt, is de vraag hoe lang de schaduw van die stift zal wezen des voormiddags ten* 8 *ure, als de zon* 12° 40′ *Noorder declinatie heeft?* (*)

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, G. KOSTER, J. SJOERNIS, J. A. HANSEN, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat EF (Fig. 44) de verticale muur, AB de loodregt daarop gestelde stift, en AC de schaduw der stift op den muur zijn, dan zal het verlengde van de lijn, uit C naar B getrokken, door de zonsplaats van het opgegeven oogenblik gaan, terwijl het verlengde van AB door het oostelijke punt van den horizon gaan moet. De hoek SBO = ABC wordt dus gemeten door den boog eens grooten cirkels, van de zonsplaats naar het oostelijke punt van den horizon loopende. Noemen wij dien boog ϕ en stellen wij AB =

(*) A. B. STRABBE, *Examen te Purmerende*, pag. 54, No. 15, alsmede P. HALCKER, *Zinnen Confect*, No. 531.

$a = 10$ en $AC = x$ duimen, dan volgt uit den regthoekigen driehoek ABC terstond

$$x = a \ Tang.\phi,$$

zoodat het om x te vinden nog slechts noodig is den boog ϕ te bepalen.

Hiertoe stelle (Fig. 45) NOZW den horizon der plaats voor, N het noorden, O het oosten, enz.; P zij de noordpool, NPZ de meridiaan der plaats en S de zonsplaats op het gegevene uur; trekken wij dan de boogen van groote cirkels OS, OP en PS, zoo is: OS $= \phi$ de te vindene boog; OP $= 90°$; PS het compliment der declinatie en dus, die declinatie α noemende, PS $= 90° - \alpha$; voorts is ZPS de uurhoek van den tijd, die er tusschen het opgegeven uur en den middag moet verloopen, ZPO $= 90°$ en dus SPO het complement van den genoemden uurhoek; dien uurhoek β noemende is alzoo SPO $= 90° - \beta$.

Nu heeft men, uit den regtzijdigen bolvormigen driehoek POS, terstond de formule

$$Cos.\ OS = Cos.\ SPO \times Sin.\ PS;$$

hierin de genoemde waarden stellende, komt er

$$Cos.\phi = Cos.\ (90° - \beta)\ Sin.\ (90° - \alpha)$$

of

$$Cos.\phi = Sin.\beta\ Cos.\alpha,$$

waaruit, omdat α en β gegeven zijn, ϕ dadelijk berekend kan worden.

In ons voorstel is β de uurhoek van de vier uren tijd, die er tusschen 8 uren voordenmiddag en den middag verloopen moeten en dus $\beta = 60°$, terwijl $\alpha = 12° 40'$ is; wij hebben alzoo, de tafels gebruikende, de volgende berekening:

$$Log.\ Sin.\beta = Log.\ Sin.\ 60° = 9{,}93753 - 10$$
$$Log.\ Cos.\alpha = Log.\ Cos.\ 12° 40' = 9{,}98930 - 10$$

opt.

$$Log.\ Cos.\phi = 9{,}92683 - 10$$
$$\phi = 32° 20'$$
$$Log.\ Tang.\phi = 9{,}80140 - 10$$
$$Log.a = Log.10 = 1{,}00000$$

opt.

$$Log.\ x = 0{,}80140$$
$$x = 6{,}33$$

De schaduw der stift is alzoo $6\frac{33}{100}$ duimen lang.

Men ziet uit deze oplossing, dat de breedte der plaats niet behoeft gegeven te zijn; voor eene andere, dan de opgegevene breedte, zal dus de schaduw der stift op hetzelfde uur even lang zijn, mits maar de declinatie dezelfde zij. Dit zal men nog ligter inzien, zoo men zich het geheele Fig. 45, met uitzondering van den horizon, voorstelt, om de lijn OW om te wentelen; door die omwenteling zal de poolshoogte veranderen, maar de uurhoek en de declinatie zullen onveranderd blijven en het punt S zal eenen cirkel beschrijven, O tot pool hebbende, zoodat OS niet van grootte verandert. Met deze omwenteling zal in Fig. 44 overeenstemmen eene omwenteling van de lijn BS om OB als as, en eene verplaatsing van het punt C, in den omtrek van eenen cirkel AC tot straal hebbende, zoodat de schaduw AC wel van rigting verandert, maar zijne lengte onveranderd behoudt.

CXXXII. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Aan de schutting van een' tuin, hebbende de gedaante eener ellips, waarvan de assen tot elkander staan als* 3 *tot* 2, *is een pedestal van* 50 *voet hoog zoodanig geplaatst, dat een beeld van* Hercules, 10 *voet lang en boven op de pedestal staande, in het oog des aanschouwers, die zich op den langsten as* 20 *voet van het middelpunt der ellips bevindt, het grootst mogelijk schijnt te zijn. Men vraagt, hoe uit deze bepalingen de inhoud van den tuin gevonden kan worden? (*)

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, F. C. RADIJS, G. KOSTER *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar de hoogte van het oog des aanschouwers boven den horizontalen grond niet is opgegeven, mogen wij het daarvoor houden, dat die hoogte niet gerekend en het oog op het grondvlak zelf verondersteld wordt. Ook de breedte van het beeld is niet gegeven; en wij behoeven dus slechts den horizontalen afstand in aanmerking te nemen van het punt, waar een voorwerp van 10 voet lengte, op eene

---

(*) A. B. STRABBE, *Examen te Purmerende*, pag. 72. No. 3.

hoogte van 50 voet geplaatst, zich onder den grootstmogelijken gezigtshoek voordoet. Laat in het algemeen *n* die afstand, *l* de lengte van het voorwerp en *p* de hoogte van het voetstuk zijn, dan is, volgens de tweede Aanmerking op het CCIII. Voorstel van het VI Deel der *Verzam. van Wisk. Voorst.* $n = \sqrt{p(p + l)}$. Wij hebben dus hier, in voeten, $n = \sqrt{50 \times 60} = 10\sqrt{30}$.

De waarde van den afstand *n* is, in het evengenoemde voorstel, door middel der differentiaal rekening gevonden, doch kan ook op vrij algemeen bekende elementaire gronden verkregen worden. Zij namelijk (Fig. 46) MN het voetstuk, NQ het voorwerp en MH eene horizontale lijn; trekt men nu door de punten Q en N eenen cirkel, die de lijn MH raakt, zoo dan R het raakpunt is, is MR de bedoelde afstand. Want trekt men de lijnen NR en QR, zoo is de hoek NRQ grooter dan elke andere hoek NR'Q, welken men verkrijgt, door uit N en Q lijnen naar eenig ander punt R' van de lijn MH te trekken; omdat de hoek NRQ door $\frac{1}{2}$ *Boog* NQ en de hoek NR'Q door $\frac{1}{2}$ *Boog* NQ — $\frac{1}{2}$ *Boog* N'Q' gemeten wordt. Daar nu MR als raaklijn, uit M aan den cirkel getrokken, middenevenredig is tusschen de deelen MN en MQ der uit M getrokkene snijlijn, zoo is $MR = \sqrt{MN \times MQ}$; waardoor de juistheid der formule $n = \sqrt{p(p + l)}$ bewezen is.

Dewijl in de opgaaf niet gezegd wordt, in welk punt van den omtrek het beeld geplaatst is, is het voorstel onbepaald; want men kan een onbepaald aantal ellipsen vinden, wier assen zich als 3 tot 2 verhouden, en die ergens aan den omtrek een punt hebben, dat op den afstand *n* verwijderd is van den beschouwer, die op de groote as 20 voet ver van het middelpunt staat. Stellen wij in het algemeen de verhouding 3 : 2 door $a : b$, den gegevenen afstand van 20 voet door *g* voor, en nemen wij vooreerst aan, dat het beeld geplaatst is op het uiteinde der groote as, dat het verst van den beschouwer verwijderd is, zoo als in Fig. 47, waar R de plaats der beschouwers, O het middelpunt der ellips en M de plaats van het beeld voorstelt, dan hebben wij in dit *eerste geval:* voor de halve groote as $OM = MR - OR = n - g$; voor de halve

kleine as $\frac{b}{a}(n - g)$, en voor den inhoud $\frac{b}{a}(n - g)^2\pi$, als wordende de inhoud eener ellips gevonden, door het product der halve assen met π te vermenigvuldigen; voor a, b, g en n de getallenwaarden 3, 2, 20 en $10\sqrt{30}$ substituerende, vinden wij in dit geval voor den inhoud nagenoeg 2532 vierkante voeten. Deze ellips is klaarblijkelijk de *kleinst mogelijke*, die aan het voorstel voldoen kan.

Laten wij deze ellips grooter worden, bij voorbeeld zoo als in Fig. 47 door de gestipte kromme lijn is aangewezen, terwijl het middelpunt in O en de verhouding der assen onveranderd blijft, en beschrijven wij uit R met RM $= n$ als straal eenen cirkel de nieuwe ellips in twee punten m snijdende, dan zal deze nieuwe ellips, het beeld in een der punten m geplaatst wordende, almede aan de vraag beantwoorden. Er zijn dus een oneindig aantal ellipsen, welke twee punten voor de plaatsing van het beeld opleveren, totdat de ellips door achtervolgende aangroeijing in den toestand van Fig. 48 komt, waar de afstand, van den beschouwer in R tot aan het digtstbijgelegen uiteinde der groote as, RM $= n$ is en het beeld dus in de drie punten M en m geplaatst kan zijn, die de ellips met den cirkel, uit R met RM $= n$ als straal beschreven, gemeen heeft. In dit *tweede geval* hebben wij: voor de halve groote as OM $=$ MR $+$ OR $= n + g$; voor de halve kleine as $\frac{b}{a}(n + g)$; en voor den inhoud $\frac{b}{a}(n + g)^2\pi = 11709$ vierkante voeten nagenoeg.

Laten wij de ellips verder aangroeijen, zoo als bij voorbeeld in Fig. 48 door de gestipte kromme lijn is aangewezen, dan krijgt die nieuwe ellips vier snijpunten m' met den cirkel gemeen, en dan zal die ellips het beeld in een der punten m' geplaatst wordende, almede aan de vraag voldoen. Er zijn dus ook een oneindig aantal ellipsen, welke vier punten voor de plaatsing van het beeld opleveren, totdat de ellips door achtervolgende aangroeijing in den toestand van Fig. 49 komt en door den cirkel, uit R met n als straal beschreven, in twee punten M geraakt wordt.

Deze laatste ellips is de *grootstmogelijke*, die aan het voorstel kan beantwoorden, want liet men dezelve verder aangroeijen, dan zou zij ophouden punten met den cirkel gemeen te hebben en het beeld zou dus niet aan den omtrek, op den bepaalden afstand n van den in R staanden beschouwer, kunnen geplaatst worden.

Om in dit *derde geval* den inhoud te vinden, merke men op, dat de lijnen RM alsnu normalen der ellips zijn. Stellen wij nu az en bz voor de halve assen der ellips en x voor de middelpunts-abscis, dan hebben wij, volgens de algemeene formulen voor de normalen en subnormalen der ellips, die hier respectievelijk n en $x - g$ zijn,

$$n = \frac{bz}{az}\sqrt{\left(a^2z^2 - x^2 + \frac{b^2z^2}{a^2z^2}x^2\right)}$$

en

$$x - g = \frac{b^2z^2}{a^2z^2}x;$$

uit de tweede vergelijking volgt $x = \frac{a^2g}{a^2 - b^2}$ en deze waarde in de eerste stellende, komt er

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2z^2 - \frac{a^2g^2}{a^2 - b^2}\right)},$$

waaruit voor de groote as gevonden wordt

$$az = a\sqrt{\left(\frac{g^2}{a^2 - b^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)};$$

de kleine as is derhalve

$$bz = b\sqrt{\left(\frac{g^2}{a^2 - b^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)},$$

en de inhoud is dus $ab\pi\left(\frac{g^2}{a^2 - b^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$ of, voor de letters de getallen-waarden stellende, nagenoeg 15645 vierkante voeten.

Wil men bij het voorstel nog de bepaling voegen, dat het beeld, ook wat deszelfs breedte betreft, onder den grootstmogelijken gezigtshoek of, met andere woorden, vlak van voren en niet eenigzins van ter zijde beschouwd moet worden, dan moet de gezigtslijn RM normaal op den omtrek zijn en dan zijn er geene andere ellipsen, die aan het voorstel beantwoorden, dan de drie in Fig. 47, 48 en 49 getrokkene, waarvan wij boven de inhouden in getallen hebben opgegeven.

AANMERKING *uit de oplossing van* J. S. SPEIJER. Onderstellen wij, dat het oog des aanschouwers 5 voet boven den horizontalen grond geplaatst is, dan wordt in Fig. 46 MN $= p = 45$, MQ $= p + l = 55$ en dus MR $= n$ $= \sqrt{45} \times 55 = 15\sqrt{11}$. Met deze onderstelling vinden wij dus voor de inhouden nagenoeg:

in het eerste geval $\frac{b}{a}(n-g)^2\pi =$ 1885 vierk.voeten,

» » tweede » $\frac{b}{a}(n+g)^2\pi = 10262\frac{1}{2}$ » » ,

» » derde » $ab\left(\frac{g^2}{a^2-b^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi =$ 13155 » » .

CXXXIII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van een gebroken is de teller een vierkant, waarvan de wortel m — 4 is; de noemer is een pronik, welke wortel is m — 2; en indien men het gebroken met deszelfs dubbel vermindert, verkrijgt men het kleinste m-hoekige getal. Welk is dit gebroken?

OPGELOST *door* D. W. HINSE, S. DIK, CORNSZ., G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Het gebroken, waarnaar gevraagd wordt, moet, volgens de eerste bepaling van het voorstel, uitgedrukt worden door den vorm

$$\frac{(m-4)^2}{(m-2)^2 + (m-2)};$$

indien men dit gebroken met deszelfs dubbel, dat is met

$$\frac{2(m-4)^2}{(m-2)^2 + (m-2)}$$

vermindert, blijft er over

$$\frac{-(m-4)^2}{(m-2)^2 + (m-2)}.$$

Volgens het CXCI. VOORSTEL, van het VI Deel der *Verzam. van Wisk. Voorst.*, wordt het kleinste m-hoekige getal uitgedrukt door den vorm

$$\frac{-(m-4)^2}{8(m-2)};$$

hieruit volgt dus, dat men hebben moet

$$\frac{-(m-4)^2}{(m-2)^2+(m-2)} = \frac{-(m-4)^2}{8(m-2)}.$$

Aan deze vergelijking voldoet $m = 4$, maar daar alsdan de teller van het gevraagde gebroken nul zou worden, kan deze waarde voor m niet dienen; men kan dus door $(m-4)^2$ deelen en vindt dan

$$\frac{-1}{(m-2)^2+(m-2)} = \frac{-1}{8(m-2)},$$

of $$(m-2)^2+(m-2) = 8(m-2).$$

Aan deze vergelijking voldoet weder $m = 2$, maar, omdat er geene tweehoekige getallen zijn, kan ook deze waarde voor m niet gebruikt worden; men mag dus ook door $m - 2$ deelen en vindt daardoor

$$(m-2) + 1 = 8,$$

waaruit terstond volgt

$$m = 9.$$

Hierdoor bekomt men voor de gevraagde breuk $\frac{2}{7}\frac{1}{8}$; vermindert men dan ook deze breuk met het dubbel van dezelve of met $\frac{4}{7}\frac{2}{8}$, dan blijft er over $-\frac{2}{7}\frac{1}{8}$, en deze rest is naar behooren het kleinst mogelijke negenhoekige getal.

CXXXIV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Men heeft eene rekenkunstige reeks, waarvan al de termen door 3 deelbaar zijn; de eerste term is een vierkant; de vierde term is gelijk aan den vierkantswortel, uit den eersten term, vermenigvuldigd met een getal, dat 1 meer is dan die wortel. Deelt men de termen der reeks door 3, dan ontstaat er klaarblijkelijk eene nieuwe rekenkunstige reeks; de eerste term hiervan is eene derde magt, waarvan de wortel 30 maal in den vierden term der eerste reeks begrepen is. Welke zijn deze beide reeksen?

OPGELOST *door* D. W. HINSE, S. DIK, CORNSZ., J. A. HANSEN, I. HEEMSKERK, ABZ., H. KLOOS, G. KOSTER, P. KROM, F. C. RADIJS, M. G. SNOER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Daar de voorste term der eerste reeks een vierkant en deszelfs derde gedeelte eene derde magt moet wezen, kan men voor dien term $81x^6$ stellen. Hierdoor wordt de vierde term der eerste reeks $9x^3(9x^3+1)$ of $81x^6+9x^3$. Zoo

men van dien vierden term den eersten aftrekt, en de rest $9x^3$ door 3 deelt, bekomt men voor het verschil van de reeks $3x^3$; dus is:

de eerste reeks, $81x^6, 81x^6+3x^3, 81x^6+6x^3, 81x^6+9x^3$, *enz.*
en de tweede, $27x^6, 27x^6+x^3, 27x^6+2x^3, 27x^6+3x^3$, *enz.*

Volgens de laatste voorwaarde des voorstels, moet nu nog

$$\frac{81x^6+9x^3}{3x^2} = 30.$$

of $$27x^4+3x = 30$$

zijn, waaruit volgt $$9x^4+x = 10.$$

De eenige meetbare wortel dezer vergelijking is $x = 1$; en de gevraagde reeksen zijn dan:

81, 84, 87, 90, *enz.*; en 27, 28, 29, 30, *enz.*

CXXXV. VOORSTEL.

Door P. Krom.

Twee getallen te vinden, welke, respectievelijk met de gegevene getallen p en q vermenigvuldigd wordende, gelijke producten opleveren; onder die bepaling, dat de som der te vindene getallen tot de som hunner vierkanten staat als r tot s?

Opgelost *door* M. G. Snoer, J. A. Hansen, D. W. Hinse, H. Kloos, G. Koster, P. Krom, J. C. Olivier, C. van Schaick, J. Sjoenis, J. S. Speijer *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* M. G. Snoer.

Laat $\frac{x}{p}$ en $\frac{x}{q}$ de getallen voorstellen, dan is aan de eerste voorwaarde des voorstels voldaan, en volgens de laatste voorwaarde moet men dan hebben

$$\frac{x}{p}+\frac{x}{q} : \frac{x^2}{p^2}+\frac{x^2}{q^2} = r : s;$$

de termen der eerste reden door x deelende, en daarna de producten der uiterste en middelste termen aan elkander gelijk stellende, verkrijgt men

$$\frac{s}{p}+\frac{s}{q} = \frac{rx}{p^2}+\frac{rx}{q^2};$$

met p^2q^2 vermenigvuldigende, komt er

$$spq^2 + sp^2q = rq^2x + rp^2x$$

of $$spq(p+q) = r(p^2+q^2)x,$$

waaruit dadelijk volgt

$$x = \frac{spq(p+q)}{r(p^2+q^2)}.$$

De begeerde getallen zijn derhalve

$$\frac{x}{p} = \frac{sq(p+q)}{r(p^2+q^2)} \text{ en } \frac{x}{q} = \frac{sp(p+q)}{r(p^2+q^2)}.$$

CXXXVI. VOORSTEL.

Door P. KROM.

Wanneer de som der vierkanten van twee getallen, vermeerderd met de som dier getallen, 200 oplevert, en derzelver product gelijk is aan den pronik van het kleinste getal, welke zijn dan die getallen?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, I. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, P. KROM, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, J. SJOENIS *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat x het kleinste en y het grootste der bedoelde getallen voorstellen, dan zal men, volgens de opgegevene voorwaarden, moeten hebben

$$x^2+y^2+x+y = 200 \text{ en } xy = x(x+1).$$

Neemt men nu de waarde $x = 0$, welke aan de laatste vergelijking voldoet, niet in aanmerking, dan kan men die vergelijking door x deelen en vindt dan $y = x + 1$ of $x = y - 1$. Deze waarde in de eerste vergelijking overbrengende, komt er

$$2y^2 = 200,$$

waaruit volgt
$$y = \pm 10$$
en
$$x = y - 1 = 9 \text{ of } - 11.$$

De gevraagde getallen zijn dus: $x = 9$ en $y = 10$, of $x = -11$ en $y = -10$.

CXXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De integraal van $\frac{Sin.^2\phi\delta\phi}{\sqrt{2-Sin.\phi}}$ ***te vinden?***

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, D. W. HINSE, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Door eene eenvoudige herleiding, heeft men vooreerst

$$\int\frac{Sin.^2\phi\delta\phi}{\sqrt{2-Sin.\phi}} = \int\frac{-(2-Sin.^2\phi)\delta\phi+2\delta\phi}{\sqrt{2-Sin.\phi}}$$

$$= - \int \frac{2-Sin.^2\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi} \partial\phi + 2\int \frac{\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi}$$

$$= - \int (\sqrt{2}+Sin.\phi)\partial\phi + 2\int \frac{\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi}$$

$$= - \phi\sqrt{2} + Cos.\phi + 2\int \frac{\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi}.$$

Stellende nu $\phi = \psi - 90°$, dan is $\partial\phi = \partial\psi$, $Sin.\phi = - Cos.\psi$, en bij gevolg

$$\int \frac{\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi} = \int \frac{\partial\psi}{\sqrt{2}+Cos.\psi}.$$

Daar verder in het algemeen (Zie I. R. SCHMIDT, *Diff.* en *Int. Rek.* §. 254), $a > b$ zijnde,

$$\int \frac{\partial\psi}{a+bCos\,\psi} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ Boog Cos. } \frac{aCos.\psi+b}{a+bCos.\psi}$$

is; zoo vinden wij, door $a = \sqrt{2}$ en $b = 1$ te nemen,

$$\int \frac{\partial\psi}{\sqrt{2}+Cos.\psi} = \text{Boog Cos. } \frac{Cos.\psi.\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+Cos.\psi};$$

of, zoo wij alles weder in ϕ uitdrukken

$$\int \frac{\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi} = \text{Boog Cos. } \frac{1-Sin.\phi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Sin.\phi}.$$

Deze laatste waarde nu in de vroeger verkregene substituerende, komt er eindelijk

$$\int \frac{Sin.^2\phi\partial\phi}{\sqrt{2}-Sin.\phi} = -\phi\sqrt{2}+Cos.\phi+2\text{Boog Cos.}\frac{1-Sin.\phi.\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Sin.\phi} + C.$$

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De integraal van $\frac{\partial\phi\sqrt{(a^2+Cos.2\phi-Cos.^2\phi)}}{Sin.2\phi}$ *te vinden?*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, F. C. RADIJS, J. BASSAN *en* D. W. HINSE.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Stellen wij de opgegevene uitdrukking door ∂y voor, dan hebben wij, daar $Cos.2\phi = Cos.^2\phi - Sin.^2\phi$ en $Sin.2\phi = 2Sin.\phi\ Cos.\phi$ is, terstond

$$\partial y = \frac{\partial\phi\sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}}{2Sin.\phi Cos.\phi},$$

en omdat $\frac{\partial\phi}{Sin.\phi Cos.\phi} = \partial.\ Nep.\ Log.\ Tang.\phi$ is, ook

$$\partial y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}.\ \partial\ Nep.\ Log.\ Tang.\phi.$$

Stellende nu $\sqrt{(a^2 - Sin.^2\phi)} = x$, dan is:

$$Sin.^2\phi = a^2 - x^2,$$

$$Cos.^2\phi = 1 - Sin.^2\phi = 1 - a^2 + x^2,$$

$$Tang.^2\phi = \frac{Sin.^2\phi}{Cos.^2\phi} = \frac{a^2-x^2}{1-a^2+x^2},$$

$$Tang.\phi = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2-(a^2-1)}},$$

$$Nep.Log.Tang\,\phi = \tfrac{1}{2}Nep.Log.(a^2-x^2) - \tfrac{1}{2}Nep.Log.(x^2-(a^2-1)),$$

en $\delta Nep.Log.Tang.\phi = \frac{x\delta x}{x^2-a^2} - \frac{x\delta x}{x^2-(a^2-1)}$,

waardoor wij verkrijgen

$$\delta y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2\delta x}{x^2-a^2} - \frac{x^2\delta x}{x^2-(a^2-1)}\right).$$

Schrijven wij nu hiervoor

$$\delta y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2\delta x}{x^2-a^2} - \delta x\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2\delta x}{x^2-(a^2-1)} - \delta x\right),$$

dan wordt deze uitdrukking dadelijk herleidbaar tot

$$\delta y = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a^2\delta x}{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}\frac{(a^2-1)\delta x}{x^2-(a^2-1)}$$

of $$\delta y = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a^2\delta x}{x^2-a^2} + \tfrac{1}{2}\frac{(1-a^2)\delta x}{x^2+(1-a^2)};$$

naar gelang der waarde van a, hebben wij dus:

voor $a > 1$, $y = \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{\delta x}{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}(a^2-1)\int\frac{\delta x}{x^2-(a^2-1)}$;

en voor $a < 1$, $y = \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{\delta x}{x^2-a^2} + \tfrac{1}{2}(1-a^2)\int\frac{\delta x}{x^2+(1-a^2)}$.

Maken wij verder gebruik van de algemeen bekende integralen

$$\int\frac{\delta x}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\,Nep.\,Log.\,\frac{c-x}{c+x},$$

of $$\int\frac{\delta x}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\,Nep.\,Log.\,\frac{x-c}{x+c}$$

en $$\int\frac{\delta x}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,Boog\ Tang.\,\frac{x}{c},$$

dan vinden wij onmiddellijk, $a > 1$ zijnde,

$$y = \tfrac{1}{4}aNep.Log.\frac{a-x}{a+x} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2-1)}.Nep.Log.\frac{x-\sqrt{(a^2-1)}}{x+\sqrt{(a^2-1)}} + C;$$

en, indien $a < 1$ is,

$$y = \tfrac{1}{4}aNep.Log.\frac{a-x}{a+x} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2)}BoogTang.\frac{x}{\sqrt{(1-a^2)}} + C.$$

Voor deze waarden van y kunnen wij ook schrijven

$$y = \tfrac{1}{2}a \; Nep.\; Log.\; \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-1)}.\; Nep.\; Log.\; \frac{x-\sqrt{(a^2-1)}}{\sqrt{(x^2-a^2+1)}} + C$$

en $$y = \tfrac{1}{2}a \; Nep.\; Log.\; \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2)}\; Boog\; Tang.\; \frac{x}{\sqrt{(1-a^2)}} + C;$$

door weder $x^2 = a^2 - Sin.^2\phi$ of $x = \sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}$ te substitueren, verkrijgen wij ten laatste

$$y = \tfrac{1}{2}a \; Nep.\; Log.\; \frac{a-\sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}}{Sin.\phi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-1)}\; Nep.\; Log.\; \frac{\sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}-\sqrt{(a^2-1)}}{Cos.\phi} + C$$

en $$y = \tfrac{1}{2}a \; Nep.\; Log.\; \frac{a-\sqrt{(a^2-Sin.^2\phi)}}{Sin.\phi} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2)}\; Boog\; Tang.\; \sqrt{\frac{a^2-Sin.^2\phi}{1-a^2}} + C,$$

R 4

waarvan de eerste formule voor $a > 1$, de tweede voor $a < 1$ en beide voor $a = 1$ bruikbaar zijn.

Voor $a = 1$ namelijk, vinden wij door elk derzelve

$$y = \tfrac{1}{2}\; Nep.\; Log.\; \frac{1-Cos.\phi}{Sin.\phi} + C$$

of, omdat $$\frac{1-Cos.\phi}{Sin.\phi} = \frac{2Sin.^2\tfrac{1}{2}\phi}{2Sin.\tfrac{1}{2}\phi Cos.\tfrac{1}{2}\phi} = Tang.\; \tfrac{1}{2}\phi \text{ is,}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\; Nep.\; Log.\; Tang.\; \tfrac{1}{2}\phi + C,$$

welke zelfde uitkomst men ook onmiddellijk verkregen zou hebben, door in de opgegevene formule $a = 1$ te stellen.

CXXXIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer men door de beenen van eenen hoek lijnen trekt, zoodanig, dat de som der afstanden van het hoekpunt tot aan de snijpunten standvastig is, welke kromme lijn is het dan, die door al deze getrokkene lijnen wordt aangeraakt?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat RST (Fig. 50) een gegeven hoek zijn, op welks beenen de stukken SA_6 en SB_6, gelijk aan de genoemde standvastige som der afstanden, zijn uitgezet; verdeelen wij dan SA_6 en SB_6 in een zelfde aantal, bij voorbeeld, zes, gelijke deelen, en trekken wij tusschen de deelpunten de lijnen A_1B_5, A_2B_4, A_3B_3, A_4B_2 en A_5B_1, dan zullen deze lijnen, benevens SA_6 en SB_6, de te vindene kromme lijn moeten aanraken, want wij hebben

$SA_6+0 = SA_5+SB_1 = SA_4+SB_2 = SA_3+SB_3 =$ *enz.*, zoodat werkelijk de som der afstanden, die genoemde raaklijnen van de beenen van den hoek afsnijden, standvastig is.

Door de onderlinge snijding der alzoo getrokkene raaklijnen, ontstaat eene gebrokene lijn $A_6A_5CDEFB_5B_6$, die de te vindene kromme lijn als een omgeschreven veelhoek omvat; door het aantal gelijke deelen, waarin SA_6 en SB_6 verdeeld worden, te vergrooten, zal deze omgeschreven veelhoek, meer tot de te vindene kromme lijn naderen, en wanneer dat aantal deelen oneindig groot gesteld wordt, zal die veelhoek in de kromme lijn zelve overgaan. De punten A_6, A_5, C, D, E, *enz.*, die, zoo het aantal deelen eindig is genomen, buiten de kromme lijn liggen, zullen dus, indien dat aantal deelen oneindig gesteld wordt, op de kromme gelegen zijn.

Trekken wij nu in den hoek RST (Fig. 51) twee lijnen AB en A'B', zoodanig dat $SA + SB = SA' + SB' = a$ standvastig zij, als wanneer $AA' = BB'$ zal wezen, en nemen wij aan, dat $AA' = BB'$ oneindig klein zij, dan zal, op grond van het boven gezegde, het punt P, waarin AB en A'B' elkander snijden, een punt der kromme zijn.

Om de meetkunstige plaats van dat punt P te bepalen, nemen wij SR en ST voor coördinaten-assen aan, en stel-

len, na PN en PM evenwijdig met die assen getrokken te hebben, PN $= x$, PM $= y$ en SA $= z$, dan is SB $= a - z$. Nu volgt, uit de gelijkvormigheid der driehoeken AMP en PNB, de evenredigheid

$$AM : MP = PN : NB$$

of $$SA - PN : MP = PN : SB - PM,$$

dat is: $$z - x : \quad y = x : a - z - y;$$

hieruit verkrijgt men de vergelijking

$$xy = (a - z - y)(z - x),$$

die na herleiding overgaat in

$$yz = (a - z)(z - x) \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

en nog maar alleen de voorwaarde uitdrukt, dat het punt P op de lijn AB moet liggen; er is dus nog eene andere vergelijking noodig, om de voorwaarde uit te drukken, dat P het snijpunt is van AB en A'B', indien AA' oneindig klein is.

Deze tweede vergelijking wordt verkregen, door op te merken, dat x en y onveranderd blijven, wanneer SA in SA', dat is z in $z + \delta z$, overgaat; en dat dus de vergelijking (1) gedifferentiëerd mag worden, in de onderstelling, dat z de eenige veranderlijke grootheid is, die er in voorkomt. Door die differentiatie te verrigten, vinden wij na deeling door δz

$$y = (a - z) - (z - x)$$

of $$y = a + x - 2z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Elimineert men nu z tusschen de vergelijkingen (1) en (2), dan vindt men gemakkelijk

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

of $$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0 \quad . \ . \quad (3),$$

welke vergelijking die der begeerde kromme lijn is.

Deze vergelijking is van den tweeden graad en het gedeelte $(x - y)^2$ derzelve bestaat uit het product van twee gelijke eerstemagtsfactoren, derhalve is de kromme lijn, waarnaar gevraagd wordt, eene parabool.

Deelen wij den hoek RST (Fig. 51) in twee gelijke deelen, door eene lijn SU, en nemen wij die lijn als nieuwe as van abscissen, de coördinaten onderling regthoekig en derzelver oorsprong in S aan; stellen wij alzoo, na PQ loodregt op SU getrokken te hebben, SQ $= u$, PQ $= t$

en *hoek* RST $= 2\alpha$, dan is *hoek* SGN $=$ *hoek* PGQ $=$ *hoek* MSG $=$ *hoek* GSN $= \alpha$ en dus GNS een gelijkbeenige driehoek; verder is dan: NG $=$ SN $=$ PM $= y$, GS $=$ 2 SN $\times$ *Cos.* GSN $= 2y Cos.\alpha$, GP $=$ PN $-$ NG $=$ $x - y$, GQ $=$ GP $\times$ *Cos.* PGQ $= (x - y)\, Cos.\alpha$, PQ $=$ GP $\times$ *Sin.* PGQ $= (x - y)\, Sin.\alpha$ en SQ $=$ GS $+$ GQ $= 2y Cos.\alpha + (x - y)\, Cos.\alpha = (x + y)\, Cos.\alpha$. Alzoo hebben wij:

$$u = (x + y)\, Cos.\alpha \quad \text{en} \quad t = (x - y)\, Sin.\alpha$$

of $$x + y = u\, Sec.\alpha \quad \text{en} \quad x - y = t\, Cosec.\alpha.$$

Door substitutie dezer waarden voor $x + y$ en $x - y$ in (3), wordt de vergelijking, tusschen de nieuw aangenomene coördinaten,

$$t^2 Cosec.^2\alpha - 2au\, Sec.\alpha + a^2 = 0,$$

of $$t^2 - 2au\, Sin.\alpha\, Tang.\alpha + a^2 Sin.^2\alpha = 0 \quad . \quad (4).$$

Om het punt O te vinden, waar de as SU door de parabool gesneden wordt, hebben wij slechts in (4) $t = 0$ en $u =$ SO te stellen, waardoor wij vinden SO $= \frac{1}{2} a Cos.\alpha$; verplaatsen wij nu den oorsprong der regthoekige coördinaten van S naar O, dan is OQ $= v$ stellende,

$$u = SQ = OQ + SO = v + \tfrac{1}{2} a Cos.\alpha,$$

en dit in (4) overbrengende, komt er

$$t^2 - 2a Sin.\alpha\, Tang.\alpha\, (v + \tfrac{1}{2} a Cos.\alpha) + a^2 Sin.^2\alpha = 0,$$

$$t^2 - 2av Sin.\alpha\, Tang.\alpha - a^2 Sin.\alpha Cos.\alpha\, Tang.\alpha + a^2 Sin.^2\alpha = 0,$$

of, daar de beide laatste termen elkander vernietigen,

$$t^2 = 2av Sin.\alpha\, Tang.\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5);$$

en dit is nu de vergelijking onzer parabool, indien de oorsprong der onderling regthoekige coördinaten in den top genomen wordt.

De gevondene parabool heeft alzoo $2a Sin.\alpha Tang.\alpha$ tot parameter; deze parameter wordt gemakkelijk geconstrueerd, door uit het punt A_6, $SA_6 = a$ zijnde, de lijnen A_6V en A_6W respectievelijk loodregt op SU en SR te trekken; deze lijnen getrokken zijnde, zal het gedeelte VW, dat zij van de as afsnijden de halve parameter zijn; want uit deze constructie volgt

$$A_6W = SA_6 \times Tang.\ RSU = a Tang.\alpha$$

en $$VW = A_6W \times Sin.\ VA_6W = a Sin.\alpha Tang.\alpha;$$

uit het verband hiervan met de eigenschap der parabool,

dat overal de subnormaal gelijk aan de halve parameter is, blijkt tevens, dat de lijn SA_6 juist in het punt A_6 door de parabool geraakt wordt.

De top O der parabool wordt mede gemakkelijk geconstrueerd, want zoo men $Sa = Sb = \frac{1}{2}a$ neemt, zal de snijding der lijnen ab en SO klaarblijkelijk het O geven.

Het zou kunnen schijnen, dat slechts een gedeelte der parabool, in de bij het voorstel opgegevene voorwaarde, begrepen was; maakt men echter $A_6a' = Sb'$, dan is $Sa' - Sb' = SA_6 = a$, dus is ook, zoo men slechts den negatieven toestand van Sb' in aanmerking neemt $a'b'$ eene der raaklijnen in het voorstel genoemd, en hieruit blijkt, dat werkelijk de geheele parabool in de opgegevene voorwaarde ligt opgesloten.

CXL. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Indien een gegeven gewigt als last, aan het losse blok van een takelgestel bevestigd, in evenwigt wordt gehouden door een tegenwigt, dat aan het losse einde van het touw hangt, en men vervolgens bij dit tegenwigt een overwigt voegt, met welke versnelling zal dan de last zich naar boven bewegen? In de onderstelling, dat het gewigt van blok en touw gering genoeg is, om buiten rekening te blijven, en dat er ook geene wrijving, stramheid of tegenstand der lucht plaats heeft.

OPGELOST *door* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Laat L (Fig. 52) de last voorstellen, K het tegenwigt, waardoor de toestel in rust blijft en O het overwigt, waardoor dezelve in beweging gebragt wordt. Laat verder de verhouding, waarin de magt tot de last moet staan, om zich aan het takelgestel in evenwigt te bevinden, in het algemeen als 1 tot n wezen (zijnde in de figuur slechts gemakshalve $n = 2$ genomen), zoodat $L = n\,K$ is, dan is de ruimte, die door K met het daaraan verbondene overwigt O doorloopen wordt, tot de ruimte, welke L doorloopt, als n tot 1. Zij dus G de versnelling, waarmede $K + O$ zich naar beneden beweegt, en G' de versnelling, waarmede de last opwaarts gaat, dan zullen wij hebben

$$G : G' = n : 1$$

en
$$G' = \frac{G}{n} = G \times \frac{K}{L}.$$

Nemen wij nu, ter bepaling van G, de eenvoudige formule (Zie I. R. SCHMIDT, *Dynamica*, §. 95.)

$$G = g \times \frac{B}{P},$$

waarin B de beweegkracht, P de bewogene massa en g de versnelling der zwaartekracht uitdrukt, dan is in ons geval B blijkbaar het overwigt O en dus

$$G = g \times \frac{O}{P}.$$

De massa P bestaat eerstelijk uit het tegenwigt K benevens het overwigt O, en daarenboven uit zoodanig gedeelte der last L, als gelijk is aan de spanning, die de last L aan het losse einde van het touw te weeg brengt, namelijk $\frac{1}{n}$ L. Maar dit gedeelte wordt, niet met dezelfde snelheid als K + O, in beweging gebragt; het verkrijgt door de inrigting des takels slechts $\frac{1}{n}$ van die snelheid; wij kunnen dus aan het losse einde ook slechts $\frac{1}{n}$ van dat gedeelte, dat is $\frac{1}{n^2}$ L, als massa in rekening brengen, en verkrijgen alzoo

$$P = K + O + \frac{1}{n^2} L.$$

Hierdoor wordt

$$G = \frac{O}{K+O+\frac{1}{n^2}L} \cdot g$$

of, $n = \frac{L}{K}$ substitueerende,

$$G = \frac{OL}{(K+O)L+K^2} \cdot g$$

en dus is

$$G' = G \times \frac{K}{L} = \frac{OK}{(K+O)L+K^2},$$

hetwelk de gevraagde versnelling is.

CXLI. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Als $\frac{24\blacktriangle}{\blacksquare 736} = \frac{1}{7}$ *en* $\blacktriangle - \blacksquare = 7$ *is, welke zijn dan de overdekte cijfers?*

OPGELOST *door* C. VAN SCHAICK, J. A. HANSEN, I. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HINSE, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* A. VOLKERSE.

OPLOSSING *van* C. VAN SCHAICK.

Indien wij de door ▲ en ■ overdekte cijfers respectievelijk door x en y voorstellen, geeft het voorstel aanleiding tot de vergelijkingen

$$\frac{240+x}{1000y+736} = \frac{1}{7}$$

en

$$x - y = 7;$$

de eerste vergelijking wordt, na verdrijving der breuken,

$$1680 + 7x = 1000y + 736,$$

hierin $x = y + 7$ substitueerende, zoo als uit de tweede vergelijking volgt, komt er

$$1680 + 7(y + 7) = 1000\,y + 736,$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$y = 1,$$

derhalve is

$$x = y + 7 = 8.$$

De overdekte cijfers zijn alzoo 8 en 1, zoodat de opgegevene vergelijkingen zijn:

$$\frac{248}{1736} = \frac{1}{7} \text{ en } 8 - 1 = 7.$$

AANMERKING *van* J. A. HANSEN. Uit eene oppervlakkige beschouwing der vergelijking

$$1680 + 7x = 1000y + 736$$

blijkt dadelijk, dat $x = 8$ moet zijn, dewijl 8 het eenigste cijfer is, dat met 7 vermenigvuldigd eene 6 op de plaats der eenheden geeft. Even zoo blijkt uit diezelfde vergelijking, dat $y = 1$ moet wezen; want $x < 10$ zijnde, is $1680 + 7x < 2000$ en dus ook $1000y + 736 < 2000$. Men zou derhalve de tweede vergelijking kunnen ontberen.

AANMERKING *van* I. HEEMSKERK, ABZ. Dewijl y ten minste 1 moet zijn en x niet grooter dan 9 kan wezen, vordert de

vergelijking $x - y = 7$ of $x = y + 7$, dat $y = 1$ en $x = 8$ of $y = 2$ en $x = 9$ zij. Voor $x = 9$ en $y = 2$, zou de noemer der breuk $\frac{24[illegible]}{[illegible]736}$ grooter dan het tienvoud des tellers worden; men kan dus alleen $x = 8$ en $y = 1$ nemen, als wanneer die breuk naar behooren gelijk $\frac{1}{7}$ wordt.

CXLII. Voorstel.

Door H. Kloos.

Er zijn twee getallen, die de volgende eigenschappen hebben: zoo men het eerste getal door 3 *deelt, zoo men het verschil der getallen met* 3 *vermindert en zoo men het tweede getal met eene eenheid verhoogt, komen er drie volkomen vierkanten; de wortels dezer vierkanten, in de opgenoemde volgorde genomen, maken eene rekenkunstige reeks uit; en de som dezer reeks staat tot het tweede getal, als* 3 *tot* 10. *Welke zijn deze getallen?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. A. Hansen, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr., G. Koster, M. G. Snoer, I. Heymskerk, Abz., H. Kloos *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Men stelle voor de genoemde reeks

$$x - y,\ x \text{ en } x + y,$$

dan vindt men uit de eerst opgegevene bepalingen:

voor het eerste getal . . . . $3(x - y)^2$,
voor het tweede getal . . . . $(x + y)^2 - 1$,
en voor het verschil der getallen . . . . $x^2 + 3$;
hierdoor heeft men

$$3(x - y)^2 - [(x + y)^2 - 1] = x^2 + 3$$

of na herleiding

$$x^2 - 8xy + 2y^2 = 2 \quad . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Uit de laatste bepaling des voorstels heeft men nog

$$3x : (x + y)^2 - 1 = 3 : 10$$

of

$$x^2 + 2xy + y^2 = 10x + 1 \quad . \; . \quad (2).$$

Zoo men het tweevoud van (2) met (1) vermindert, vindt men

$$x^2 + 12xy = 20x$$

of, daar x niet gelijk nul kan zijn,

$$x + 12y = 20;$$

alsoo is $$x = 20 - 12y \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Deze waarde voor x in (2) substituerende, komt er na herleiding

$$121y^2 - 320y + 199 = 0,$$

waaruit gevonden wordt

$$y = \tfrac{199}{121} \text{ of } y = 1$$

en dus, volgens (3),

$$x = \tfrac{32}{121} \text{ of } x = 8.$$

Deze waarden van x en y geven, voor de gevraagde getallen,

$$3(x - y)^2 = \tfrac{83667}{14641} \text{ en } (x + y)^2 - 1 = \tfrac{320}{121}$$

of $$3(x - y)^2 = 147 \text{ en } (x + y)^2 - 1 = 80.$$

CXLIII. VOORSTEL.

Door J. A. HANSEN.

In eenen regthoekigen driehoek, welks hypothenusa door het getal 325 wordt uitgedrukt, is een cirkel beschreven. Men vraagt dien driehoek zóó te bepalen, dat de straal van den ingeschreven cirkel door een geheel getal wordt aangegeven?

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, J. SJOENIS, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* I. HEEMSKERK, ABZ.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Het is eene bekende eigenschap der regthoekige driehoeken, dat de straal des ingeschreven cirkels gelijk is aan de halve overmaat van de som der regthoekszijden boven de hypothenusa.

Stellen wij dus voor de zijden des driehoeks, de bekende vormen

$$m(p^2 - q^2),\ 2mpq \text{ en } m(p^2 + q^2)$$

waarin m, p en q geheele getallen ($p > q$ zijnde, en m geene vierkante factoren bevattende) verbeelden, en de laatste van welke vormen de hypothenusa voorstelt, dan hebben wij, voor den straal des ingeschreven cirkels,

$$R = \frac{m(p^2-q^2)+2mpq-m(p^2+q^2)}{2} = mq(p - q).$$

Voorts is dan gegeven

$$m(p^2 + q^2) = 325,$$

waarin men voor m de deelers van 325 kan nemen, met uitzondering van 25; dat is: $m = 1$, $m = 5$, $m = 13$ en $m = 65$.

Nu is voor $m = 1$, $p^2 + q^2 = 325$, en dan kan men nemen:

$q = 1$ en $p = 18$, waardoor men vindt $R = 17$;
$q = 6$ en $p = 17$, ——— —— —— $R = 66$;
$q = 10$ en $p = 15$, ——— —— —— $R = 50$.

Voor $m = 5$, is $p^2 + q^2 = 65$, en dan kan men nemen:

$q = 1$ en $p = 8$, waardoor men vindt $R = 35$;
$q = 4$ en $p = 7$, ——— —— —— $R = 60$.

Voor $m = 13$, is $p^2 + q^2 = 25$, en dan kan men nemen:

$q = 3$ en $p = 4$, waardoor men vindt $R = 39$.

Voor $m = 65$, is $p^2 + q^2 = 5$, en dan kan men nemen:

$q = 1$ en $p = 2$, waardoor men vindt $R = 65$.

Er zijn dus in het geheel zeven antwoorden op het voorstel.

AANMERKING *van* J. BADON GHIJSEN. Uit de aangevoerde eigenschap der regthoekige driehoeken, is het duidelijk, dat de straal des ingeschreven cirkels altijd een geheel getal zal zijn, als men slechts voor de *som* der regthoekszijden een oneven getal neemt. De regthoekszijden zelven zullen dan wel meestal irrationaal worden, maar de rationaliteit van deze is in de opgaaf niet bepaaldelijk gevorderd. Het onevene getal, voor de som der regthoekszijden te nemen, is echter niet geheel willekeurig, maar moet tusschen de grenzen 325 en $325\sqrt{2}$ liggen.

CXLIV. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Eene pendule heeft drie wijzers aan dezelfde spil, eene uur-, minuut- en seconde-wijzer; dezelve staan ten 12 *ure alle juist op elkander. Wanneer zal dat weder gebeuren en wanneer met twee van dezelve?* (*)

(*) PRESTET, *Nouveaux Elemens de Mathematiques.*

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER *en* A. VOLKERSE.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Twee wijzers, van welke de eene in a tijdseenheden en de andere in b tijdseenheden eenen omloop volbrengt, zullen in ab tijdseenheden, de eerste b malen de tweede a malen rondgaan. De tweede gaat dus den eersten $a-b$ malen voorbij in die ab tijdseenheden, of éénmaal in $\frac{ab}{a-b}$ tijdseenheden. Rekenen wij nu in minuten, dan is:

1°. Voor uur- en minuut-wijzer,

$$a = 720,\ b = 60,\ \text{dus}\ \frac{ab}{a-b} = 65\tfrac{5}{11} = \tfrac{720}{11}.$$

2°. Voor minuut- en seconde-wijzer,

$$a = 60,\ b = 1,\ \text{dus}\ \frac{ab}{a-b} = 1\tfrac{1}{59} = \tfrac{720}{708}.$$

3°. Voor uur- en seconde-wijzer,

$$a = 720,\ b = 1,\ \text{dus}\ \frac{ab}{a-b} = 1\tfrac{1}{719} = \tfrac{720}{719}.$$

Van 12 ure af te beginnen, zullen dus, telkens na verloop van $65\frac{5}{11}$ minuut, de uur- en minuut-wijzer; telkens na verloop van $1\frac{1}{59}$ minuut, de minuut- en seconde-wijzer; en, telkens na verloop van $1\frac{1}{719}$ minuut, de uur- en seconde-wijzer weder boven elkander staan.

De tijd na 12 uur, waarop alle drie de wijzers weder boven elkander staan, moet een veelvoud van elk der boven gevondene tijden zijn; daar nu het kleinste gemeene veelvoud van die tijden 720 minuten of 12 uren is, zoo zullen de drie wijzers elkander niet eer, dan na verloop der volle 12 uren, weder bedekken.

CXLV. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Indien iemand op zijn 8ste jaar kon tillen 15 pond, op zijn 16de jaar 60 pond, op zijn 24e jaar 90 pond, op zijn 32ste jaar 105 pond, en, toen hij aan een verval van krachten stierf, 0 pond; hoe lang kan men dan, volgens dien maatstaf, rekenen, dat hij geleefd heeft?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, L. J. ULMAN, J. A.

Hansen, E. Olivier, Dz., F. C. Radijs, G. Koster, J. S. Speijer en A. Volkersse.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Het getal ponden P, dat de bedoelde persoon tillen kan, moet, naar den aard des voorstels, eene functie zijn van het getal jaren x, dat hij bereikt heeft, zoo dat wij kunnen stellen

$$P = F(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

en hierin moet nu: $P = 15$, $P = 60$, $P = 90$ en $P = 105$ zijn, naar gelang $x = 8$, $x = 16$, $x = 24$ en $x = 32$ gesteld wordt.

Nemen wij nu voor den vorm der genoemde functie, zoo als men in dergelijke gevallen gewoon is, den vorm aan van den algemeenen term eener rekenkunstige reeks van hoogeren rang, dan zullen wij, omdat er vier overeenkomstige waarden gegeven zijn, in dien vorm ook vier onbepaalde coëfficienten moeten aannemen; wij stellen derhalve, in plaats van (1),

$$P = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad . \; . \quad (2).$$

Door nu, in deze vergelijking, de met elkander overeenstemmende waarden voor P en x te substitueren, verkrijgen wij:

$$\begin{aligned} 15 &= a + 8b + 64c + 512d, \\ 60 &= a + 16b + 256c + 4096d, \\ 90 &= a + 24b + 576c + 13824d, \\ 105 &= a + 32b + 1024c + 32768d; \end{aligned}$$

en uit deze vergelijkingen a, b, c en d oplossende, hetgeen door achtereenvolgende aftrekkingen kan geschieden, vinden wij $d = 0$, $c = -\frac{15}{128}$, $b = \frac{135}{16}$ en $a = -45$, zoodat wij nu, in plaats van (2), hebben

$$P = -45 + \tfrac{135}{16}x - \tfrac{15}{128}x^2 \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Dat wij hier $d = 0$ vonden, is daaraan toe te schrijven, dat de gegevene getallen ponden niet geheel willekeurig genomen zijn, maar zoo zijn gekozen, dat zij eene reeks van den tweeden rang vormen.

Om nu te vinden, op welken ouderdom de bedoelde persoon 0 pond kon tillen, hebben wij in (3) slechts $P = 0$ te stellen en vervolgens x te berekenen; dit geeft achtervolgens:

$$\tfrac{15}{128}x^2 - \tfrac{135}{16}x + 45 = 0,$$
$$x^2 - 72x + 384 = 0,$$
$$x = 36 \pm \sqrt{912} = 36 \pm 30{,}2\ldots,$$
en dus $x = 5{,}8..$ of $x = 66{,}2\ldots;$

hij kon alzoo juist 0 pond tillen, vooreerst toen hij 5,8 jaren en ten andere toen hij 66,2 jaren oud was; overeenkomstig met de opgave moet hij dus 66,2 jaren geleefd hebben.

Stelt men in (3), $x = 0$, dan vindt men $P = -45$; bij zijne geboorte kon hij dus niet alleen geen gewigt tillen, maar zou nog eene ondersteuning van 45 pond behoeven, om zich zelven het vallen te beletten. Wil men zijnen waarschijnlijken leeftijd bepalen, in de onderstelling, dat zijne krachten bij het overlijden gelijk staan met die bij de geboorte, dan moet men in (3) $P = -45$ stellen en vindt dan

$$\tfrac{15}{128}x^2 = \tfrac{135}{16}x$$
of
$$x^2 = 72x,$$

waaraan, behalve $x = 0$, ook $x = 72$ voldoet. In de genoemde onderstelling, die echter niet overeenkomstig de opgaaf is, moet hij dus 72 jaren geleefd hebben.

Onderzoekt men, welke waarde voor x in (3) moet genomen worden, om voor P een maximum te verkrijgen, dan vindt men $x = 36$, waarmede $P = 106\tfrac{7}{8}$ overeenstemt; op zijn 36ste jaar kon hij dus het grootste gewigt, en wel een gewigt van $106\tfrac{7}{8}$ pond, tillen.

Aanmerking. Het aannemen van den vorm (2) in plaats van (1), behelst altijd veel willekeurigs, en geschiedt alleen, omdat men voor de geheel onbekende wet, volgens welke het vermogen om gewigten te tillen van den ouderdom afhangt, wel verpligt is deze of gene onderstelling aan te nemen.

CXLVI. Voorstel.

Door P. Krom.

Ik heb eene rekenkunstige en eene meetkunstige reeks, ieder van drie termen, en de som van deze zes termen is 96. De eerste term der rekenkunstige reeks is in den eersten term der meetkunstige reeks tweemaal; de tweede term der rekenkunstige is in den tweeden term der meetkunstige

driemaal, en de derde term der eerstgemelde reeks is in den derden term der laatstgemelde zesmaal begrepen, welke zijn die reeksen? (*)

OPGELOST *door* P. KROM, J. A. HANSEN, I. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HINSE, G. KOSTER, F. C. BADIJS, J. SJOENIS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., M. G. SNOER, J. C. OLIVIER *en* A. VOLKERSE.

OPLOSSING *van* P. KROM.

Laat de termen der rekenkunstige reeks voorgesteld worden door

$$x, \; x+a \text{ en } x+2a,$$

dan moeten volgens het voorstel die der meetkunstige reeks zijn

$$2x, \; 3(x+a) \text{ en } 6(x+2a).$$

Daar nu, bij eene meetkunstige reeks van drie termen, altijd het verschil der beide laatste termen tot het verschil der beide eerste staat, als de gemeene reden van die reeks tot de eenheid, zoo hebben wij, die gemeene reden r noemende,

$$6(x+2a) - 3(x+a) : 3(x+a) - 2x = r : 1,$$

dat is:
$$3x+9a : x+3a = r : 1$$

of, de beide eerste termen dezer evenredigheid door $x+3a$ deelende,

$$3 : 1 = r : 1,$$

waaruit volgt
$$r = 3.$$

Omdat dus de gemeene reden der meetkunstige reeks 3 is, hebben wij ook

$$2x \times 3 = 3(x+a)$$

of
$$2x = x+a,$$

waaruit volgt
$$x = a.$$

De gestelde reeksen worden hierdoor

$$a, \; 2a, \; 3a; \text{ en } 2a, \; 6a, \; 18a.$$

Omdat verder de som dezer zes termen 96 moet wezen, vinden wij
$$32a = 96$$

en
$$a = 3,$$

zoodat de gevraagde reeksen zijn:

$$3, \; 6, \; 9; \text{ en } 6, \; 18, \; 54.$$

(*) MEIJER HIRSCH, *Verzam. van Voorb.* Vert. door G. RAMAKERS. Bladz. 256. No. 11.

CXLVII. VOORSTEL.

Door J. A. KRAJENBRINK.

Men vraagt de som van de vierkanten der loodlijnen, die uit de hoekpunten van eenen willekeurigen driehoek op de overstaande zijden zijn nedergelaten, in eene functie van de drie zijden uit te drukken?

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, D. W. HINSE, J. A. KRAJENBRINK, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Laat de zijden des driehoeks a, b en c, de halve som dezer zijden s en de inhoud van den driehoek I genoemd worden, dan heeft men, zoo als algemeen bekend is,

$$I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Laat verder de loodlijnen op a, b en c respectievelijk door a', b' en c' worden aangeduid, dan heeft men ook

$$I = \tfrac{1}{2}aa',\ I = \tfrac{1}{2}bb' \text{ en } I = \tfrac{1}{2}cc' \quad . \quad . \quad (2),$$

waaruit voor de loodlijnen deze waarden volgen:

$$a' = \frac{2I}{a},\ b' = \frac{2I}{b} \text{ en } c' = \frac{2I}{c};$$

de som van derzelver vierkanten door S^2 voorstellende, is alzoo

$$S^2 = 4I^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

of, voor I de waarde (1) substituerende,

$$S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \quad . \quad (4),$$

waardoor, omdat $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ is, aan het voorstel is beantwoord.

AANMERKINGEN *uit de overige oplossingen.* Als men in (1) $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ substitueert, komt er

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)} \quad . \quad . \quad (5);$$

dezen vorm voor I in (3) overbrengende, vindt men

$$S^2 = \tfrac{1}{4}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6);$$

nu is

$$(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)\,\frac{1}{a^2} = 2b^2 + 2c^2 - a^2 - \frac{(b^2-c^2)^2}{a^2},$$

$$(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)\,\frac{1}{b^2} = 2a^2 + 2c^2 - b^2 - \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2}$$

en

$$(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)\,\frac{1}{c^2} = 2a^2 + 2b^2 - c^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{c^2},$$

door alzoo een vierde gedeelte van de som dezer laatste vormen te nemen, heeft men ook

$$S^2 = \tfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2} + \frac{(c^2-a^2)^2}{b^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7);$$

telt men bij de termen dezer vergelijking de overeenkomstige termen op, van de vergelijking

$$0 = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) - \tfrac{1}{4}((a^2+2b^2-2c^2) + (b^2+2c^2-2a^2) + (c^2+2a^2-2b^2)),$$

dan komt er

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{a^2} + \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{b^2} + \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{c^2}\right) \;.\;.\;.\;.\; (8),$$

zoo als men onmiddellijk zou gevonden hebben, door elk der loodlijnen afzonderlijk in de zijden uit te drukken (volgens J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 3e druk, §. 261.) en daarna de som van derzelver vierkanten te nemen.

Omdat $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2b^2c^2}$ is, zal men (6) ook dadelijk kunnen herleiden tot

$$S^2 = \frac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{4a^2b^2c^2} \ldots (9).$$

Neemt men de som van de vierkanten der vergelijkingen (2), dan zal men vinden

$$(aa')^2 + (bb')^2 + (cc')^2 = 12\ I^2$$

of, voor I de waarde (5) substituerende,

$$(aa')^2+(bb')^2+(cc')^2 = \tfrac{3}{2}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-\tfrac{3}{4}(a^4+b^4+c^4) \ldots (10).$$

CXLVIII. VOORSTEL.

Door J. A. KRAJENBRINK.

Wanneer men de overeenkomstige termen, van twee rekenkunstige reeksen van willekeurige orden, met elkander vermenigvuldigt, welke soort van reeks zullen dan de komende producten uitmaken?

OPGELOST *door* J. A. KRAJENBRINK, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, J. C. OLIVIER, L. J. ULMAN *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. A. KRAJENBRINK.

De algemeene of x^{de} term eener rekenkunstige reeks van de p^{de} orde, kan worden voorgesteld door de formule

$$T = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + enz. \ldots \ldots + \omega x^p \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin α, β, γ, ... ω coëfficienten zijn, die van den eersten term der reeks en van de eerste termen van de reijen der eerste, tweede, derde verschillen, enz. afhangen.

De algemeene of x^{de} term eener reeks van de q^{de} orde, kan even zoo worden voorgesteld door

$$T' = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + enz. \ldots \ldots + \omega' x^q \quad . \quad . \quad (2).$$

Vermenigvuldigt men deze beide algemeene termen met elkander, dan heeft het product den vorm

$$TT' = \alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2 + enz. \ldots \ldots + \omega'' x^{p+q} \quad . \quad . \quad (3).$$

Geeft men nu in (1), (2) en (3) aan x eene zelfde waarde, dan geeft (1) eenen term van de reeks der p^{de} orde, (2) den overeenkomstigen term van de reeks der q^{de} orde, en (3) het product dezer overeenkomstige termen.

Daar nu (3) den vorm heeft van den algemeenen of x^{den} term eener rekenkunstige reeks van de $(p+q)^{de}$ orde, zullen de bedoelde producten zulk eene reeks uitmaken; en wij besluiten dus: dat, wanneer men de overeenkomstige termen van twee rekenkunstige reeksen van willekeurige orden, met elkander vermenigvuldigt, de komende producten eene nieuwe rekenkunstige reeks zullen uitmaken, van zooda-

nige orde, als aangewezen wordt door de som der getallen, die de orden voor de beide oorspronkelijke reeksen aanwijzen.

CXLIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Een zeker vierkant getal van vier cijfers heeft de volgende eigenschappen: het cijfer der duizendtallen is een vijfhoekig getal; de som van de cijfers der duizend- en honderdtallen is mede een vijfhoekig getal, waarvan de wortel 3 *meer is dan de wortel van het eerstgenoemde; het cijfer der eenheden is het vierkant van dat der duizendtallen; de som der cijfers is een vierkant, waarvan de wortel het cijfer der honderdtallen is; en de cijfers der duizendtallen, honderdtallen en eenheden maken eene rekenkunstige reeks uit. Welk is dit getal?*

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., M. G. SNOEK, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, I. HEEMSKERK, ABZ., G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* J. S. SPEIJER.

I. OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat de cijfers der duizendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden respectievelijk door de letters d, h, t en e voorgesteld worden, en noemen wij x den wortel van het eerstgemelde vijfhoekige getal, dan geeft het voorstel aanleiding tot de volgende vergelijkingen:

$$d = \frac{3x^2-x}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$d + h = \frac{3(x+3)^2-(x+3)}{2} \quad \ldots \quad (2),$$

$$e = d^2 \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

$$d + h + t + e = h^2 \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

$$d + e = 2h \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Uit (1) en (2) vindt men door aftrekking, en na behoorlijke herleiding $h = 9x + 12 \quad \ldots\ldots \quad (6)$;
uit (3) volgt door substitutie van (1)

$$e = \frac{9x^4-6x^3+x^2}{4} \quad \ldots \quad (7);$$

en brengt men nu de waarden (1), (6) en (7) in (5) over, dan verkrijgt men de vergelijking

$$\frac{3x^2-x}{2} + \frac{9x^4-6x^3+x^2}{4} = 18x + 24,$$

welke, tot den gewonen vorm der hoogere magtsvergelijkingen herleid wordende, verandert in

$$9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 74x - 96 = 0,$$

en waaruit, als eenigen bruikbaren wortel, gevonden wordt

$$x = -1.$$

Derhalve is: volgens (1), $d = 2$; volgens (3), $e = d^2 = 4$; volgens (5), $h = \frac{1}{2}(d + e) = 3$; volgens (4), $t = h^2 - (d + h + e) = 0$, en diensvolgens heeft men voor het verlangde getal 2304.

AANMERKING *van* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. Dat het verlangde getal een vierkant moet wezen, behoefde niet gegeven te zijn, omdat de overige voorwaarden het getal volkomen bepalen, en wel zóó, dat het daardoor van zelve een vierkant wordt.

AANMERKING *van* M. G. SNOER. Uit de vergelijking (6) is terstond blijkbaar, dat $x = -1$ moet zijn, omdat het cijfer der honderdtallen niet grooter dan 9 en ook niet negatief mag wezen; hierdoor kan dan het voorstel verder geheel opgelost worden.

II. OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Omdat het cijfer der eenheden het vierkant van dat der duizendtallen is, zoo moet dit laatste 1, 2 of 3 zijn. Daar 3 nu geen vijfhoekig getal is, zoo kan het cijfer der duizendtallen slechts 1 of 2 zijn. Stelt men dat hetzelve 1 is, dan is ook het cijfer der eenheden 1 en, volgens de laatste bepaling, zou dan ook het cijfer der honderdtallen 1 zijn, hetgeen tegen de voorlaatste bepaling strijdt. Het cijfer der duizendtallen is dus 2, dat der eenheden 4 en, volgens de laatste bepaling, dat der honderdtallen 3. Volgens de voorlaatste bepaling is dan het cijfer der tientallen 0, en dus bekomt men voor het begeerde getal 2304.

Dit getal voldoet aan al de opgegevene bepalingen, hoezeer sommige van die bepalingen tot de oplossing niet gebruikt zijn en dus als overtollig gegeven kunnen beschouwd worden.

CL. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Van een ander getal van vier cijfers is bekend: dat 1° *het cijfer der duizendtallen,* 2° *het cijfer der eenheden,*

3° de som van de cijfers der duizend- en honderdtallen en 4° de som der vier cijfers, vier op elkander volgende termen zijn, uit de rij van de vierkanten der natuurlijke getallen. Welk getal is dit?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, F. C. Radijs, M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr., A. Volkersse, I. Heemskerk, Abz., J. C. Olivier *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de cijfers van het getal, even als in het voorgaande voorstel, door de letters d, h, t en e worden voorgesteld, en laat x^2, $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$ de op elkander volgende vierkanten zijn, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, dan hebben wij volgens het voorstel

$d=x^2$, $e=(x+1)^2$, $d+h=(x+2)^2$ en $d+h+t+e=(x+3)^2$;

trekt men de eerste vergelijking van de derde, alsmede de som van de tweede en derde vergelijking van de laatste af, zoo vindt men h en t in x uitgedrukt, zoodat men dan heeft

$d=x^2$, $h=4x+4$, $t=4-x^2$ en $e=(x+1)^2$.

Daar het cijfer der duizendtallen geene nul mag zijn, omdat men, zoo het eene nul was, geen getal van vier cijfers zou verkrijgen, moet men hebben:

$$d>0,\quad x^2>0 \text{ of } x>0;$$

omdat het cijfer der honderdtallen op zijn hoogst 9 kan zijn, moet men ook hebben:

$$h<10,\quad 4x+4<10 \text{ of } x<\tfrac{3}{2}.$$

Hieruit blijkt, dat alleen $x=1$ kan wezen; waaruit dan volgt $d=1$, $h=8$, $t=3$ en $e=4$, zoodat het begeerde getal 1834 is.

CLI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert vijf geheele getallen te vinden, die de volgende eigenschappen hebben: het 1ste, 2de en 5de zijn harmonisch; het 1ste, 4de en 5de zijn contraharmonisch; het 2de, 3de en 5de zijn harmonisch; en het 2de, 4de en 5de zijn contraharmonisch. Welke getallen kunnen dit zijn?

Opgelost *door* J. A. Hansen, M. G. Snoer, D. W. Hin-

ER, B. LUBBERS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

De getallen door x, y, z, v en w voorstellende, heeft men, volgens de opgaaf, deze vier gewone evenredigheden:

$$x - y : y - w = x : w \quad \ldots\ldots \quad (1),$$
$$x - v : v - w = w : x \quad \ldots\ldots \quad (2),$$
$$y - z : z - w = y : w \quad \ldots\ldots \quad (3),$$
$$y - v : v - w = w : y \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

daar nu deze vier evenredigheden de te vervullen voorwaarden bevatten, waaraan vijf onbekenden voldoen moeten, is het voorstel onbepaald. Lost men uit de eerste dezer evenredigheden y, uit de tweede v, uit de derde z en uit de vierde v op, dan vindt men:

$$y = \frac{2xw}{x+w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$
$$v = \frac{x^2+w^2}{x+w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$
$$z = \frac{2yw}{y+w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$
$$v = \frac{y^2+w^2}{y+w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8);$$

door (5) bij (6), alsmede (7) bij (8) op te tellen, verkrijgt men

$$y+v = x+w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$
$$z+v = y+w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10);$$

en het verschil van (9) en (10) geeft

$$y-z = x-y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11);$$

zondert men w uit de vergelijkingen (5) en (7) af, zoo vindt men

$$w = \frac{xy}{2x-y} \quad \text{en} \quad w = \frac{yz}{2y-z} \quad \ldots \quad (12),$$

waaruit dan verder volgt

$$\frac{x}{2x-y} = \frac{z}{2y-z},$$
$$\frac{2x-y}{x} = \frac{2y-z}{z},$$
$$\frac{2x-y}{x} - 1 = \frac{2y-z}{z} - 1,$$

$$\frac{x-y}{x} = \frac{2(y-z)}{z},$$

of, daarvolgens (11) $x - y = y - z$ is,

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{z}$$

en $$z = 2x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Vervolgens heeft men: uit (11) en door substitutie van (13)

$$y = \tfrac{1}{2}(x + z) = \tfrac{3}{2}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14);$$

uit (12), door substitutie van (13) en (14),

$$w = 3x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15);$$

uit (9), door substitutie van (14) en (15),

$$v = x + w - y = \tfrac{5}{2}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16);$$

zoodat nu al de overige onbekenden in x zijn uitgedrukt, en de verlangde getallen begrepen zijn in de vormen

$$x,\ \tfrac{3}{2}x,\ 2x,\ \tfrac{5}{2}x \ \text{ en } \ 3x.$$

Neemt men dus voor x een willekeurig even getal, dan zullen deze vormen geheele getallen opleveren, die aan het voorstel beantwoorden. Voor $x = 2$, vindt men de getallen 2, 3, 4, 5, 6, hetwelk de kleinste getallen zijn, die aan de vraag voldoen.

CLII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van zekere harmonische evenredigheid is de eerste term eene derdemagt, de tweede term eene tweedemagt en de derde term het dubbel van den eersten; terwijl tevens de vierkantswortel uit den tweeden term het dubbel is van den derdemagtswortel uit den eersten. Welk is deze harmonische evenredigheid?

OPGELOST *door* S. DIK, CORNSZ., J. A. HANSEN, I. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HINSE, G. KOSTER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNSZ.

Laat x de derdemagtswortel uit den eersten term zijn, dan is $2x$ de vierkantswortel uit den tweeden; de termen zelve zijn dan, daar de derde het dubbel van den eersten is,

$$x^3,\ 4x^2 \ \text{ en } \ 2x^3.$$

Volgens de eigenschappen der harmonische evenredigheden is nu

$$x^3 : 2x^3 = x^3 - 4x^2 : 4x^2 - 2x^3$$

of
$$1 : 2 = x - 4 : 4 - 2x;$$

uit deze evenredigheid volgt de vergelijking

$$2x - 8 = 4 - 2x,$$

waaruit men vindt $x = 3$.

De harmonische evenredigheid bestaat dus uit de termen

27, 36 en 54.

CLIII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van welken boog maken de Cosinus, Tangens en Secans eene meetkunstige reeks uit?

OPGELOST *door* D. W. HINSE, S. DIK, CORNSZ., J. A. HANSEN, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* G. KOSTER.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Stel den gevraagden boog door ϕ voor, dan is

$$Cos.\phi : Tang.\phi = Tang.\phi : Sec.\phi$$

en dus, daar $Cos.\phi. \, Sec.\phi = 1$ is,

$$Tang.^2\phi = 1$$

of
$$Tang.\phi = \pm 1$$

zoodat men heeft $\phi = n\pi \pm 45°$,

waarin n een willekeurig geheel getal verbeeldt.

AANMERKING. De bovengevondene waarde van ϕ, zal altijd verkregen worden, indien men $Tang.\phi$ of $Cot.\phi$ middenevenredig aanneemt, tusschen twee Goniometrische lijnen, waarvan de regthoek gelijk is aan het vierkant op den straal. Daar dit nu ook plaats heeft met den Sinus en Cosecans van eenen zelfden boog zoo zullen ook de Sinus, Tangens en Cosecans van den gevonden' boog eene meetkunstige reeks uitmaken. Om dezelfde reden zal de Tangens van dien boog middenevenredig zijn, tusschen zich zelven en den Cotangens, en dus gelijk wezen aan den Cotangens; iets hetwelk ten opzigte van $n\pi \pm 45°$ eene bekende waarheid is. Men zal dus uit de gedurige evenredigheden:

$$Cos.\phi : Tang.\phi = Tang.\phi : Sec.\phi,$$
$$Sin.\phi : Tang\,\phi = Tang.\phi : Cosec.\phi,$$
$$Cos.\phi : Cot.\phi = Cot.\phi : Sec.\phi,$$

en $Sin.\phi : Cot.\phi = Cot.\phi : Cosec.\phi$,

altijd vinden $\phi = n\pi \pm 45^\circ$.

CLIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van welken boog maken de Cosinus, Tangens en Secans eene rekenkunstige reeks uit?

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. C. Olivier, J. S. Speijer, J. A. Hansen, J. Teixeira de Mattos, Jr., G. Koster, J. Sjoenis, S. Dik, Cornsz., F. C. Radijs *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Stel den gevraagden boog door ϕ voor, dan is

$$Cos.\phi : Tang.\phi \div Tang.\phi : Sec.\phi,$$

en dus $$Cos\,\phi + Sec.\phi = 2Tang.\phi,$$

of $$Cos.\phi + \frac{1}{Cos.\phi} = \frac{2Sin.\phi}{Cos.\phi},$$

waaruit volgt $Cos.^2\phi - 2Sin.\phi + 1 = 0$.

Verder gaat, omdat $Cos.^2\phi = 1 - Sin.^2\phi$ is, deze vergelijking over in

$$Sin.^2\phi + 2Sin.\phi - 2 = 0,$$

en hieruit wordt op de gewone wijze gevonden

$$Sin.\phi = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Dewijl $Sin.\phi$ tusschen de grenzen -1 en $+1$ moet vallen, kan het benedenste teeken niet gebruikt worden; men heeft dus alleen

$$Sin.\phi = -1 + \sqrt{3} = 0{,}7320508,$$

waaruit, met behulp der tafels, gevonden wordt:

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 47^\circ,\ 3'\ 31'' \\ \text{of } \phi = 132^\circ,\ 56'\ 29''\end{array}\right\}\text{nagenoeg.}$$

Aanmerking. Indien men eene standvastige grootheid door de termen eener rekenkunstige reeks deelt, zullen, zoo als bekend is, de quotienten harmonisch evenredig zijn. Hieruit volgt, dat $\frac{1}{Cos.\phi}$, $\frac{1}{Tang.\phi}$ en $\frac{1}{Sec.\phi}$ of wat hetzelfde is $Sec.\phi$, $Cot.\phi$ en $Cos\,\phi$, voor de bovenstaande waarden van ϕ, eene harmonische evenredigheid uitmaken.

CLV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van welken boog maken de Sinus versus, Cosinus en Sinus eene rekenkunstige reeks uit?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. A. Hansen, S. Dik, Cornsz., D. W. Hinse, J. C. Olivier, J. Teixeira de Mattos, Jr., G. Koster *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stel wederom den begeerden hoek door ϕ voor, dan is

$$Sin.\ Vers\ \phi + Sin.\phi = 2Cos.\phi$$

en dus, omdat $Sin.\ Vers.\phi = 1 - Cos.\phi$ is,

$$1 + Sin.\phi = 3Cos.\phi$$

of wel $$Sin.\phi = 3Cos.\phi - 1.$$

De leden dezer vergelijking in het vierkant brengende, komt er

$$Sin.^2\phi = 9Cos.^2\phi - 6Cos.\phi + 1;$$

schrijvende nu $1 - Cos.^2\phi$ in plaats van $Sin.^2\phi$, dan komt er na herleiding

$$10Cos.^2\phi - 6Cos.\phi = 0,$$

of $$Cos.\phi(10Cos.\phi - 6) = 0.$$

Den eersten factor gelijk nul stellende, zoo heeft men $Cos.\phi = 0$ en $Sin.\phi = 3Cos.\phi - 1 = -1$; bepaalt men zich tot positieve bogen kleiner dan 360, dan volgt hieruit $\phi = 270°$.

Den tweeden factor gelijk nul stellende, zoo vindt men $Cos.\phi = \frac{3}{5}$ en $Sin.\phi = 3Cos.\phi - 1 = \frac{4}{5}$; bepaalt men zich dus even als boven, dan volgt hieruit, met behulp der tafels,

$$\phi = 53°\ 7'\ 48''.$$

Aanmerking *van* J. A. Hansen. De laatstgevondene hoek is de grootste scherpe hoek van eenen regthoekigen driehoek, welks zijden tot elkander staan als de getallen 3, 4 en 5.

CLVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Een ligchaam A ***wordt verticaal opgeworpen, met eene snelheid van*** 80 ***ellen; een ander ligchaam*** B ***wordt*** 7 ***seconden later in dezelfde rigting opgeworpen, met eene snel-***

heid van 100 *ellen. Men vraagt: hoe hoog het eerste ligchaam reeds geklommen zal zijn, als het tweede begint te klimmen, en waar deze ligchamen elkander zullen ontmoeten? Alles in de onderstelling, dat de zwaartekracht standvastig is, en dat er geene tegenstandbieding der lucht plaats heeft.*

Opgelost *door* D. W. Hinse, S. Dik, Cornsz., *en en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Wanneer een ligchaam met een snelheid C verticaal wordt opgeworpen, en zich dien ten gevolge, na T seconden, op eene hoogte S boven het punt van opwerping bevindt, dan is (Zie I. R. Schmidt, *Beginselen der Dynamica.* §. 37.)

$$S = CT - gT^2,$$

in welke formule g de versnelling der zwaartekracht voorstelt; kunnende deze versnelling op onze breedte gerekend worden 4,9 el te zijn.

Om dus het eerste gedeelte der vraag te beantwoorden, hebben wij in deze formule slechts $C = 80$, $T = 7$ en $g = 4{,}9$ te stellen; hierdoor wordt

$$S = 80 \times 7 - 4{,}9 \times 49 = 319{,}9,$$

zoodat het ligchaam A reeds 319,9 el geklommen is, wanneer het ligchaam B wordt opgeworpen.

Stellen wij, om het tweede gedeelte der vraag te beantwoorden, dat op het oogenblik der ontmoeting A x seconden in beweging is geweest, en dus het ligchaam B $x - 7$ seconden, dan worden, volgens de aangehaalde formule, de hoogten, waarop de ligchamen A en B zich bij hunne ontmoeting boven het punt van opwerping bevinden, respectievelijk uitgedrukt door

$S = 80x - 4{,}9x^2$ en $S = 100(x-7) - 4{,}9(x-7)^2$ enz.

Daar nu deze waarden van S aan elkander gelijk moeten zijn, hebben wij

$$80x - 4{,}9x^2 = 100(x - 7) - 4{,}9(x - 7)^2,$$

dat is, na herleiding,

$$700 + 4{,}9 \times 49 = 20x + 4{,}9 \times 14x$$

of

$$9401 = 886x,$$

waaruit volgt $x = 10\frac{541}{886}$ of $x = 10{,}61$ nagenoeg.

Substitueren wij verder deze waarde van x, in eene der beide bovenstaande uitdrukkingen voor S, dan vinden wij

$$S = 297 \tfrac{1429431}{7849900} \text{ of } S = 297{,}2 \text{ nagenoeg.}$$

De ontmoeting der ligchamen heeft dus plaats, ruim 297 el boven het punt, waar de ligchamen zijn opgeworpen, en wel 10 $\frac{541}{880}$ seconden, nadat het ligchaam A is begonnen te klimmen.

Aanmerking *uit de oplossing van* S. Dik, Cornsz. De grootste hoogte, waartoe het ligchaam A opklimt, en de tijd, dien het daartoe besteedt, worden gevonden door in de formulen

$$V^2 = C^2 - 4gS \quad \text{en} \quad V = C - 2gT$$

(zie ter aangehaalde plaats) $V = 0$, $C = 80$ en $g = 4{,}9$ te stellen; men vindt dan

$$S = \frac{1600}{4{,}9} = 326{,}5 \quad \text{en} \quad T = \frac{80}{9{,}8} = 8{,}16 \text{ nagenoeg.}$$

De ontmoeting heeft dus plaats, als het ligchaam A, eerst gedurende 8,16 seconden ter hoogte van 326,5 el geklommen zijnde, daarna gedurende 2,45 seconden weder eene ruimte van 29,3 el heeft doorgevallen.

CLVII. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

Iemand laat eenen steen in eenen put vallen, en hoort den val op den bodem, a seconden, nadat hij den steen heeft losgelaten. Indien nu de versnelling der zwaartekracht en de snelheid des geluids bekend zijn, hoe diep is dan die put? Dezelfde onderstellingen als bij het vorige voorstel aannemende.

Opgelost *door* G. Koster, J. A. Hansen, D. W. Hinse, L. van de Kasteele, E. Olivier, Dz., F. C. Badijs, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* G. Koster.

Laat gegeven zijn, dat de steen vrij vallende in de eerste seconde g ellen doorloopt en dat het geluid in elke seconde c ellen aflegt. Stel voorts, dat de steen tot deszelfs val besteedt x seconden, dan besteedt het geluid $a - x$ seconden, om van den bodem des puts naar boven te komen.

Nu doorloopt de steen in x seconden gx^2 ellen en het

geluid in $a - x$ seconden $c(a - x)$ ellen, welke doorgeloopene ruimten ieder op zich zelve de diepte van den put en dus onderling gelijk zijn.

Alzoo is $$gx^2 = c(a - x)$$

of $$x^2 + \frac{c}{g} x = \frac{ac}{g},$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x = -\frac{c}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{ac}{g}\right)}$$

of $$x = \frac{-c + \sqrt{(c^2+4agc)}}{2g},$$

kunnende hier uit den aard der zaak het teeken —, vóór de wortelgrootheid, niet in aanmerking komen.

Door nu de gevondene waarde voor x in het vierkant te brengen en daarna met g te vermenigvuldigen, komt er ten laatste voor de diepte des puts

$$gx^2 = \frac{c}{2g}\left\{c + 2ag - \sqrt{(c^2 + 4agc)}\right\}.$$

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Gebruikt men in bovenstaande oplossing het teeken —, dan verkrijgt men

$$x = -\frac{c+\sqrt{(c^2+4agc)}}{2g}$$

en $$gx^2 = \frac{c}{2g}\left\{c + 2ag + \sqrt{(c^2 + 4agc)}\right\};$$

daar nu x negatief is, beteekent zulks, dat het ligchaam, $\frac{c+\sqrt{(c^2+4agc)}}{2g}$ seconden *vóór* het oogenblik, waarop hetzelve boven aan den put in rust was, zich op den bodem bevond en aldaar een geluid voortbragt, hetwelk a seconden na het genoemde oogenblik gehoord wordt. De uitdrukking $\frac{c}{2g}\left\{c + 2ag + \sqrt{(c^2 + 4agc)}\right\}$ geeft dus de diepte van den put aan, indien de vraag volgender wijze was opgegeven: *Een steen wordt uit den bodem van een' put verticaal opgeworpen, met eene snelheid, die denzelven juist tot boven aan den put doet klimmen; een geluid, bij het opwerpen ontstaan, wordt boven aan den put gehoord, a seconden, nadat de steen reeds de opening van den put bereikt heeft; men vraagt enz.*

Brengt men dan ook deze nieuwe vraag in vergelijking en stelt men daartoe, dat de steen x en dus het geluid $a + x$ seconden noodig heeft, om van den bodem tot aan de opening te komen, dan zal de diepte van den put door gx^2 en door $c(a + x)$ worden uitgedrukt, zoodat men dan heeft

$$gx^2 = c(a + x),$$

waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 + 4agc)}}{2g}.$$

Hier kan nu uit den aard der zaak het teeken — weder niet gebruikt worden; en men vindt dan, alleen

$$x = \frac{c + \sqrt{(c^2 + 4agc)}}{2g}$$

nemende, voor de diepte des puts

$$gx^2 = \frac{c}{2g}\left\{c + 2ag + \sqrt{(c^2 + 4agc)}\right\};$$

hetwelk met de bovenstaande verklaring overeenstemt.

CLVIII. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

Van eenen gewonen regten cirkelvormigen cilinder, waarvan de as verticaal staat, is een stuk afgesneden, door een hellend vlak, dat door het middelpunt des grondvlaks gaat. Men vraagt den inhoud van dat stuk te vinden, indien deszelfs grootste hoogte, benevens de straal van den cilinder gegeven zijn?

OPGELOST *door* L. VAN DE KASTEELE, J. A. HANSEN, J. S. SPEIJER *en* F. C. RADIJS.

I. OPLOSSING *van* L. VAN DE KASTEELE.

Laat ABCD (Fig. 53) het bedoelde ligchaam zijn, waarin ABC het halve grondvlak des cilinders en CD de gegevene grootste hoogte is, dan is gegeven $AM = BM = CM = r$ en $CD = h$. Nemen wij nu op den straal MC, die regthoekig op AB staat, $MP = x$ en brengen wij door het punt P een vlak loodregt op MC, dan snijdt dit vlak het ligchaam volgens eenen regthoek EFGH, waarvan EH de bazis en PQ de hoogte is.

Uit de gelijkvormige driehoeken MPQ en MCD volgt

$$PQ : CD = MP : MC,$$

dus is $$PQ = \frac{CD \times MP}{MC} = \frac{hx}{r};$$

verder is $$EP = \sqrt{(ME^2 - MP^2)} = \sqrt{(r^2 - x^2)},$$
$$EH = 2\ EP = 2\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

en $$\textit{Inh. regth.}\ EFGH = PQ \times EH = \frac{2hx}{r} \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Vermenigvuldigen wij nu den inhoud van dezen regthoek met δx, dan verkrijgen wij, voor de differentiaal van den inhoud des ligchaams

$$\delta I = \frac{2hx\delta x}{r} \sqrt{(r^2 - x^2)};$$

schrijven wij hiervoor

$$\delta I = -\frac{h}{r} (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \delta.(r^2 - x^2),$$

dan vinden wij voor de integraal onmiddellijk

$$I = C - \tfrac{2}{3}. \frac{h}{r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Nemen wij deze integraal van $x = 0$ tot $x = r$, dan komt er ten laatste

$$\textit{Inh. ligch.}\ ABCD = \tfrac{2}{3}\ r^2h.$$

Beschrijven wij om het ligchaam een regthoekig parallelopipedum, ABIK tot grondvlak en CD tot hoogte hebbende, dan blijkt dat de inhoud van het bedoelde ligchaam, juist het derde gedeelte van dat omschrevene parallelopipedum is.

II. Oplossing van J. A. Hansen.

Laat men het halve grondvlak ABC (Fig. 54) om de middellijn AB omwentelen; dan verkrijgt men eenen bol. Brengt men vervolgens vlakken loodregt op AB, dan snijdt het oppervlak des genoemden bols, van die vlakken cirkels af, die tot elkander staan als de vierkanten van de ordinaten MC, mc, m′c′, enz. des makenden cirkels. Het oppervlak des bedoelden ligchaams snijdt van diezelfde vlakken regthoekige driehoeken MCD, mcd, m′c′d′, enz. af, die, eenen onderling gelijken scherpen hoek hebbende, gelijkvormig zijn en insgelijks tot elkander staan, als de vierkanten van de genoemde ordinaten.

Even als dus de inhoud van den bol gelijk is aan het product van de grootste loodregt op AB staande cirkelvormige doorsnede met $\frac{2}{3}$ van de lijn AB, zal ook de inhoud

van het bedoelde ligchaam gelijk zijn aan de grootste loodregt op AB staande driehoekige doorsnede met $\frac{2}{3}$ van AB vermenigvuldigd.

Deze grootste driehoekige doorsnede is de driehoek MCD, die den gegeven' straal r en de gegevene hoogte h tot regthoekszijden heeft; derhalve is

Inh. ligch. ABCD $=$ *Drieh.* MCD $\times \frac{2}{3}$AB $= \frac{1}{2}rh \times \frac{4}{3}r = \frac{2}{3}r^2h.$

Daar de inhoud van het ligchaam ook gelijk moet zijn aan deszelfs ronde oppervlak vermenigvuldigd met een derde gedeelte van den straal, zoo vinden wij, dien inhoud door $\frac{1}{3}r$ deelende,

Rond oppervl. ligch. ABCD $= \frac{2}{3}r^2h : \frac{1}{3}r = 2rh$,

waaruit blijkt, dat dit oppervlak het viervoud van de grootste der genoemde driehoekige doorsneden is; even zoo als het oppervlak des bols het viervoud is van de grootste cirkelvormige doorsnede.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. In het CLXVII. Voorstel van het V Deel der *Verzam. van Wisk. Voorst.* is, voor den inhoud van een deel een cilinders, gevonden de formule

$$I = \tfrac{1}{4}a^2(b - \tfrac{1}{2}a\,Tang.D)(\phi - Sin.\phi\,Cos.\phi) + \tfrac{1}{12}a^3\,Tang.D\,Sin.^3\phi.$$

Substitueren wij hierin: $a = 2r$, $b = h$, $Tang.\,D = \frac{h}{r}$, $\phi = 90°$, dus $Sin.\phi = 1$ en $Cos.\phi = 0$, dan gaat het daar berekende cilinderstuk in het hier bedoelde over, en wij verkrijgen voor den inhoud dadelijk

$$I = \tfrac{2}{3}r^2h.$$

CLIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert de differentialen der Goniometrische lijnen, zonder behulp der differentiaal-rekening, uit elementaire gronden te vinden?

Opgelost *door* J. Bassan, F. C. Radijs, S. Speijer *en* D. W. Hinse.

Oplossing *van* J. Bassan.

Zij ABC (Fig. 55) een cirkelkwadrant, en laat daarin *Boog* AP $= \phi$ zijn, beschrijven wij dan in de figuur op de gewone wijze de Goniometrische lijnen van dien boog, zoo wordt:

$PQ = CR = Sin.\phi$, $PR = CQ = Cos.\phi$,
$AS = Tang.\phi$, $BT = Cot.\phi$,
$CS = Sec.\phi$, $CT = Cosec.\phi$,
$AQ = Sin.\ Vers.\phi$, $BR = Cos.\ Vers.\phi$.

Zij verder $PP' = \delta\phi$, en beschrijven wij in de figuur ook nog de Goniometrische lijnen van *Boog* $AP' = \phi + \delta\phi$, dan wordt:

$P'Q' = Sin.(\phi + \delta\phi)$, $P'R' = Cos.(\phi + \delta\phi)$,
$AS' = Tang.(\phi + \delta\phi)$, $BT' = Cot.(\phi + \delta\phi)$,
$CS' = Sec.(\phi + \delta\phi)$, $CT' = Cosec.(\phi + \delta\phi)$,
$AQ' = Sin.\ Vers.(\phi + \delta\phi)$, $BR' = Cos.\ Vers.(\phi + \delta\phi)$.

Indien wij nu de Goniometrische lijnen, tot den boog AP behoorende, aftrekken van de gelijknamige lijnen, die tot den boog AP′ behooren, zijn de overblijvende verschillen, de differentialen dier Goniometrische lijnen. Beschrijven wij dus, om de verschillen der secanten en cosecanten in de figuur aanschouwelijk te maken, uit C met CS en CT als stralen de boogjes SS″ en TT″, en nemen wij den positieven of negatieven toestand der genoemde verschillen behoorlijk in acht, dan is:

$P'U = \delta.Sin.\phi$, $PU = -\delta.Cos.\phi$,
$SS' = \delta.Tang.\phi$, $TT' = -\delta.Cot.\phi$,
$S'S'' = \delta.Sec.\phi$, $T'T'' = -\delta.Cosec.\phi$,
$QQ' = \delta.Sin.\ Vers.\phi$, $RR' = -\delta.Cos.\ Vers.\phi$.

Daar de boog PP′ en dus ook de hoek PCP′ oneindig klein is, kunnen wij de boogjes PP′, SS″ en TT″ als regte lijntjes beschouwen, en de gelijkbeenige driehoeken CPP′, CSS″, CTT″ aanmerken, als hoeken aan de bazes te hebben, die ieder in het bijzonder regt zijn. Vooreerst zijn dan de driehoeken CPQ en P′UP gelijkvormig, omdat de zijden van den eenen loodregt op die van den anderen staan; hieruit volgen de evenredigheden

$P'U : CQ = PP' : CP$ en $PU : PQ = PP' : CP$,

dat is, zoo wij den straal $CP = 1$ stellen,

$\delta.Sin.\phi : Cos.\phi = \delta\phi : 1$ en $-\delta.Cos.\phi : Sin.\phi = \delta\phi : 1$;

hieruit wordt onmiddellijk gevonden

$$\delta.Sin.\phi = Cos.\phi\ \delta\phi \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

en

$$\delta.Cos.\phi = -Sin.\phi\ \delta\phi \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

voorts is klaarblijkelijk

$$QQ' = PU \quad \text{en} \quad RR' = P'U,$$

dat is $\delta.Sin.Vers.\phi = -\delta.Cos.\phi$ en $-\delta.Cos.Vers.\phi = \delta.Sin.\phi$; hierin voor $\delta.Cos.\phi$ en $\delta.Sin.\phi$ de waarden (2) en (1) substitueerende, komt er

$$\delta.Sin.\ Vers.\phi = Sin.\phi\ \delta\phi \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

en

$$\delta.Cos.\ Vers.\phi = -\ Cos.\phi\ \delta\phi \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Vervolgens zijn ook de driehoeken CAS en SS″S′ gelijkvormig, omdat zij in A en S″ regthoekig zijn en, wegens het regt zijn van den hoek CSS″, S′SS″ het complement van CSA is; hieruit volgen nu de evenredigheden

$$SS' : CS = SS'' : CA \text{ en } S'S'' : AS = SS'' : CA,$$

dat is $\delta.Tang.\phi : Sec.\phi = SS'' : 1$ en $\delta.Sec.\phi : Tang.\phi = SS'' : 1$; voor den boog SS″ die hierin voorkomt, wordt uit de gelijkvormigheid der cirkelsectoren CPP′ en CSS″ gevonden

$$SS'' : PP' = CS : CP \quad \text{en} \quad SS'' = \frac{CS \times PP'}{CP} = Sec.\phi\ \delta\phi,$$

daardoor gaan deze evenredigheden over in

$\delta.Tang.\phi : Sec.\phi = Sec.\phi\delta\phi : 1$ en $\delta.Sec.\phi : Tang.\phi = Sec.\phi\delta\phi : 1$,

waaruit nu weder terstond gevonden wordt

$$\delta.Tang.\phi = Sec.^2\phi\ \delta\phi = \frac{\delta\phi}{Cos.^2\phi} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

en

$$\delta.Sec.\phi = Tang.\phi\ Sec.\phi\ \delta\phi = \frac{Sin.\phi\delta\phi}{Cos.^2\phi} \quad \ldots \quad (6).$$

Ook zijn nog de driehoeken CBT en TT″T′ gelijkvormig, omdat zij in B en T″ regthoekig zijn en, wegens het regt zijn van den hoek CTT″, T′TT″ het complement van CTB is; hieruit hebben wij de evenredigheden

$$TT' : CT = TT'' : CB \quad \text{en} \quad T'T'' : BT = TT'' : CB,$$

dat is:

$-\delta.Cot.\phi : Cosec.\phi = TT'' : 1$ en $-\delta Cosec.\phi : Cot.\phi = TT'' : 1$;

voorts is, gelijkerwijze als boven,

$$TT'' : PP' = CT : CP \text{ en } TT'' = \frac{CT \times PP'}{CP} = Cosec.\phi\delta\phi,$$

daardoor veranderen de laatste evenredigheden in

$-\delta.Cot.\phi : Cosec.\phi = Cosec.\phi\delta\phi : 1$ en $-\delta.Cosec.\phi : Cot.\phi = Cosec.\phi\delta\phi : 1$;

waaruit weder dadelijk volgt

$$\delta.Cot.\phi = -\ Cosec.^2\phi\delta\phi = -\frac{\delta\phi}{Sin.^2\phi} \quad \ldots \quad (7),$$

en $\delta.Cosec.\phi = -Cot.\phi Cosec.\phi\delta\phi = -\frac{Cos.\phi\delta\phi}{Sin.^2\phi}$. (8).

Laat eindelijk (Fig. 56) de koorden AP en AP′ getrokken worden en beschrijven wij uit A, met AP als straal, een cirkelboogje PV, dan kan PVP′ als een regthoekig driehoekje beschouwd worden, regthoekig in V, en waarvan de hoek VP′P, als met deszelfs hoekpunt aan den omtrek des cirkels op den boog AP staande, door de helft van den boog AP gemeten wordt. Deelen wij nu den boog AP in M midden door, trekken wij CM en laten wij uit M de loodlijn MN op CA vallen, dan is ook MNC een regthoekige driehoek, waarvan de scherpe hoek MCN door de helft van den boog AP gemeten wordt. De driehoeken MNC en PVP′ zijn dus gelijkvormig, alzoo is

$$P'V : CN = PP' : MC;$$

maar nu is $P'V = \delta.Koorde\ \phi$ en $CN = Cos.\frac{1}{2}\phi$, dus hebben wij

$$\delta.Koorde\ \phi : Cos.\tfrac{1}{2}\phi = \delta\phi : 1,$$

waaruit ten laatste volgt

$$\delta.Koorde\ \phi = Cos.\tfrac{1}{2}\phi\delta\phi \quad . \ . \ (9).$$

CLX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer men alle mogelijke regthoekige driehoeken, waarvan de schuinsche zijden even groot zijn, met de regthoekszijden op elkander legt, welke is dan de kromme lijn, die door de schuinsche zijden van al deze driehoeken wordt aangeraakt?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat SR en ST (Fig. 57) de onderling regthoekige lijnen zijn, waarop de regthoekszijden van al de bedoelde driehoeken geplaatst worden; indien dan ASB en A′S′B′ twee van die driehoeken voorstellen, zullen de lijnen AB en A′B′ even groot en raaklijnen aan de begeerde kromme moeten zijn. Door nu op dezelfde wijze te redeneren, als in de oplossing van het CXXXIX. Voorstel, wordt het duidelijk, dat, als men AA′ oneindig klein stelt en voor de differentiaal van SA aanneemt, het snijpunt P der achtervol-

gende raaklijnen AB en A'B' een punt der kromme zal wezen.

Nemen wij SR en ST als onderling regthoekige coördinaten-assen aan, en stellen wij dus, na PM loodregt op SR getrokken te hebben, SM $= x$ en PM $= y$; zij voorts AB $= a$ en SA $= z$, dus AM $= z - x$ en BS $= \sqrt{(a^2 - z^2)}$, dan gaat de evenredigheid

$$AM : AS = PM : BS,$$

uit de gelijkvormigheid der driehoeken AMP en ASB afgeleid, over in

$$z - x : z = y : \sqrt{(a^2 - z^2)},$$

en wij hebben alzoo de vergelijking

$$zy = (z - x)\sqrt{(a^2 - z^2)},$$

of

$$\frac{y^2 z^2}{(z-x)^2} + z^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Gaat nu SA in SA', dat is z in $z + \delta z$ over, dan blijven x en y zoowel als a onveranderd en wij mogen dus de vergelijking (1) differentiëren, alsof z de eenige daarin voorkomende veranderlijke grootheid is; deze differentiatie verrigtende, verkrijgen wij

$$\frac{2(z-x)^2 y^2 z\delta z - 2y^2 z^2 (z-x)\delta z}{(z-x)^4} + 2z\delta z = 0,$$

en na herleiding $\quad (z-x)y^2 - y^2 z + (z-x)^3 = 0$

of

$$(z-x)^3 = xy^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Om nu de vergelijking der gevraagde kromme lijn te bekomen, hebben wij slechts z tusschen (1) en (2) te elimineren. Gemakshalve schrijven wij daartoe die vergelijkingen eerst onder de gedaanten

$$z^2\left(\frac{y^2}{(z-x)^2} + 1\right) = a^2 \quad \text{en} \quad \frac{y^2}{(z-x)^2} = \frac{z-x}{x},$$

verbinden dezelve daarna tot de nieuwe vergelijking

$$z^2\left(\frac{z-x}{x} + 1\right) = a^2,$$

vereenvoudigen deze laatste tot

$$\frac{z^3}{x} = a^2,$$

trekken hieruit

$$z = \sqrt[3]{a^2 x}$$

en brengen deze waarde voor x in (2) over; dan verkrijgen wij de vergelijking

$$(\sqrt[3]{a^2x}-x)^3 = xy^2,$$

die door achtervolgende herleiding overgaat in

$$\sqrt[3]{a^2x}-x = \sqrt[3]{xy^2},$$

$$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2}$$

of $$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \quad . \ . \ . \ . \ : (3).$$

Deze laatste vergelijking is nu die van de begeerde kromme; blijkens dezelve heeft de positieve of negatieve toestand van eene der coördinaten x of y geen invloed op de waarden, die de andere coördinaat verkrijgt; bijgevolg verdeelen de assen deze kromme lijn in vier gelijke en gelijkvormige deelen. De kromme lijn wordt volgens de opgave geteekend, door in den regten hoek TSR (Fig. 58) een genoegzaam aantal lijnen AB te construeren, die alle eene zelfde lengte hebben, en daarna uit de hand eene rakende kromme aan al die lijnen te trekken. Construeert men deze lijnen op dezelfde wijze in elk der vier regte hoeken, door de snijding der lijnen SR en ST gevormd, dan zal men al de vier genoemde deelen der kromme verkrijgen.

Beschrijven wij met eenen straal SC $=$ a (Fig. 59) eenen cirkel, die in C inwendig geraakt wordt door eenen anderen cirkel, OC $= \frac{1}{4}a$ tot straal hebbende; indien dan de kleine cirkel over den omtrek des grooten cirkels rolt, is de kromme lijn, die het punt C van den kleinen cirkel beschrijft, eene *hypocycloide*, waarvan wij thans de vergelijking zullen opmaken.

Laat de kleine cirkel over den boog CND van den grooten cirkel gerold hebben en dien ten gevolge de straal OC in den stand O′C′ gekomen zijn, dan is C′ een punt der hypocycloide en de achtervolgende punten van den boog C′N′D des kleinen cirkels hebben dan de achtervolgende punten van den boog CND des grooten cirkels geraakt. De boogen CND en C′N′D zijn dus even lang, maar de straal O′C′ $=$ O′D is gelijk aan het vierde gedeelte van den straal SC $=$ SD genomen, derhalve is omgekeerd *hoek* C′O′D (*uitwendig gemeten*) $=$ 4. *hoek* CSD.

Stellen wij nu SC′ $= z$, *hoek* CSC′ $= \phi$, *hoek* CSD $= \psi$, dan is: *hoek* C′O′D (*inwendig gemeten*) $= 360° - 4\psi$,

hoek O′SC′ $= \phi - \psi$, *hoek* O′C′S $=$ *hoek* C′O′D $-$ *hoek* O′SC′ $= 360° - (3\psi + \phi)$; voorts is SD $=$ SC $= a$, O′D $=$ O′C′ $= \frac{1}{4}a$ en O′S $= \frac{3}{4}a$; de aaneengeschakelde evenredigheid

$$SC' : O'C' : O'S = Sin.\ SO'C' : Sin.\ O'SC' : Sin.\ O'C'S$$

uit den driehoek SO′C′ getrokken, gaat dan over in

$$x : \tfrac{1}{4}a : \tfrac{3}{4}a = Sin.4\psi : Sin.(\psi - \phi) : Sin.(3\psi + \phi).$$

Uit dezelve kunnen wij onmiddellijk afleiden

$$Sin.(3\psi + \phi) = 3Sin.(\psi - \phi) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en $x : a = Sin.4\psi : Sin.(3\psi + \phi) + Sin.(\psi - \phi)$;

voor deze evenredigheid kan, omdat $Sin.4\psi = 2Sin.2\psi Cos.2\psi$ en $Sin.3(\psi + \phi) + Sin.(\psi - \phi) = 2Sin.2\psi\ Cos.(\psi + \phi)$ is, ook geschreven worden

$$x : a = Cos2\psi : Cos.(\psi + \phi) \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

wij hebben dus slechts ψ tusschen (4) en (5) te elimineren, om de polaire vergelijking der hypocycloide te bekomen.

Door ontwikkeling en herleiding van (4) vinden wij achtervolgens:

$$Sin.3\psi Cos.\phi + Cos.3\psi Sin.\phi = 3Sin.\psi Cos.\phi - 3Cos.\psi Sin.\phi,$$

$$Sin.3\psi + Cos.3\psi Tang.\phi = 3Sin.\psi - 3Cos.\psi Tang.\phi,$$

$$Tang.\phi = \frac{3Sin.\psi - Sin.3\psi}{Cos.3\psi + 3Cos.\psi},$$

of, omdat in het algemeen $3Sin.\psi - Sin.3\psi = 4Sin.^3\psi$ en $Cos.3\psi + 3Cos.\psi = 4Cos.^3\psi$ is, (Zie J. R. SCHMIDT, *Diff. Int. Rek.* §. 60 en 61.)

$$Tang.\phi = Tang.^3\psi$$

en

$$Tang.\psi = \sqrt[3]{Tang.\phi}.$$

Door ontwikkeling en herleiding van (5), verkrijgen wij verder

$$\frac{x}{a} = \frac{Cos.^2\psi - Sin.^2\psi}{Cos.\psi Cos.\phi - Sin.\psi Sin.\phi} = \frac{Cos.^2\psi(1 - Tang.^2\psi)}{Cos.\psi Cos.\phi(1 - Tang.\psi Tang.\phi)};$$

of

$$\frac{xCos.\phi}{a} = \frac{Cos.\psi(1 - Tang.^2\psi)}{1 - Tang\,\psi Tang.\phi};$$

substitueren wij nu, in den noemer van het tweede lid, voor $Tang.\phi$ de bovengevondene waarde $Tang.^3\psi$, dan komt er

$$\frac{xCos.\phi}{a} = \frac{Cos.\psi(1 - Tang.^2\psi)}{1 - Tang.^4\psi} = \frac{Cos.\psi}{1 + Tang.^2\psi}$$

$$= \frac{1}{(1 + Tang.^2\psi)Sec.\psi} = \frac{1}{(1 + Tang.^2\psi)\sqrt{(1 + Tang.^2\psi)}},$$

dus is $$z^2 Cos.^2\phi = \frac{a^2}{(1+Tang.^2\psi)^3},$$
en zoo wij hierin voor $Tang.\psi$ weder de bovenverkregene waarde $\sqrt[3]{Tang.\phi}$ overbrengen, verkrijgen wij, voor de polaire vergelijking der hypocycloide,

$$z^2 Cos.^2\phi = \frac{a^2}{(1+\sqrt[3]{Tang.^2\phi})^3} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Om uit deze polaire vergelijking, die op onderling regthoekige coördinaten te vinden, behoeven wij slechts in (6) de bekende substitutiën $zCos.\phi = x$ en $Tang.\phi = \frac{y}{x}$ te doen; hierdoor wordt dan die vergelijking

$$x^2 = \frac{a^2}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^3},$$

of na behoorlijke herleiding

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2};$$

en daar deze vergelijking nu dezelfde is als de vroeger gevondene (3), zoo ziet men dat de begeerde kromme lijn eene hypocycloide is; en wel zulk eene hypocycloide, als beschreven wordt door eenig punt van den omtrek eens cirkels, die inwendig over den omtrek van eenen anderen cirkel rolt, welks straal viermalen zoo groot is, als die des bewegenden cirkels.

CLXI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert twee met de eenheid beginnende reeksen, van op elkander volgende veelhoekige getallen te vinden, die de eigenschap hebben, dat de verschillen der overeenkomstige termen, met de eenheid vermeerderd, alle vierkanten opleveren?

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. A. Hansen, H. Kloos, G. Koster, B. Lubbers, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. C. Olivier *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Laat de beide begeerde reeksen die der p-hoekige en q-hoekige getallen zijn, dan is de algemeene of n^{de} term van de eerste reeks

$$\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}$$

en van de tweede reeks

$$\frac{(q-2)n^2-(q-4)n}{2};$$

volgens het voorstel moet dus, voor alle waarden van n, de uitdrukking

$$\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}-\frac{(q-2)n^2-(q-4)n}{2}+1$$

een volkomen vierkant zijn.

Voor deze uitdrukking kan men schrijven

$$\frac{n^2-n}{2}(p-q)+1$$

of, zoo men $p-q=r$ stelt,

$$\frac{n^2-n}{2}\times r+1;$$

wij hebben dus voor r zoodanig getal te vinden, dat de laatste vorm, onafhankelijk van eenige bijzondere aan n te gevene waarde, een vierkant wordt. Het is duidelijk, dat hiertoe r van den vorm $2s^2$ moet zijn, waardoor

$$\frac{n^2-n}{2}\times r+1=n^2s^2-ns^2+1$$

wordt. Zal deze laatste uitdrukking, voor alle waarden van n, een vierkant wezen, dan moet de middelste term het dubbele product zijn van de vierkantswortels uit de eerste en laatste termen, dat is, men moet hebben

$$ns^2=2.ns\times 1=2ns.$$

Hieruit volgt nu dadelijk

$$s=2 \quad \text{en} \quad r=2s^2=8,$$

zoodat dan ook $p-q=8$ of $p=q+8$ zal moeten wezen.

Aan het voorstel zal alzoo voldaan worden, met de reeksen der *drie-* en *elf*-hoekige, der *vier-* en *twaalf*-hoekige, der *vijf-* en *dertien*-hoekige getallen enz. te nemen. Stellen wij bij voorbeeld $p=11$ en $q=3$, dan is

de eerste reeks:	1,	11,	30,	58,	95,	141,	*enz.*
en de tweede reeks:	1,	3,	6,	10,	15,	21.	*enz.*
de verschillen zijn	0,	8,	24,	48,	80,	120,	*enz.*

en deze verschillen, elk met de eenheid vermeerderd, leveren de vierkanten der onevene getallen op.

Aanmerkingen. 1°. Zoo men in de uitdrukking $\frac{n^2-n}{2}\times r+1$, $r=8$ stelt, wordt zij $4n^2-4n+1=(2n-1)^2$. Hieruit volgt dus, dat, het zij men de reeksen der *drie-* en *elf-*hoekige, der *vier-* en *twaalf-*hoekige, der *vijf-* en *dertien-*hoekige getallen, *enz.* neemt, de in het voorstel genoemde vierkanten altijd de tweede magten der onevene getallen zullen zijn.

2°. Daar $\frac{n^2-n}{2}$ een driehoekig getal voorstelt, en 8 de eenige waarde voor r is, die, voor alle waarden van n, $\frac{n^2-n}{2}\times r+1$ tot een vierkant maakt, zoo volgt hieruit, dat van elk *willekeurig* driehoekig getal *alleen het achtvoud* plus de eenheid een vierkant kan zijn.

CLXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Gegeven zijnde de vergelijking

$n(x^{2m-1}+x^{2m-2}+x^{2m-3}+enz.\ldots+x^2)+x^2=x^{2m}$,

waarin m een geheel getal voorstelt, begeert men de waarden van x te vinden, die, onafhankelijk van m, aan deze vergelijking voldoen?

Opgelost *door* L. J. Ulman, B. Lubbers, J. S. Speijer, D. W. Hinse, J. A. Hansen, F. C. Radijs, H. Kloos, G. Koster, J. C. Olivier *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

De som der tusschen haakjes gestelde reeks is klaarblijkelijk $\frac{x^{2m}-x^2}{x-1}$, zoodat wij voor de opgegevene vergelijking kunnen schrijven

$$\frac{n(x^{2m}-x^2)}{x-1}=x^{2m}-x^2,$$

of

$$(x^{2m}-x^2)\left(1-\frac{n}{x-1}\right)=0;$$

dat is, na vermenigvuldiging met $x-1$,

$$(x-1-n)x^2(x^{2m-2}-1)=0.$$

De waarden van x worden derhalve gevonden:

1°. door te stellen $x-1-n=0$, waaruit volgt $x=n+1$;

2°. door te stellen $x^2=0$, waaruit volgt $x=0$;

3°. door te stellen $x^{2m-2} - 1 = 0$, waaruit volgt $x^{2m-2} = 1$; daar m een geheel getal beteekent, is $2m - 2$ een even exponent en dus wordt aan de vergelijking $x^{2m-2} = 1$ voldaan door $x = \pm 1$. Maar de waarde $x = +1$, hoezeer aan de afgeleide vergelijking voldoende, voldoet niet aan de oorspronkelijke vergelijking, en is, door de plaats gehad hebbende vermenigvuldiging met $x - 1$, in de vergelijking ingevoerd geworden; wij bepalen ons dus tot de waarde $x = -1$. De overige waarden voor x die uit $x^{2m-2} = 1$ kunnen afgeleid worden, zijn de onbestaanbare $(2m - 2)^{de}$ magtswortels uit de eenheid, en deze kunnen, als afhankelijk van m zijnde, volgens de voorwaarden des voorstels, niet in aanmerking komen.

Aan die voorwaarden voldoen dus geene andere waarden voor x, dan $x = n + 1$, $x = 0$ en $x = -1$.

CLXIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Eene zekere schuld wordt, met den intrest van b (5) *ten honderd 's jaars, in vier jaren afgelost, zoodanig, dat ieder jaar a* (630) *gulden aan kapitaal en intrest betaald wordt. Men vraagt hoe groot die schuld was?*

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., D. W. Hinse, H. Kloos, G. Koster, F. C. Radijs, J. Sjoenis, J. S. Speijer, J. A. Hansen *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stel dat onder de jaarlijksche betalingen van a gulden, achtervolgens begrepen zijn p, q, r en s gulden aan kapitaal, en bij gevolg $a - p$, $a - q$, $a - r$, $a - s$ gulden aan intrest, dan is, zoo wij stellen, dat de geheele schuld x gulden zij,

$$x = p + q + r + s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

De intrest loopt, gedurende het eerste jaar, tegen b ten honderd over de geheele schuld $p + q + r + s$, en bedraagt dus voor dat jaar $\frac{(p+q+r+s)b}{100}$ gulden.

Na het einde van het eerste jaar wordt er p gulden op het kapitaal betaald, dus loopt de intrest gedurende het

tweede jaar slechts over $q + r + s$ gulden en bedraagt b: gevolg $\frac{(q+r+s)b}{100}$ gulden.

Even zoo blijkt, dat de intrest over het derde jaar $\frac{(r+s)b}{100}$ en over het vierde jaar $\frac{sb}{100}$ gulden bedraagt. Wij hebben alzoo nog de vergelijkingen

$$\frac{(p+q+r+s)b}{100} = a - p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

$$\frac{(q+r+s)b}{100} = a - q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

$$\frac{(r+s)b}{100} = a - r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

$$\frac{sb}{100} = a - s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Uit (5) volgt terstond $s = \frac{100}{100+b}a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6);$

door (5) van (4) af te trekken, komt er

$$\frac{rb}{100} = s - r, \text{ waaruit volgt } r = \frac{100}{100+b}s,$$

en dus door substitutie der waarde (6)

$$r = \left(\frac{100}{100+b}\right)^2 a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7);$$

door (4) van (3) af te trekken, vindt men even zoo

$$\frac{qb}{100} = r - q, \quad q = \frac{100}{100+b}r,$$

en door substitutie der waarde (7)

$$q = \left(\frac{100}{100+b}\right)^3 a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8);$$

door eindelijk (3) van (2) af te trekken, komt er

$$\frac{pb}{100} = q - p, \quad p = \frac{100}{100+b}q,$$

en dus door (8)

$$p = \left(\frac{100}{100+b}\right)^4 a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Volgens (1) is derhalve

$$x = \left\{\left(\frac{100}{100+b}\right)^4 + \left(\frac{100}{100+b}\right)^3 + \left(\frac{100}{100+b}\right) + \left(\frac{100}{100+b}\right)\right\} a.$$

Stellen wij in de gevondene formulen $a = 630$ en $b = 5$, dan vinden wij:

$p = 518\frac{934}{3078}$, $q = 544\frac{32}{147}$, $r = 571\frac{3}{7}$, $s = 600$ en $x = 2233\frac{2929}{3087}$.

De schuld bedroeg dus $2233\frac{2929}{3087}$ gulden, of nagenoeg *f*2233,95.

Aanmerking. Indien de betaling op de voorschrevene wijze in n jaren geschiedde, zou men, kortheidshalve $\frac{100}{100 + b} = m$ stellende, klaarblijkelijk gevonden hebben

$$x = (m^n + m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + m^2 + m)a$$

of $x = (m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots + m + 1)am$;

en voor deze waarde van x kunnen wij, daar de veelledige factor, die er in voorkomt, het quotient der deeling van $1 - m^n$ door $1 - m$ is, ook schrijven

$$x = \frac{1 - m^n}{1 - m} am.$$

Door hierin $a = 630$, $n = 4$, $m = \frac{100}{100 + b} = \frac{100}{105} = \frac{20}{21}$ en $1 - m = \frac{1}{21}$ te substitueren, vinden wij

$$x = \frac{1 - \left(\frac{20}{21}\right)^4}{\frac{1}{21}} \times 630 \times \frac{20}{21} = \frac{21^4 - 20^4}{21^3} \times 600 = 2233\frac{2929}{3087}$$

even als boven.

CLXIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van eene rekenkunstige reeks is de tweede term een volkomen vierkant getal; en wanneer men den vierden term met 2 vermeerdert en deze som door den wortel des tweeden terms deelt, komt er tot quotient een getal, dat twee meer dan deze wortel is. Welke reeks kan dit zijn?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. A. Hansen, D. W. Hinse, H. Kloos, G. Koster, H. Middelburg, E. Olivier, Dz., J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. Sjoenis, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos Jr.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Stellen wij voor de termen der reeks

$x^2 - v$, x^2, $x^2 + v$, $x^2 + 2v$, $x^2 + 3v$ enz.

dan is aan de eerste voorwaarde voldaan. Volgens de tweede voorwaarde moeten wij verder hebben

$$\frac{x^2+2v+2}{x} = x + 2,$$

waaruit volgt $\quad x^2 + 2v + 2 = x^2 + 2x,$

$$2v + 2 = 2x,$$

$$v + 1 = x$$

of $\quad v = x - 1;$

door deze waarde voor x in de gestelde reeks over te brengen, gaat zij over in

$x^2-(x-1), x^2, x^2+(x-1), x^2+2(x-1), x^2+3(x-1)$, *enz.*

waarin men nu voor x eene willekeurige waarde kan nemen; met uitsluiting echter van $x = 1$, indien men eene wezenlijke reeks, die uit verschillende termen bestaat, verlangt.

Door $x = v + 1$ in de gestelde reeks over te brengen, kan men dezelve ook nog in den vorm

$v^2+v+1, v^2+2v+1, v^2+3v+1, v^2+4v+1, v^2+5v+1$, *enz*

verkrijgen, waarin alweder voor v een willekeurig getal kan genomen worden. Voor $v = 1$ of $x = 2$, wordt de verlangde reeks

3, 4, 5, 6, 7, *enz.*

CLXV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Uit de vergelijkingen

$$(Sin.a + Cos.a)\ (xSin.b + yCos.b) = Sin.2a + 1$$

en $\quad xTang.b = yTang.a,$

de waarden van x en y te vinden?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., D. W. Hinse, H. Kloos, H. Middelburg, J. Sjoenis, J. S. Speijer, J. A. Hansen, J. Teixeira de Mattos, Jr., G. Koster, E. Olivier, Dz., F. C. Radijs *en* J. C. Olivier.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Schrijven wij, in het tweede lid der eerste vergelijking, $2Sin.a\ Cos.a$ in plaats van $Sin.2a$, en $Sin.^2a + Cos.^2a$ in plaats van 1, dan wordt die vergelijking

$$(Sin.a + Cos.a)\ (xSin.b + yCos.b)$$
$$= Sin.^2a + 2Sin.a\ Cos.a + Cos.^2a,$$

of, hare beide leden door $Sin.a + Cos.a$ deelende,

$$x Sin.b + y Cos.b = Sin.a + Cos.a \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Schrijven wij, in de tweede vergelijking, $\frac{Sin.a}{Cos.a}$ en $\frac{Sin.b}{Cos.b}$ in plaats van $Tang.a$ en $Tang.b$, dan wordt zij

$$x \frac{Sin.b}{Cos.b} = y \frac{Sin.a}{Cos.a},$$

waaruit volgt $$x = \frac{Sin.a \; Cos.b}{Cos.a \; Sin.b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Deze waarde voor x in de vergelijking (α) substituerende, komt er

$$\left\{\frac{Sin.a \; Cos.b}{Cos.a} + Cos.b\right\} y = Sin.a + Cos.a$$

of $$\frac{Cos.b}{Cos.a}(Sin.a + Cos.a)\, y = Sin.a + Cos.a,$$

waaruit volgt $$\frac{Cos.b}{Cos.a}\, y = 1$$

en $$y = \frac{Cos.a}{Cos.b};$$

terwijl, door deze waarde voor y in (β) over te brengen, onmiddellijk gevonden wordt

$$x = \frac{Sin.a}{Sin.b}.$$

Alzoo zijn $x = \frac{Sin.a}{Sin.b}$ en $y = \frac{Cos.a}{Cos.b}$ de begeerde waarden van x en y.

CLXVI. Voorstel.

Door P. Krom.

Een vader gevraagd zijnde naar zijnen ouderdom, antwoordde: vermenigvuldig de jaren mijner dochter met die mijns zoons, zoo bekomt gij tot product mijnen halven ouderdom; en zoo gij de jaren van ieder mijner beide kinderen vermenigvuldigt met den ouderdom, die zij over een jaar zullen hebben, zal de som dezer producten 42 zijn. Indien de vader en zijne kinderen nu te zamen 38 jaren telden, hoe oud was dan ieder?

Opgelost *door* P. Krom, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, H. Middelburg, E. Olivier, Dz., F. C. Ra-

V 2

DIJS, J. SJOENIS, J. S. SPEIJER, H. KLOOS, J. C. OLIVIER en J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* P. KROM.

Stellen wij dat de dochter x en de zoon y jaren oud is, dan wordt, volgens de eerst opgegevene voorwaarde, de ouderdom des vaders door $2xy$ uitgedrukt, en de verder opgegevene voorwaarden geven dan aanleiding tot de vergelijkingen

$$x(x+1)+y(y+1)=42 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$x+y+2xy=38 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nemen wij de som dezer vergelijkingen, dan bekomen wij

$$(x+y)^2+2(x+y)=80$$

of

$$(x+y)^2+2(x+y)+1=81,$$

waaruit volgt

$$x+y+1=\pm 9;$$

daar het benedenste teeken nemende $x+y=-10$ zijn zou, hetgeen met de bedoeling der vraag niet kan overeenkomen, is alleen het bovenste teeken bruikbaar, waardoor wij verkrijgen

$$x+y=8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

en deze waarde voor $x+y$ in (2) substituerende, vinden wij onmiddellijk, voor den ouderdom des vaders,

$$2xy=30.$$

Nemen wij het verschil der vergelijkingen (1) en (2), dan hebben wij

$$(x-y)^2=4,$$

waaruit volgt

$$x-y=\pm 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

zoodat nu, uit het verband van (3) en (4), gevonden wordt

$$x=5 \quad \text{en} \quad y=3 \quad \text{of} \quad x=3 \quad \text{en} \quad y=5.$$

De vader was alzoo 30 en zijne kinderen waren 5 en 3 jaren oud; zijnde het onverschillig of men wil aannemen, dat de dochter 5 en de zoon 3, dan wel dat de zoon 5 en de dochter 3 jaren is.

CLXVII. VOORSTEL.

Door P. KROM.

Zeker getal gedeeld wordende door* 12 *geeft tot quotient een driehoekig- en door* 18 *een pronik-getal. De wortels van dit driehoekig- en pronik-getal bedragen te zamen* 14. *Welk is het eerstgenoemde getal?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, P. KROM, F. C. RADIJS,

J. Sjoenis, J. Teixeira de Mattos, Jr., H. Middelburg, E. Olivier, Dz. en J. C. Olivier.

Oplossing van J. S. Speijer.

Laat x het gevraagde getal zijn, dan is, indien men den wortel van het driehoekig getal door m en dien van het pronik-getal door n voorstelt,

$$\frac{x}{12} = \frac{m^2+m}{2} \quad \text{en} \quad \frac{x}{18} = n^2 + n;$$

derhalve is

$$x = 6(m^2 + m) = 18(n^2 + n),$$

waaruit volgt

$$m^2 + m = 3n^2 + 3n.$$

Volgens de laatste voorwaarde heeft men ook $m + n = 14$ of $m = 14 - n$; hierdoor gaat onze voorgaande vergelijking over in

$$210 - 29n + n^2 = 3n^2 + 3n;$$

of, door overbrenging van termen en na deeling door 2, in

$$n^2 + 16n - 105 = 0,$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$n = 5 \quad \text{of} \quad n = -21,$$

met welke waarden voor n, volgens de vergelijking $m = 14 - n$, overeenstemmen

$$m = 9 \quad \text{en} \quad m = 35.$$

Nemen wij nu alleen positieve wortels in aanmerking, dan is alleenlijk, voor $n = 5$ en $m = 9$,

$$x = 6(m^2 + m) = 18(n^2 + n) = 540;$$

willen wij echter een pronikgetal met eenen negatieven wortel toelaten, dan hebben wij ook nog, voor $n = -21$ en $m = 35$

$$x = 6(m^2 + m) = 18(n^2 + n) = 7560.$$

Het begeerde getal is dus 540 of 7560, maar het laatstgenoemde antwoord nemende, moet men aan het pronikgetal, dat na deeling door 18 ontstaat, eenen negatieven wortel toekennen.

CLXVIII. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Een' gelijkzijdigen driehoek te beschrijven, waarvan de inhoud gelijk is aan dien van een' willekeurig gegeven driehoek?

Opgelost *door* J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. Sjoenis, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laat ABC (Fig. 60) de willekeurig gegeven driehoek zijn; beschrijf op eene van de beide grootste zijden dezes driehoeks, bij voorbeeld op AB, eenen gelijkzijdigen driehoek ABD en op eene opstaande zijde van den laatstgenoemden driehoek, bij voorbeeld op BD, als middellijn eenen halven cirkel; trek door C eene lijn evenwijdig aan AB, snijdende BD in E; rigt op BD uit E eene loodlijn op, snijdende den cirkel omtrek in F; trek BF en beschrijf daarop eenen gelijkzijdigen driehoek BFG, dan zal dit de begeerde zijn.

Want, volgens de eigenschappen der gelijkvormige figuren, is

$$\textit{Inh. drieh. } BFG : \textit{Inh. drieh. } ABD = BF^2 : BD^2;$$

volgens de eigenschappen van den cirkel is

$$BF^2 : BD^2 = BE : BD;$$

en, daar de driehoeken BEA en ABD, wanneer men BE en BD als hunne bazes beschouwt, gelijke hoogten hebben, is ook

$$BE : BD = \textit{Inh. Drieh. } BEA : \textit{Inh. Drieh. } ABD,$$

zoodat het verband der drie opgegevene evenredigheden geeft:

$$\textit{Inh.Drieh.}BFG : \textit{Inh.Drieh.}ABD = \textit{Inh.Drieh.}BEA : \textit{Inh.Drieh.}ABD,$$

waaruit volgt

$$\textit{Inh. Drieh. } BFG = \textit{Inh. Drieh. } BEA.$$

Maar de driehoeken BEA en ABC, op dezelfde bazis AB, en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen AB en CE geplaatst zijnde, hebben gelijken inhoud, dus is ook

$$\textit{Inh. Drieh. } BFG = \textit{Inh. Drieh. } ABC.$$

Aanmerking. In plaats van eenen gelijkzijdigen, kan men ook op dezelfde wijze eenen driehoek van gegevenen gedaante beschrijven, waarvan de inhoud gelijk is aan den willekeurig gegeven' driehoek ABC. Daartoe behoeft men de driehoeken ABD en BFG slechts de verlangd wordende gedaante te geven, zorgende, dat BF gelijkstandig is met BD.

CLXIX. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Wanneer men in eenen regelmatigen vijfhoek alle mogelijke diagonalen trekt, ontstaat er, door de onderlinge

snijding dezer diagonalen, weder een regelmatige vijfhoek; gaat men met dezen laatsten op gelijke wijze te werk, zoo ontstaat er weder een vijfhoek, en zoo tot in het oneindige. Nu verlangt men de som der omtrekken van al die vijfhoeken te vinden?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr., H. Kloos *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABCDE een vijfhoek zijn (Fig. 61), waarin door het trekken der diagonalen een tweede vijfhoek FGHIK is gevormd, dan deelen deze diagonalen elk der polygoonshoeken in drie gelijke deelen, die ieder van 36° zijn.

Elke driehoek, die twee der diagonalen en eene zijde des vijfhoeks tot zijden heeft, zoo als bij voorbeeld de driehoek ABD, is dus een gelijkbeenige driehoek, welks hoeken aan de bazis ieder in het bijzonder het dubbel van den tophoek zijn. Het is eene bekende eigenschap van zulk eenen driehoek, dat eene lijn BK, die den hoek aan de bazis ABD midden door deelt, de opstaande zijde AD, over dien hoek, in de uiterste en middelste reden verdeelt; en dat het grootste deel DK van die opstaande zijde gelijk is aan de bazis AB en aan de deellijn BK; wij zien hieruit, dat elke diagonaal, de anderen die hij snijdt, in de uiterste en middelste reden verdeelt, en dat bij deze verdeeling het grootste stuk van de diagonaal gelijk aan de zijde des vijfhoeks is.

Elk der driehoeken, die tot zijden heeft eene zijde des vijfhoeks, het grootste stuk van eene en het kleinste stuk van eene andere diagonaal, is almede zulk een gelijkbeenige driehoek, zoo als, bij voorbeeld, DEK. Hierin deelt dus de lijn EI, de opstaande zijde DK in de uiterste en middelste reden, en bij die verdeeling is weder het grootste stuk DI gelijk aan de bazis EK en aan de deellijn EI. Wij zien hieruit, dat van de beide deelpunten, die zich op eene diagonaal bevinden, het eene de diagonaal zelf en het andere haar grootste stuk in de uiterste en middelste reden verdeelt.

Uit het aangevoerde volgt, dat eene zijde KI van den tweeden vijfhoek en eene zijde DI van de vijfpuntige ster,

door de snijding der diagonalen ontstaande, respectievelijk gelijk zijn aan het kleinste en grootste stuk van de zijde des vijfhoeks, zoo die zijde in de uiterste en middelste reden verdeeld wordt. Stellen wij dus die zijde gelijk a, alsmede ter bekorting $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = m$ en $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) = n$, dan is

$$KI = am \text{ en } DI = an.$$

De omtrekken der vijfhoeken ABCDE en FGHIK staan tot elkander als hunne zijden, dat is: als a tot am of als 1 tot m; de omtrek van den tweeden vijfhoek moet klaarblijkelijk tot dien van den derden in dezelfde reden zijn, als die van den eersten tot dien van den tweeden, en zoo vervolgens. Stellen wij dus de omtrekken der opvolgende vijfhoeken door O, O′, O″, O‴, *enz.* voor, dan hebben wij:

$$O : O' = 1 : m,$$
$$O' : O'' = 1 : m = m : m^2,$$
$$O'' : O''' = 1 : m = m^2 : m^3,$$
enz.

hieruit volgt de aaneengeschakelde evenredigheid

$$O : O' : O'' : O''' : enz. = 1 : m : m^2 : m^3 : enz.,$$

waaruit dadelijk kan afgeleid worden

$$O + O' + O'' + O''' + enz. : O = 1 + m + m^2 + m^3 + enz. : 1.$$

Stellen wij nu de begeerde som der omtrekken door $\Sigma(O)$ voor, en nemen wij in aanmerking, dat wegens $m < 1$, de som der oneindig voortloopende reeks $1 + m + m^2 + m^3 + enz. = \frac{1}{1-m}$ is, dan volgt uit de laatste evenredigheid

terstond $$\Sigma(O) = \frac{O}{1-m};$$

of, zoo wij $O = 5a$ en $m = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ substitueren,

$$\Sigma(O) = \frac{10a}{-1+\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}a(1+\sqrt{5}).$$

Nemen wij in aanmerking, dat $\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$ de waarde van eene diagonaal des eersten vijfhoeks is, dan blijkt, dat de begeerde som het vijfvoud van zulk eene diagonaal is; en daar er in den vijfhoek juist vijf diagonalen kunnen getrokken worden, zijn de omtrekken der opvolgende vijfhoeken, den eersten medegerekend en tot in het oneindige toe genomen, te zamen zoo groot, als de som van de diagonalen des eersten vijfhoeks.

CLXX. VOORSTEL.

Door F. C. RADIJS.

Men verlangt ook de som der inhouden van de in het voorgaande voorstel bedoelde vijfhoeken te vinden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., H. KLOOS en J. SIOENIS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De inhouden der opvolgende vijfhoeken staan tot elkander als de vierkanten hunner omtrekken; deze inhouden alzoo door I, I', I'', I''', *enz.* voorstellende en derzelver som door $\Sigma(I)$, hebben wij, naar aanleiding van hetgeen in de voorgaande oplossing is aangetoond,

$$I : I' : I'' : I''' : enz. = 1 : m^2 : m^4 : m^6 : enz.;$$

hieruit volgt

$$I + I' + I'' + I''' + enz. : I = 1 + m^2 + m^4 + m^6 + enz. : 1,$$

dat is

$$\Sigma(I) : I = \frac{1}{1-m^2} : 1$$

of

$$\Sigma(I) = \frac{I}{1-m^2}.$$

Substitueren wij hierin $m^2 = (\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}))^2 = \frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})$, dan komt er

$$\Sigma(I) = \frac{2I}{-5+3\sqrt{5}} = \frac{1}{10}I(5+3\sqrt{5}),$$

en nemen wij ten slotte in aanmerking, dat de inhoud eens regelmatigen vijfhoeks in zijne zijde wordt uitgedrukt door de formule

$$I = \frac{1}{4}a^2\sqrt{(25+10\sqrt{5})},$$

dan verkrijgen wij, voor de begeerde som der inhouden, na behoorlijke herleiding,

$$\Sigma(I) = \frac{1}{8}a^2\sqrt{(130+58\sqrt{5})}.$$

CLXXI. VOORSTEL.

Door F. C. RADIJS.

In elk der vijfhoeken, in de beide laatste voorstellen omschreven, vormen de diagonalen eene vijfpuntige ster. Men verlangt de som van de omtrekken van al deze vijfpuntige sterren te vinden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. A. HANSEN, D. W.

HINSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., H. KLOOS *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De opvolgende vijfpuntige sterren zijn gelijkvormige figuren; de omtrekken zijn dus evenredig met de gelijkstandige lijnen in die figuren getrokken, dus ook met de zijden der vijfhoeken, waarin zij beschreven zijn. Naar aanleiding van het CLXIX VOORSTEL; hebben wij alzoo, die omtrekken door O, O', O'', O''', *enz.* voorstellende, en hunne som door $\Sigma(O)$,

$$O : O' : O'' : O''' : enz. = 1 : m : m^2 : m^3 : enz.,$$

waaruit volgt

$$O+O'+O''+O'''+enz. : O = 1+m+m^2+m^3+enz. : 1,$$

dat is
$$\Sigma(O) : O = \frac{1}{1-m} : 1$$

of
$$\Sigma(O) = \frac{O}{1-m};$$

en na substitutie van $m = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

$$\Sigma(O) = \frac{2O}{-1+\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}O(1+\sqrt{5}).$$

Daar wij nu in het CLXIX VOORSTEL almede aangetoond hebben, dat (Fig. 61) $DI = an = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$ is, en de omtrek van de eerste vijfpuntige ster klaarblijkelijk het tienvoud van de lijn DI is, hebben wij

$$O = 5a(-1+\sqrt{5}),$$

waardoor de vroegere uitdrukking voor $\Sigma(O)$ overgaat in

$$\Sigma(O) = 10a;$$

de in dit voorstel bedoelde som van omtrekken is dus het dubbel van den omtrek des eersten vijfhoeks.

CLXXII. VOORSTEL.

Door F. C. RADIJS.

Men verlangt ook de som van de inhouden der in het voorgaande voorstel bedoelde vijfpuntige sterren te vinden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., H. KLOOS *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De inhouden der opvolgende vijfpuntige sterren staan tot

elkander als de vierkanten van hare omtrekken; die inhouden alzoo door I, I′, I″, I‴, *enz.* voorstellende en hunne som door $\Sigma(I)$, hebben wij, naar aanleiding van het voorgaande voorstel,

$$I : I' : I'' : I''' : enz. = 1 : m^2 : m^4 : m^6 : enz.,$$

waaruit volgt

$$I + I' + I'' + I''' + enz. : I = 1 + m^2 + m^4 + m^6 + enz. : 1;$$

dat is

$$\Sigma(I) : I = \frac{1}{1 - m^2} : 1$$

of

$$\Sigma(I) = \frac{I}{1 - m^2};$$

en, zoo wij hierin $m^2 = \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})$ substitueren,

$$\Sigma(I) = \frac{2I}{-5 + 3\sqrt{5}} = \tfrac{1}{10}I(5 + 3\sqrt{5}.)$$

Om nu de waarde van I in de zijde des eersten vijfhoeks uitgedrukt te krijgen, trekken wij uit het middelpunt M des vijfhoeks (Fig. 61) de lijnen MI, MK en ME, dan gaat ME regthoekig door IK en wij hebben dus

$$\textit{Inh. Vierh.}\ MKEI = \tfrac{1}{2}KI \times ME;$$

daar nu ME de straal is van den cirkel om den vijfhoek ABCDE beschreven, hebben wij, volgens de bekende formule voor de zijde des regelmatigen vijfhoeks

$$a = \tfrac{1}{2}ME\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})},$$

waaruit volgt

$$ME = \frac{2a}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} = \tfrac{1}{10}a\sqrt{(50 + 10\sqrt{5})},$$

terwijl volgens het CLXIX Voorstel is

$$KI = am = \tfrac{1}{2}a(3 - \sqrt{5});$$

door substitutie dezer waarden voor KI en ME, verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding,

$$\textit{Inh. Vierh.}\ MKEI = \tfrac{1}{10}a^2\sqrt{(25 - 10\sqrt{5})}.$$

Daar nu de eerste vijfpuntige ster het vijfvoud van dezen vierhoek is, hebben wij

$$I = \tfrac{1}{2}a^2\sqrt{(25 - 10\sqrt{5})}$$

en hierdoor wordt

$$\Sigma(I) = \tfrac{1}{20}a^2(5 + 3\sqrt{5})\sqrt{(25 - 10\sqrt{5})},$$

of na herleiding

$$\Sigma(I) = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

CLXXIII. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Wanneer men in de driehoeken, die de punten der in de laatste voorstellen genoemde vijfpuntige sterren uitmaken, cirkels beschrijft, en de middelpunten der cirkels, die tot eene zelfde ster behooren, door regte lijnen vereenigt, ontstaat er voor elke ster een nieuwe regelmatige vijfhoek. Nu begeert men de som te vinden van de omtrekken van al deze nieuwe vijfhoeken?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr., H. Kloos *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

De opvolgende vijfpuntige sterren zijn gelijkvormige figuren, in elk van welke op dezelfde wijze een nieuwe regelmatige vijfhoek wordt geconstrueerd; de omtrekken dezer nieuwe vijfhoeken, zijn dus evenredig met de omtrekken der vijfpuntige sterren waartoe zij behooren. Stellen wij dus de omtrekken dezer nieuwe vijfhoeken door O, O′, O″, O‴, *enz.* en de som dier omtrekken door Σ(O) voor, dan hebben wij, even als in het CLXXI. Voorstel,

$$\Sigma(O) = \frac{O}{1-m} = \tfrac{1}{2}O(1+\sqrt{5}).$$

Om nu de waarde van Σ(O) in de zijde *a* des oorspronkelijken vijfhoeks uit te drukken, behoeven wij alleen den omtrek O van den eersten der nieuwe vijfhoeken te berekenen.

Deelen wij de hoeken F, G, H, I, K, (Fig. 61) midden door de lijnen a b, b c, c d, d e, e a, dan zijn de snijpunten a, b, c, d, e, dezer lijnen, de middelpunten der cirkels, in de punten der eerste ster beschreven; a b c d e is bijgevolg de eerste der bedoelde nieuwe vijfhoeken, en deze vijfhoek is de omgeschrevene vijfhoek, *om* denzelfden cirkel, waar *in* de vijfhoek FGHIK beschreven is.

Daar nu de zijden en dus ook de omtrekken der regelmatige vijfhoeken *om* en *in* eenen zelfden cirkel beschreven tot elkander staan als $-1+\sqrt{5}$ tot 1, (*) hebben wij dadelijk

(*) De straal eens cirkels als eenheid aannemende, wordt het verband, tusschen de zijden Z en z der *om-* en *in-*beschrevene regel-

Omtr. abcde : *Omtr.* FGHIK $= -1 + \sqrt{5} : 1$;
de eerste dezer omtrekken is die, welke wij door O hebben voorgesteld, en voor de tweede hebben wij, blijkens de oplossing van het CLXIX Voorstel,

$$Omtr.\ FGHIK = 5 \times KI = 5am = \tfrac{5}{2}a(3 - \sqrt{5}),$$

alzoo $\quad O : \tfrac{5}{2}a(3 - \sqrt{5}) = -1 + \sqrt{5} : 1,$
waaruit dadelijk volgt

$$O = \tfrac{5}{2}a(3 - \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5}) = 10a(-2 + \sqrt{5});$$

en zoo wij nu deze waarde voor O in de voor $\Sigma(O)$ gevondene uitdrukking substitueren, verkrijgen wij

$$\Sigma(O) = 5a(-2 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 5a(3 - \sqrt{5}).$$

CLXXIV. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Wanneer men cirkels beschrijft in de driehoeken, die er overblijven, als men de sterren, in de vorige voorstellen bepaald, uit de vijfhoeken, waarin zij beschreven zijn, wegneemt, en de middelpunten dezer cirkels, op gelijke wijze als in het voorgaande voorstel, vereenigt, verkrijgt men eene nieuwe reeks van vijfhoeken. Ook van deze vijfhoeken begeert men de som der omtrekken te vinden?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr, H. Kloos *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Uit de gelijkvormigheid der achtervolgende figuren, is het klaar, dat ook de omtrekken van de vijfhoeken dezer nieuwe

---

matige veelhoeken van hetzelfde aantal zijden, zoo als bekend is, uitgedrukt door de formule

$$Z = \frac{2z}{\sqrt{(4 - z^2)}}, \quad \text{waaruit volgt} \quad Z : z = 2 : \sqrt{(4 - z^2)};$$

zijn nu deze regelmatige veelhoeken vijfhoeken, dan is, zoo als mede bekend is, $z = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ en $z^2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$; hierdoor verandert dan de vorige evenredigheid achtervolgens in:

$$Z : z = 2 : \sqrt{\left\{4 - \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\right\}} = 2 : \tfrac{1}{2}\sqrt{(6 + 2\sqrt{5})},$$

$$Z : z = 4 : \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})} = 4 : 1 + \sqrt{5},$$

$$Z : z = 4(-1 + \sqrt{5}) : (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5}) = 4(-1 + \sqrt{5}) : 4,$$

dat is eindelijk

$$Z : z = -1 + \sqrt{5} : 1.$$

reeks in dezelfde reden zullen afnemen, als de omtrekken der vijfhoeken en vijfpuntige sterren, waarvan de sommen in het CLXIX en CLXXI. Voorstel. bepaald zijn.

Indien dus O, O', O'', O''', *enz.* de omtrekken van de vijfhoeken dezer nieuwe reeks zijn en Σ(O) de som van die omtrekken voorstelt, hebben wij, even als in de genoemde voorstellen,

$$\Sigma(O) = \frac{O}{1-m} = \tfrac{1}{2}O(1 + \sqrt{5});$$

zoodat nog alleen de vraag kan zijn, ook hier O in de zijde *a* des oorspronkelijken vijfhoeks uit te drukken.

Laat nu f g h i k (Fig. 61) de eerste vijfhoek zijn der hier bedoelde reeks, dat is de vijfhoek, waarvan nu de omtrek door O is voorgesteld geworden, dan is eene diagonaal fh van dezen vijfhoek gelijk aan de zijde BC des oorspronkelijken vijfhoeks. Zoo wij namelijk h C en f B trekken, deelen deze lijnen de hoeken DCH en ABF midden door, omdat h en f de middelpunten zijn van de cirkels in de driehoeken DEH en ABF beschreven; de hoeken hCB en fBC bevatten dus ieder twee en een' halven hoek van 36°, en zijn alzoo regt; de lijnen h C en f B zijn voorts klaarblijkelijk even groot, derhalve is h CB f een regthoek en bijgevolg fh = BC = *a*. Daar nu, in elken regelmatigen vijfhoek, de zijde tot de diagonaal staat als 1 tot $\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, hebben wij

$$fg : fh = 1 : \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

waaruit volgt

$$fg = \frac{2fh}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2a}{1 + \sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}),$$

$$O = 5 \times fg = \tfrac{5}{2}a(-1 + \sqrt{5}),$$

door substitutie van welke waarde wij ten slotte verkrijgen

$$\Sigma(O) = \tfrac{5}{4}a(-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 5a.$$

De hier bedoelde som van omtrekken is dus gelijk aan den omtrek des oorspronkelijken vijfhoeks.

CLXXV. Voorstel.

Door K. Smit.

Eene rekenkunstige reeks van n termen te vinden, zoodat de som van de derde magten dezer termen weder eene volkomene derde magt zij?

Opgelost *door* J. S. Speijer, F. C. Radijs *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat a, $a+v$, $a+2v$, $a+3v$, *enz.* eene rekenkunstige reeks zijn, die de eigenschap heeft, dat de som van de derde magten harer termen weder eene derde magt b. v. t^3 is; indien men dan al de termen dezer reeks met of door een zelfde getal b vermenigvuldigt of deelt, zal men eene nieuwe rekenkunstige reeks verkrijgen, en de som van de derde magten van de termen dezer nieuwe reeks zal dan b^3t^3 of $\frac{t^3}{b^3}$, en dus insgelijks eene derde magt, zijn. Hieruit volgt: ten eerste, dat indien men eene reeks gevonden heeft, die aan de vraag voldoet en waarvan de termen breuken zijn, men eene voldoende reeks in geheele getallen zal verkrijgen, door de termen der eerste met den gemeenschappelijken noemer te vermenigvuldigen; en ten tweede, dat men, zonder aan de algemeenheid der oplossing te kort te doen, het verschil der reeks naar welgevallen kan aannemen.

Nemen wij dan het getal 2 als het verschil der te vindene reeks aan, dan kunnen wij de reeks voorstellen:

1° indien n even of $n = 2m$ is, door

$$x-(2m-1),\ x-(2m-3),\ enz. \ldots x-5,\ x-3,\ x-1,\ x+1,\ x+3,\ x+5,\ enz. \ldots x+(2m-3),\ x+(2m-1);$$

en 2° indien n oneven of $n = 2m+1$ is, door

$$x-2m,\ x-(2m-2),\ x-(2m-4),\ enz. \ldots x-4,\ x-2,\ x,\ x+2,\ x+4,\ enz. \ldots x+(2m-4),\ x+(2m-2),\ x+2m.$$

In het eerste geval vinden wij, voor de som van de derde magten der termen,

$$nx^3 + 6x\{1^2 + 3^2 + 5^2 + enz. \ldots + (2m-1)^2\}$$

en in het tweede geval

$$nx^3 + 24x\{1^2 + 2^2 + 3^2 + enz. \ldots + m^2\};$$

daar nu door de bekende leerwijze, voor het sommeren der rekenkunstige reeksen van de tweede orde, gemakkelijk gevonden wordt

$$1^2+3^2+5^2+ enz. \ldots + (2m-1)^2 = \tfrac{1}{3}m(2m+1)(2m-1)$$

en $1^2+2^2+3^2+ enz. \ldots + m^2 = \tfrac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$,

komt er voor de som der derde magten: in het eerste geval

$$nx^3 + 2m(2m+1)(2m-1)x$$

en in het tweede geval

$$nx^3 + 4m(m+1)(2m+1)x;$$

of, daar in het eerste geval $m = \frac{1}{2}n$ en in het tweede geval $m = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ is, in beide gevallen, door substitutie dezer waarden voor m,

$$nx^3 + n(n-1)(n+1)x \quad \text{of} \quad nx^3 + (n^3 - n)x,$$

zoodat het er nu slechts op aankomt x zoodanig te bepalen, dat deze uitdrukking eene volkomene derde magt worde.

Dewijl wij hieraan kunnen voldoen, door $x = 1$ te nemen, als wanneer $nx^3 + (n^3 - n)x = n^3$ wordt, zoo stellen wij $x = y + 1$, alsdan wordt

$$nx^3 + (n^3 - n)x = ny^3 + 3ny^2 + (n^3 + 2n)y + n^3;$$

laat nu $py + n$ de derdemagtswortel hiervan zijn, dan is

$$ny^3 + 3ny^2 + (n^3 + 2n)y + n^3 = (py + n)^3,$$

of $(n-p^3)y^3 + (3n-3p^2n)y^2 + (n^3+2n-3pn^2)y = 0.$

Stellen wij verder $n^3 + 2n - 3pn^2 = 0$, dan wordt $p = \frac{n^2+2}{3n}$, terwijl de laatste vergelijking, na deeling door y^2, overgaat in

$$(n - p^3)y + 3n - 3p^2n = 0;$$

hieruit vinden wij $\quad y = -\frac{3n(1-p^2)}{n-p^3}$

of, na substitutie der bovenstaande waarde $p = \frac{n^2+2}{3n}$ en behoorlijke herleiding,

$$y = -9n^2\,\frac{n^4-5n^2+4}{n^6-21n^4+12n^2+8} = -9n^2\,\frac{n^2-4}{n^4-20n^2-8},$$

waaruit eindelijk volgt

$$x = y + 1 = -\frac{8(n^2-1)^2}{n^4-20n^2-8}.$$

Voor $n = 3$ is $x = +\frac{512}{107}$ en dus de gevraagde reeks

$$x - 2 = \frac{298}{107},\ x = \frac{512}{107} \text{ en } x + 2 = \frac{726}{107};$$

zoo wij al de termen door $\frac{2}{107}$ deelen, verkrijgen wij in geheele getallen de reeks 149, 256 en 363, waarvan de som der derde magten $67917312 = (408)^3$ is.

Voor $n = 4$ is $x = 25$ en dus de gevraagde reeks $x-3 = 22$, $x-1 = 24$, $x+1 = 26$ en $x+3 = 28$; zoo wij hier al de termen door 2 deelen, verkrijgen wij de reeks 11, 12, 13 en 14; en de som van de derde magten der termen wordt nu $8000 = (20)^3$.

Voor $n = 5$ is $x = -\frac{512}{13}$ en de reeks wordt dan

$$x-4=-\tfrac{564}{13},\quad x-2=-\tfrac{538}{13},\quad x=-\tfrac{512}{13},$$
$$x+2=-\tfrac{486}{13} \text{ en } x+4=-\tfrac{460}{13};$$

zoo wij weder alle deze termen door $-\frac{2}{13}$ deelen, bekomen wij de reeks 282, 269, 256, 243 en 230, zijnde nu de som van de derde magten der termen $85184000 = (440)^3$; enz.

AANMERKINGEN. 1°. Indien men $n = 2$ neemt, dan is $x = 1$, en de getallen, hoewel geene reeks uitmakende, zijn dan 0 en 2; dit komt overeen met de bekende stelling, dat aan de vergelijking $p^3 + q^3 = r^3$ nimmer voldaan kan worden met rationale waarden voor p, q en r, zonder dat eene dezer drie getallen nul zij.

2°. Men zal steeds reeksen in positieve geheele getallen verkrijgen, zoo lang de eerste en laatste termen, of $x-(n-1)$ en $x + (n - 1)$, met hetzelfde teeken zijn aangedaan. Verschillen echter de teekens dezer termen, dan zullen er noodzakelijk negatieve termen in de reeks moeten voorkomen.

Om nu te onderzoeken, voor welke waarden van n deze teekens verschillend zullen zijn, stellen wij, in de uitdrukkingen $x - (n - 1)$ en $x + (n - 1)$, voor x de bovengevondene waarde, dan verkrijgen wij

$$x-(n-1)=-(n-1)\times\frac{n^4+8n^3-12n^2-8n-16}{n^4-20n^2-8}$$

en

$$x+(n-1)=-(n-1)\times\frac{-n^4+8n^3+28n^2-8n}{n^4-20n^2-8}.$$

Dewijl voorts

$$n^4+8n^3-12n^2-8n-16n=(n-2)(n^3+10n^2+8n+8)$$

en

$$-n^4+8n^3+28n^2-8n=n(-n^3+8n^2+28n-8)$$

is, terwijl uit den aard der zaak n positief en grooter dan 2 is, zal het genoegzaam zijn na te gaan, voor welke waarden van n de uitdrukkingen $n^3 + 10n^2 + 8n + 8$ en $-n^3 + 8n^2 + 28n - 8$ verschillende teekens zullen verkrijgen; of wel, voor welke waarden van n de uitdrukking $n^3 - 8n^2 - 28n + 8$ positief zal wezen.

Daar men nu deze laatste uitdrukking kan schrijven in de vormen

$(n^2+2n)(n-10)-8(n-1)$ of $(n^2+3n)(n-11)+(5n+8)$, zoo blijkt dadelijk, dat zij positief zal zijn, indien $n =$ of > 11, maar negatief, indien $n =$ of < 10 is; en hier-

uit volgt dan eindelijk, dat door de voor x gevondene waarde steeds in positieve getallen aan het voorstel kan beantwoord worden, zoo lang men reeksen van minder dan elf termen begeert, maar dat voor $n =$ of $>$ 11 altijd sommige termen negatief zullen zijn.

3°. Door in de uitdrukking $nx^3 + (n^3 - n)x$ te stellen $x = z - \frac{8(n^2 - 1)^2}{n^4 - 20n^2 - 8}$, en verder als boven te handelen, zal men nog andere waarden voor x kunnen vinden; het opsporen van zulke andere waarden hebben wij echter, wegens het omslagtige der berekeningen, achterwege gelaten.

CLXXVI. Voorstel.

Door J. Bassan.

De uitdrukking $\frac{2\partial\phi\sqrt{(Tang.\phi-1)}}{(1+Cos.2\phi)(1+Tang.\phi)}$ *te integreren?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. Bassan, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Omdat $1 + Cos.2\phi = 2Cos.^2\phi$ is, kan de gegevene uitdrukking onder de volgende gedaante worden voorgesteld

$$\frac{\partial\phi\sqrt{(Tang.\ \phi - 1)}}{Cos.^2\ \phi\ (1 + Tang.\ \phi)};$$

en daar $\frac{\partial\phi}{Cos.^2\ \phi} = \partial.\ Tang.\ \phi$ is, zoo kan de laatstgevondene uitdrukking aldus geschreven worden,

$$\frac{\partial.\ Tang.\ \phi\ \sqrt{(Tang.\ \phi - 1)}}{1 + Tang.\ \phi}.$$

Stelt men nu $\sqrt{(Tang.\phi-1)} = z$, zoo is $Tang.\phi = 1 + z^2$, $1 + Tang.\ \phi = 2 + z^2$, $\partial.\ Tang.\ \phi = 2z\partial z$ en dus is

$$\frac{\partial.\ Tang.\ \phi\ \sqrt{(Tang.\ \phi - 1)}}{1 + Tang.\ \phi} = \frac{2z^2\partial z}{2+z^2}.$$

Deelt men $2z^2\partial z$ door $2 + z^2$, dan is het quotient $2\partial z - \frac{4\partial z}{2 + z^2}$, zoodat de gevraagde integraal is

$$\int 2\partial z - \int \frac{4\partial z}{2 + z^2}.$$

Dewijl $\int 2\partial z = 2z$, en $\int \frac{4\partial z}{2+z^2} = (2\sqrt{2})BoogTang.\tfrac{1}{2}z\sqrt{2}$ is, zoo vindt men, voor z derzelver waarde $\sqrt{(Tang.\ \phi - 1)}$ schrijvende,

$$\int \frac{2\partial\phi\sqrt{(Tang.\ \phi - 1)}}{(1 + Cos.\ 2\phi)\,(1 + Tang.\ \phi)} = 2\sqrt{(Tang.\ \phi - 1)} - (2\sqrt{2})\ Boog\ Tang.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(Tang.\ \phi - 1) + C.$$

CLXXVII. VOORSTEL.

Door L. VAN DE KASTEELE.

De uitdrukking $\dfrac{x^3\partial y + y^3\partial x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ *te integreren?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. VAN DE KASTEELE, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zoo wij teller en noemer der gegevene uitdrukking door x^3y^3 deelen en de te vindene integraal z noemen, hebben wij

$$\partial z = \frac{\dfrac{\partial y}{y^3} + \dfrac{\partial x}{x^3}}{\dfrac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{x^3y^3}};$$

maar nu is $\dfrac{\partial y}{y^3} = -\ \tfrac{1}{2}\partial.\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial x}{x^3} = -\ \tfrac{1}{2}\partial.\dfrac{1}{x^2}$ en dus $\dfrac{\partial y}{y^3} + \dfrac{\partial x}{x^3} = -\ \tfrac{1}{2}\partial.\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)$,

terwijl $\dfrac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{x^3y^3} = \left(\dfrac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{xy}\right)^3 = \left(\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2y^2}}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ is, derhalve wordt

$$\partial z = \frac{-\ \tfrac{1}{2}\partial\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\partial.\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right),$$

waaruit dadelijk volgt:

$$z=-\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\delta.\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}+C$$

$$=\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}+C.$$

CLXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Te integreren de differentiaal vergelijking

$$z-c=x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y},$$

waarin z *eene functie der onafhankelijk veranderlijke grootheden* x *en* y *voorstelt, terwijl* $\frac{\delta z}{\delta x}$ *en* $\frac{\delta z}{\delta y}$ *de differentiaal-quotienten dier functie ten opzigte van* x *en* y *ieder in het bijzonder zijn?*

OPGELOST *door* F. J. STAMKART *en* J. BADON GHIJBEN.

I. OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

De opgegevene vergelijking behoort tot de zoodanige, die in de hoogere analysis hetzelfde zijn als de onbepaalde vergelijkingen in de gewone stelkunst; zij bevat eene voorwaarde te weinig, om z bepaaldelijk in x en y te kunnen uitdrukken, en er bestaan diensvolgens een oneindig aantal vormen, waaruit de voorgestelde vergelijking kan afgeleid zijn, die echter alle met elkander in een zeker verband staan.

Wanneer eene functie z van twee onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y gedifferentieerd wordt, bekomt men in het algemeen

$$\delta z=\frac{\delta z}{\delta x}\delta x+\frac{\delta z}{\delta y}\delta y=p\delta x+q\delta y\quad\ldots\ldots(1)$$

en het is duidelijk, dat men uit deze vergelijking de oorspronkelijke functie z niet zal kunnen terug vinden, ten zij bekend is, welke functiën van x en y door p en q worden voorgesteld; dat is, ten zij de vormen der functiën $p=\phi(x,y)$ en $q=\phi'(x,y)$ gegeven zijn. De leerwijze, om in zulk een geval de vergelijking (1) te integreren, bestaat, zoo als bekend is, daarin, dat men zich eerst overtuigt van de ge-

lijkheid der differentiaal-quotienten $\frac{\delta p}{\delta y}$ en $\frac{\delta q}{\delta x}$. Deze gelijkheid werkelijk bestaande, beschouwt men eene der onafhankelijk veranderlijke grootheden, bij voorbeeld y, als standvastig; integreert in die onderstelling de vergelijking $\delta z = \phi(x, y)\delta x$, en voegt bij de uitkomst, in plaats van eene standvastige grootheid, eene nog onbepaalde functie van y. Deze functie van y wordt vervolgens bepaald, door de verkregene integraal, in de onderstelling dat x standvastig is, te differentieren, de differentiaal die men daardoor verkrijgt aan $\phi'(x, y)\delta y$ gelijk te stellen, en dan nogmaals te integreren.

Zijn de vormen der functiën $p = \phi(x, y)$ en $q = \phi'(x, y)$ niet elk afzonderlijk gegeven, dan kan deze leerwijze niet meer in haar geheel worden toegepast, en de integraal kan dan ook niet meer in eenen geheel bepaalden vorm aangewezen worden. Was, bij voorbeeld, alleen p bekend, dat is, kende men alleen den vorm der functie $\frac{\delta z}{\delta x} = p = \phi(x, y)$, dan zoude de integraal moeten uitgedrukt worden door

$$z = \int \phi(x, y)\delta x + Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

waarin Y eene geheel onbepaalde functie van y voorstelt, die; omdat de vorm der functie $\frac{\delta z}{\delta y} = q = \phi'(x, y)$ onbekend is, ook niet bepaald kan worden, zoodat de integraal almede eenen onbepaalden vorm moet blijven behouden.

In de opgegevene vergelijking zijn p en q geen van beide bekend; men kent alleen eene betrekking tusschen deze differentiaal-quotienten, de veranderlijke grootheden x en y, en de functie z; deze betrekking verschaft echter ééne voorwaarde, waaraan de te vindene integraal voldoen moet, evenzeer als het ééne voorwaarde zou verschaffen, dat p geheel bekend en q geheel onbekend ware; het valt dan ook gemakkelijk, door het aannemen eener nieuwe veranderlijke grootheid, uit de gegevene vergelijking tusschen p en q eene andere, tusschen twee differentiaal-quotienten p' en q' af te leiden, waarin p' geheel bekend en q' geheel onbekend is. En uit deze nieuwe vergelijking kan dan de onbepaalde integraal, volgens het boven aangevoerde (2), gevonden worden.

Volgens de opgaaf is namelijk

$$z - c = px + qy \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

en omdat z eene functie van x en y is

$$\delta z = p\delta x + q\delta y \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

stellen wij nu slechts,

$$y = tx \quad \text{en dus} \quad \delta y = t\delta x + x\delta t \quad \ldots \quad (5),$$

waardoor $t = \frac{y}{x}$ eene nieuwe veranderlijke grootheid wordt, zoodanig, dat wij z als eene functie van de twee onafhankelijk veranderlijke grootheden x en t kunnen beschouwen, dan gaan (3) en (4) over in

$$z - c = px + qtx = (p + qt)x \quad \ldots \quad (6),$$

$$\delta z = p\delta x + qt\delta x + qx\delta t = (p + qt)\delta x + qx\delta t \quad (7)$$

en wij verkrijgen dus, door uit (6) te trekken $p+qt=\frac{z-c}{x}$ en deze waarde in (7) over te brengen,

$$\delta z = \frac{z - c}{x}\delta x + qx\delta t \quad \ldots\ldots \quad (8);$$

maar z als eene functie van x en t beschouwende, hebben wij ook

$$\delta z = p'\delta x + q'\delta t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

en in deze vergelijking is nu blijkens (8) $p' = \frac{z-c}{x}$ geheel bekend, terwijl er geen middel bestaat, om uit de opgaaf $q' = qx$ te vinden.

Integreren wij nu de vergelijking (9), in de onderstelling dat t standvastig is, dan komt er achtervolgens:

$$\delta z = p'\delta x = \frac{z-c}{x}\delta x,$$

$$\frac{\delta z}{z-c} = \frac{\delta x}{x},$$

$$Log.\,(z - c) = Log.\,x + Log.\,C,$$

$$z - c = x\,C,$$

en daar de toegevoegde grootheid C geene standvastige, maar eene functie van t, moet wezen, zoo hebben wij eindelijk

$$z - c = xf(t)$$

of

$$z - c = xf\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

voor de begeerde integraal.

Men kan zich van de deugdelijkheid dezer uitkomst over-

tuigen, indien men slechts uit (10), door differentiatie, de opgegevene differentiaal-vergelijking weder te voorschijn brengt.

Differentiëren wij alzoo (10), daarbij $\delta . f\left(\frac{y}{x}\right)$ voorstellende door $f'\left(\frac{y}{x}\right)\delta . \left(\frac{y}{x}\right)$, dan vinden wij

$$\delta z = f\left(\frac{y}{x}\right) . \delta x + x f'\left(\frac{y}{x}\right) \delta . \frac{y}{x};$$

of, daar $\delta . \frac{y}{x} = \frac{x\delta y - y\delta x}{x^2}$ en volgens (10) $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{z-c}{x}$ is,

$$\delta z = \frac{z-c}{x}\delta x + \frac{x\delta y - y\delta x}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Stellen wij nu hierin beurtelings y en x standvastig, dan verkrijgen wij

$$\frac{\delta z}{\delta x}\delta x = \frac{z-c}{x}\delta x - \frac{y\delta x}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ en } \frac{\delta z}{\delta y}\delta y = \delta y f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

of $$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{z-c}{x} - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ en } \frac{\delta z}{\delta y} = f'\left(\frac{y}{x}\right);$$

als nu $f'\left(\frac{y}{x}\right)$ tusschen de beide laatste vergelijkingen eliminerende, komen wij werkelijk op de gegevene vergelijking terug. Deze terugkeer tot de gegevene differentiaal-vergelijking verspreid een nieuw licht, over het onbepaald blijven der integraal; want men ziet er uit, dat de gegevene vergelijking moet beschouwd worden, als te zijn ontstaan uit de vergelijkingen

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \phi(x, y) \text{ en } \frac{\delta z}{\delta y} = \phi'(x, y),$$

tusschen welke eene zekere functie van x en y is geëlimineerd geworden. Deze beide vergelijkingen bepalen z als functie van x en y volkomen; maar de ééne vergelijking, die er na zulk eene eliminatie te voorschijn komt, is tot die bepaling ontoereikend.

De vergelijking (10) is in het algemeen die van alle kegelvlakken, waarvan de top, of liever het middelpunt, tot coördinaten heeft $x = 0$, $y = 0$ en $z = c$; want trekt men uit dit punt eene lijn, naar het punt aangewezen door

de coördinaten x, y en z, dan zal de projectie dezer lijn, op het vlak der xy, met de as der x eenen hoek maken, waarvan de trigonometrische tangens $\frac{y}{x}$ is; en de projectie dezer zelfde lijn, op het vlak der xz, zal met de as der x eenen hoek maken, waarvan de tangens is $\frac{z-c}{x}$. Dewijl nu $\frac{z-c}{x}$ eene functie van $\frac{y}{x}$ is, zoo blijft de stand der genoemde lijn onveranderd, wanneer de verhouding $\frac{y}{x}$ standvastig blijft; waaruit volgt, dat alle zoodanig getrokkene lijnen het oppervlak, door de vergelijking $\frac{z-c}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ voorgesteld, met hare geheele lengte zullen aanraken, en dat dus dit oppervlak een kegelvlak zijn moet.

Schrijft men in de voorgestelde vergelijking, in plaats van p en q, dat is in plaats van $\frac{\delta z}{\delta x}$ en $\frac{\delta z}{\delta y}$, de standvastige coëfficiënten A en B, dan gaat dezelve in die van een plat vlak over, dat als een bijzonder geval van de kegelvlakken kan aangemerkt worden. Zoodra echter A en B veranderlijk zijn, moet men zich dat platte vlak als in beweging voorstellen, doch altijd door het punt gaande, waarvan $x = 0$, $y = 0$ en $z = c$ de coördinaten zijn; de verzameling van al de doorsnijdingen van dit vlak met zich zelven, in twee onmiddellijk op elkander volgende standen, zal alsdan het genoemde kegelvlak daarstellen, dat alzoo door het platte vlak gedurig wordt aangeraakt.

Aanmerking. De leerwijze, die ons tot de integraal der voorgestelde vergelijking geleid heeft, kan ook tot het integreren van meer zamengestelde vergelijkingen, tusschen gedeeltelijke differentiaal-coëfficiënten, uitgestrekt worden. Welligt wordt het niet geheel ten onpas gerekend, dit nog kortelijk hier bij te voegen.

Zij in het algemeen gegeven de vergelijking

$$R = P\frac{\delta z}{\delta x} + Q\frac{\delta z}{\delta y} = Pp + Qq \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

waarin P, Q en R willekeurige uitdrukkingen verbeelden,

uit de onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y en derzelver functie z zamengesteld; dan heeft men ook nog

$$\delta z = p\delta x + q\delta y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b),$$

welke laatste vergelijking, ter bereiking van het doel, moet veranderd worden in eene andere

$$\delta z = p'\delta x + q'\delta t \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b'),$$

waarin p' geheel bekend, doch q' geheel onbepaald is.

Zij daartoe in het algemeen

$$y = \mathrm{F}(x, t) \quad \text{en} \quad \delta y = m\delta x + n\delta t,$$

dan wordt volgens (b)

$$\delta z = p\delta x + qm\delta x + qn\delta t = (p + qm)\delta x + qn\delta t$$

en dus is, volgens (b'),

$$p + qm = p' \quad \text{en} \quad qn = q',$$

waaruit volgt

$$p = \frac{p'n - q'm}{n} \quad \text{en} \quad q = \frac{q'}{n};$$

door substitutie dezer waarden voor p en q, verandert (a) in

$$n\mathrm{R} = \mathrm{P}(p'n - q'm) + \mathrm{Q}q'$$

of

$$n\mathrm{R} = \mathrm{P}np' - (\mathrm{P}m - \mathrm{Q})q' \quad . \; . \; . \; . \quad (a').$$

Wij hebben alzoo, in plaats van (a) en (b), de vergelijkingen (a') en (b'), waarin z en y als functiën van x en t beschouwd worden.

Het doel, dat wij ons voorstelden, zal nu bereikt zijn, zoodra wij er in slagen, den vorm der functie $\mathrm{F}(x, t)$ zoodanig te kiezen, dat q' uit (a') verdwijnt, want dan kan p' uit (a') in z, x en t uitgedrukt worden en wordt dus geheel bekend; daardoor zal dan de vergelijking (b') kunnen geïntegreerd worden, als eene vergelijking tusschen de twee alleen veranderlijke grootheden x en z, mits men bij de daardoor ontstaande integraal, in plaats van eene standvastige, eene functie van t voege, welke t dan wederom eene uit $y = \mathrm{F}(x, t)$ af te leidene functie van x en y is.

Het min of meer moeijelijke, dat in de bedoelde keuze gelegen is, hangt natuurlijk van de zamenstelling der gegevene uitdrukkingen P en Q af, waaromtrent wij in geene verdere bijzonderheden kunnen treden; doch stellen wij in het algemeen, zonder eene zoodanige keuze,

$$Pm - Q = 0, \text{ dan wordt } p' = \frac{R}{P},$$

en, dáar $m = \frac{\delta y}{\delta x}$ en $p' = \frac{\delta z}{\delta x}$ is,

$$P\frac{\delta y}{\delta x} = Q \text{ en } P\frac{\delta z}{\delta x} = R \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (c).$$

Dewijl nu in deze laatste vergelijkingen de differentialen *beide* van y en van z, als functiën van x en t beschouwd, alleen ten opzigte van x genomen zijn, zoo kunnen die vergelijkingen aangemerkt worden als gelijktijdig te bestaan; dat heet, als waren dezelve afgeleid uit *twee* te zamen plaats hebbende onbekende vergelijkingen, tusschen x, y, z en die functiën $\psi(t)$ en $\psi'(t)$, welke zoo de vergelijkingen (c) ten opzigte van x geïntegreerd werden, in plaats van standvastigen, bij die integralen zouden moeten gevoegd worden.

Indien men dus, door integratie van (c), de bedoelde onbekende vergelijkingen kan vinden, en dezelve onder de vormen

$$\Phi(x, y, z) = \psi(t) \text{ en } \Phi'(x, y, z) = \psi'(t)$$

brengt, dan zal het eindelijke besluit zijn, dat de gevondene functie $\Phi(x, y, z)$ eene *onbepaalde* functie van de insgelijks gevondene functie $\Phi'(x, y, z)$ is; want ook van de beide functiën $\psi(t)$ en $\psi'(t)$ is de eene klaarblijkelijk eene functie van de andere.

In de voorgestelde vergelijking is $P = x$, $Q = y$, $R = z - c$; dus worden de vergelijkingen (c):

$$x\frac{\delta y}{\delta x} = y \quad \text{en} \quad x\frac{\delta z}{\delta x} = z - c,$$

dat is:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta x}{x} \quad \text{en} \quad \frac{\delta z}{z - c} = \frac{\delta x}{x};$$

hieruit volgt door integratie, daarbij in plaats van standvastigen functien van t invoerende,

$$y = x\psi(t) \quad \text{en} \quad z - c = x\psi'(t)$$

of $$\frac{y}{x} = \psi(t) \quad \text{en} \quad \frac{z - c}{x} = \psi'(t)$$

en dus eindelijk

$$\frac{z-c}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

even als wij vroeger gevonden hebben.

Het bovenstaande kan alweder ten bewijze strekken van de stelling, dat, indien men uit de vergelijkingen (c) twee functiën van x, y en z, $V = C$ en $U = C'$, heeft afgeleid, alsdan $V = f(U)$ de integraal van (a) zijn zal; welke stelling het eerst door LAGRANGE en iets later door MONGE is bekend gemaakt (*).

II. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Schrijven wij de opgegevene vergelijking in de gedaante

$$1 = \frac{x}{z-c} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{y}{z-c} \cdot \frac{\delta z}{\delta y},$$

en stellen wij

$$\frac{x}{z-c} = u \quad \text{en} \quad \frac{y}{z-c} = v,$$

dan verandert zij in

$$1 = u\frac{\delta z}{\delta x} + v\frac{\delta z}{\delta y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A).$$

Uit de gedane stellingen volgt

$$z = \frac{x}{u} + c \quad \text{en} \quad z = \frac{y}{v} + c,$$

waarin u en v functien van de onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y zijn; en differentiëren wij beide deze waarden van z, beurtelings ten opzigte van x en van y, dan verkrijgen wij:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{u} - \frac{x}{u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{x}{u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{y}{v^2} \cdot \frac{\delta v}{\delta x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

(*) Over het integreren van vergelijkingen met gedeeltelijke differentiaal coëfficiënten, is laatstelijk door het medelid des Genootschaps, den Heer R. LOBATTO, eene verhandeling uitgegeven, onder den titel van: *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux differences partielles à trois variables;* behoorende tot eene door ZEd. ontwikkelde: *Theorie des caracteristiques employées dans l'analyse mathématique.* (*Amsterdam* bij C. G. SULPKE, 1837).

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{v} - \frac{y}{v^2} \cdot \frac{\delta v}{\delta y} \; \ldots\ldots\ldots \; (4).$$

Substitueren wij in (A) de waarden (1) en (2), dan komt er

$$1 = 1 - \frac{x}{u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} - \frac{vx}{u^2} \cdot \frac{\delta u}{\delta y}$$

of na herleiding

$$\frac{\delta u}{\delta x} = - \frac{v}{u} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \; \ldots\ldots\ldots \; (5);$$

substitueren wij echter in (A) de waarden (3) en (4), dan vinden wij

$$1 = - \frac{uy}{v^2} \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + 1 - \frac{y}{v} \cdot \frac{\delta v}{\delta y},$$

of na herleiding

$$\frac{\delta v}{\delta y} = - \frac{u}{v} \cdot \frac{\delta v}{\delta x} \; \ldots\ldots\ldots \; (6),$$

en door verder het product van (5) en (6) te nemen, verkrijgen wij

$$\frac{\delta u}{\delta x} \times \frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta x} \times \frac{\delta u}{\delta y} \; \ldots\ldots\ldots \; (7).$$

Stellen wij nu

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \mathrm{N} \times \frac{\delta v}{\delta x},$$

waarin N eene nieuwe functie van x en y voorstelt, dan moet volgens (7) ook

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \mathrm{N} \times \frac{\delta v}{\delta y}$$

zijn; wij hebben alzoo

$$\frac{\delta u}{\delta x}\delta x = \mathrm{N}. \frac{\delta v}{\delta x}\delta x$$

en

$$\frac{\delta u}{\delta y}\delta y = \mathrm{N}. \frac{\delta v}{\delta y}\delta y,$$

waarvan, omdat $\delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\delta y$ en $\delta v = \frac{\delta v}{\delta x}\delta x + \frac{\delta v}{\delta y}\delta y$ is, de som geeft

$$\delta u = \mathrm{N}\delta v.$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat N eene functie van v zal moeten zijn, en dat wij dus door integreren ook zullen moeten verkrijgen

$$u = F(v),$$

zoodat wij, hierin voor u en v derzelver waarden stellende, voor de gevraagde integraal verkrijgen

$$\frac{x}{z-c} = F\left(\frac{y}{z-c}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Differentiëren wij de vergelijking (8), daarbij kortheidshalve $\delta.\, F\left(\frac{y}{z-c}\right) = N\,\delta.\,\frac{y}{z-c}$ stellende, dan komt er

$$\delta.\frac{x}{z-c} = N\,\delta.\,\frac{y}{z-c}$$

of, de differentiatiën uitvoerende en daarna met $(z-c)^2$ vermenigvuldigende,

$$(z-c)\delta x - x\delta z = N\{(z-c)\delta y - y\delta z\}.$$

Nemen wij hierin beurtelings δy en δx gelijk nul, dan vinden wij

$$(z-c) - x\frac{\delta z}{\delta x} = -\,Ny\frac{\delta z}{\delta x},$$

$$-\,x\frac{\delta z}{\delta y} = N\left\{(z-c) - y\frac{\delta z}{\delta y}\right\};$$

en zoo wij nu tusschen de beide laatste vergelijkingen N elimineren, komen wij op de gegevene vergelijking terug, waardoor de juistheid der gevondene integraal proefondervindelijk wordt bevestigd.

Aanmerking. De integralen, in deze en de vorige oplossing gevonden, verschillen slechts in vorm; om dit aan te toonen merken wij op, dat uit (8) volgt

$$\frac{y}{z-c} = \phi\left(\frac{z-c}{x}\right)$$

of, $z-c = wx$ stellende, als wanneer $w = \frac{z-c}{x}$ is,

$$\frac{y}{wx} = \phi(w),$$

dat is

$$\frac{y}{x} = w \times \phi(w);$$

hieruit volgt nu weder

$$w = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

of, voor w hare waarde stellende,

$$\frac{z-c}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

en $$z - c = x \times f\left(\frac{y}{x}\right),$$

even als vroeger

CLXXIX. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Als men, door het zwaartepunt eener driehoekige piramide, een vlak brengt, dat evenwijdig loopt, met twee over elkander staande ribben der piramide, zal dit vlak even ver van elk dezer ribben verwijderd zijn. Men vraagt het bewijs hiervan?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laten AB en CD (Fig. 62) twee over elkander staande ribben eener driehoekige piramide ABCD zijn, trekken wij dan, uit eenig punt A der ribbe AB, eene lijn AE evenwijdig met de ribbe CD, en brengen wij door AB en AE een vlak FG, dan zal elk vlak, dat evenwijdig met FG is, ook evenwijdig met de twee over elkander staande ribben AB en CD zijn. Elke doorsnede der piramide, zoo als MNPQ, die evenwijdig met FG is, zal een parallelogram zijn; want dewijl het vlak MNPQ evenwijdig met AB is, zijn ook PQ en MN ieder in het bijzonder evenwijdig met AB en dus onderling evenwijdig; en omdat MNPQ evenwijdig met CD is, zijn even zoo MQ en NP beide evenwijdig met CD en dus ook evenwijdig met elkander. Laten M′ en D′ de projectien der punten M en D, bijgevolg AM′D′ de projectie der ribbe AMD, op het vlak FG zijn, en zij, ter bepaling van de plaats van het snijdende vlak MNPQ, MM′ $= x$, dan zal $\delta x \times$ *Inh. Par.* MNPQ eene differentiaal van den inhoud der piramide zijn, en, zoo wij DD′ $= h$ stellen, zal deze differentiaal van $x = 0$ tot $x = h$ moeten geintegreerd worden, om den geheelen inhoud der piramide te verkrijgen.

Indien wij deze differentiaal door δI en den afstand van het zwaartepunt der piramide tot het vlak FG door z voorstellen, zullen wij, volgens de theorie der zwaartepunten, al verder hebben

$$z = \frac{\int x\delta I}{\int \delta I},$$

waarin almede de integralen van $x = 0$ tot $x = h$ moeten genomen worden.

Zij nu AB $= a$, CD $= b$ en *hoek* BAE $= \alpha$, dan hebben wij uit de figuur achtervolgens, na nog MD′ evenwijdig met M′D′ getrokken te hebben:

$$AB : MN = AD : MD = DD' : DD'',$$
$$a : MN = h : h - x,$$
$$MN = \frac{a}{h}(h - x);$$
$$CD : QM = AD : AM = DD' : MM',$$
$$b : QM = h : x,$$
$$QM = \frac{b}{h}\,x;$$

$$\textit{Inh. Par. } MNPQ = MN \times QM \times \textit{Sin. } NMQ$$
$$= \frac{a}{h}(h - x) \times \frac{b}{h}x \times \textit{Sin. } (180° - \alpha)$$
$$= \frac{ab \textit{Sin.} \alpha}{h^2}(hx - x^2);$$

en $\delta I = \delta x \times \textit{Inh. Par. } MNPQ = \frac{ab \textit{Sin.} \alpha}{h^2}(hx - x^2)\delta x.$

Hierdoor gaat de bovenstaande waarde voor z over in

$$z = \frac{\int(hx^2 - x^3)\delta x}{\int(hx - x^2)\delta x};$$

voorts is $\int(hx^2 - x^3)\delta x = \frac{1}{3}hx^3 - \frac{1}{4}x^4 + C,$
$$\int(hx - x^2)\delta x = \frac{1}{2}hx^2 - \frac{1}{3}x^3 + C'$$

en, deze integralen van $x = 0$ tot $x = h$ nemende,

$$\int(hx^2 - x^3)\delta x = \frac{1}{3}h^4 - \frac{1}{4}h^4 = \frac{1}{12}h^4,$$
$$\int(hx - x^2)\delta x = \frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{6}h^3;$$

waardoor eindelijk gevonden wordt

$$z = \frac{1}{2}h.$$

Het zwaartepunt der piramide ligt dus op den afstand $\frac{1}{2}h$ van het vlak FG; brengt men alzoo door CD een vlak HI evenwijdig met FG, dan wordt de afstand h, der vlakken FG en HI, middendoorgedeeld door het vlak, dat mede evenwijdig met die vlakken door het zwaartepunt der piramide gebragt wordt; van dit laatstgenoemde vlak zijn dus de lijnen CD en AB aan weêrszijde even verre verwijderd, omdat zij respectievelijk in de vlakken HI en FG gelegen zijn.

Aanmerking. Zoo wij de formule

$$\delta I = \frac{abSin.\alpha}{h^2}(hx - x^2)\delta x$$

integreren, komt er

$$I = \frac{abSin.\alpha}{h^2}(\tfrac{1}{2}hx^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + C);$$

of, van $x = 0$ tot $x = h$,

$$I = \frac{abSin.\alpha}{h^2}(\tfrac{1}{2}h^3 - \tfrac{1}{3}h^3) = \tfrac{1}{6}abhSin.\alpha.$$

De inhoud eener driehoekige piramide is dus het zesde gedeelte van het product van twee over elkander staande ribben, derzelver kortsten afstand en de Sinus van den hoek, waaronder zij elkander kruissen. Deze laatste stelling kan almede gemakkelijk bewezen worden, door de piramide als het derde gedeelte van een driehoekig prisma, en dit laatste weder als de helft van een parallelopipedum te beschouwen.

CLXXX. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Twee plaatsen A *en* B *liggen, op de oppervlakte der aarde, in elkanders gezigt. Op zekeren dag, wordt door iemand in* A *den tijd waargenomen, waarop eenig hemellicht zich verticaal boven* B *bevindt; en even zoo wordt op denzelfden dag, door een ander in* B, *den tijd waargenomen, waarop datzelfde hemellicht verticaal boven een regtstreeks aan* A *tegenovergesteld punt van den horizon staat. Indien nu ook de breedten der beide plaatsen bekend zijn, zoo wordt gevraagd, uit deze waarnemingen het verschil van lengte te berekenen, in de onderstelling dat de aarde de gedaante heeft eener ellipsoïde, ontstaan door de omwenteling van eene ellips om hare kleine as.*

OPGELOST *door* F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Zoo de gedaante der aarde volkomen bolrond ware, zou het verschil der waargenomene tijden, ook het in tijd uitgedrukte verschil van de lengten der beide plaatsen zijn; want, in dit geval, zouden de verticalen der beide plaatsen A en B in één vlak liggen, namelijk in het vlak, dat door A, door B en door het middelpunt der aarde gaat, zoodat dan de waarnemingen in A en B op hetzelfde physische oogenblik zouden gedaan zijn.

Bij de afgeplatte gedaante der aarde is dit echter niet alzoo. Het vlak, dat door de verticaal van A en door B gaat, is, algemeen genomen, niet meer hetzelfde vlak als dat, hetwelk door de verticaal van B en door A gaat; en de waarnemingen kunnen derhalve niet op hetzelfde physische oogenblik hebben plaats gehad. In dit geval zal men aan het verschil der beide waargenomen tijden eene correctie moeten toebrengen, om het verschil van de lengten der beide plaatsen te vinden; en het is in het bepalen dezer correctie, dat de oplossing van het vraagstuk bestaat, waartoe wij thans overgaan.

Laten A en B (Fig. 63) de beide plaatsen voorstellen, PQpE en PQ'pE' derzelver elliptische meridianen. Laat voorts Pp de as der aarde, M haar middelpunt en QQ'EE' den evenaar verbeelden, welks middellijnen QE en Q'E' in de vlakken der genoemde meridianen gelegen zijn. Indien dan AB de koorde is, die A en B vereenigt, terwijl TAC en T'BD de verticalen van de beide plaatsen zijn, de as Pp in C en D ontmoetende, zal het hemellicht, uit A in het vlak ABC, en uit B in het vlak ABD, zijn waargenomen.

Laten nu m en n de halve assen en $m Sin. \varepsilon$ de uitmiddelpuntigheid der ellips PQpE zijn, dan is de vergelijking dezer ellips, zoo wij den oorsprong der abscissen in Q nemen,

$$y^2 = (2mx - x^2) Cos.^2 \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en de subnormaal p, van een willekeurig punt der ellips, wordt dan uitgedrukt door de formule

$$p = \frac{y \delta y}{\delta x} = (m - x) Cos.^2 \varepsilon \quad . \; . \quad (2).$$

Zij voorts β de geographische breedte van A, dan is *hoek* ACP $= 90° - \beta$ en wij hebben dan, voor het punt A,

$$y = p \, Tang. \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

$$AC = (m - x) Sec. \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

en $$MC = (m - x - p) Tang. \beta \quad . \; . \; . \; . \quad (5);$$

brengen wij voor y en p de waarden (1) en (2) in (3) over, dan vinden wij

$$(2mx - x^2) Cos.^2 \varepsilon = (m - x)^2 Cos.^4 \varepsilon \; Tang.^2 \beta$$

of $$m^2 - (m - x)^2 = (m - x)^2 Cos.^2 \varepsilon \; Tang.^2 \beta,$$

waaruit volgt

$$(m - x)^2 = \frac{m^2}{1 + Cos.^2\varepsilon \; Tang.^2\beta} = \frac{m^2 Cos.^2\beta}{Cos.^2\beta + Cos.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta} = \frac{m^2 Cos.^2\beta}{1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta}$$

of

$$m - x = \frac{m Cos.\beta}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)}};$$

deze waarde voor $(m - x)$ en de daarmede volgens (2) overeenstemmende waarde voor p, namelijk

$$p = \frac{m Cos.^2\varepsilon \; Cos.\beta}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)}}$$

in (4) en (5) substitueerende, vinden wij

$$AC = \frac{m}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)}} \; \ldots\ldots\ldots \; (6)$$

en

$$MC = \frac{m Sin.^2\varepsilon \; Sin.\beta}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)}} \; \ldots\ldots\ldots \; (7),$$

al welke formulen genoegzaam algemeen bekend zijn.

Zij β' de geographische breedte van B en dus *hoek* BDP $= 90^\circ - \beta'$, dan volgt uit de ellips PQ'pE', die met PQpE gelijk en gelijkvormig is, even zoo

$$BD = \frac{m}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta')}} \; \ldots\ldots\ldots \; (8)$$

en

$$MD = \frac{m Sin.^2\varepsilon \; Sin.\beta'}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta')}} \; \ldots\ldots\ldots \; (9),$$

terwijl dan het verschil van (7) en (9) geeft

$$CD = mSin.^2\varepsilon \left\{ \frac{Sin.\beta}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)}} - \frac{Sin.\beta'}{\sqrt{(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta')}} \right\} \; \ldots\ldots \; (10).$$

Om de waarde van CD te berekenen, kan men in plaats van (10) schrijven

$$CD = mSin.^2\varepsilon \left\{ Sin.\beta(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta)^{-\frac{1}{2}} - Sin.\beta'(1 - Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2\beta')^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

en vervolgens deze uitdrukking in eene reeks ontwikkelen, waardoor men gemakkelijk vindt

$$CD = mSin^2\varepsilon \left\{ (Sin\,\beta - Sin.\beta') + \tfrac{1}{2}Sin.^2\varepsilon(Sin.^3\beta - Sin.^3\beta') + \tfrac{3}{8}Sin.^4\varepsilon(Sin.^5\beta - Sin.^5\beta') + enz. \right\};$$

zullende men, zonder merkbaar van de waarheid af te wijken, zelfs kunnen nemen

$$CD = m(\beta - \beta')\; Sin.^2\varepsilon \; Cos.\tfrac{1}{2}(\beta + \beta').\; \left\{ 1 + \tfrac{3}{2}Sin.^2\varepsilon \; Sin.^2 \; \tfrac{1}{2}(\beta + \beta') \right\}.$$

Trekken wij door D en A, alsmede door C en B, lijnen DAt en CBt′ en stellen wij *hoek* TAt $= \delta$, *hoek* T′Bt′ $= \delta'$, CD $= a$, AC $= v$ en BD $= v'$, dan vinden wij, uit den driehoek DAC,

$$Tang.\delta = Tang.\; DAC = \frac{CD \; Sin.\; ACD}{AC - CD \; Cos.\; ACD} = \frac{aCos.\beta}{v - aSin.\beta} \; \ldots\ldots \; (11);$$

en uit den driehoek DBC

$$Tang.\delta' = Tang.\; DBC = \frac{CD \; Sin.\; BDC}{BD - CD \; Cos.\; BDC} = \frac{aCos.\beta'}{v' + aSin.\beta'} \; \ldots\ldots \; (12),$$

door welke beide laatste formulen δ en δ' bekend worden, alzoo door (6), (8) en (10), v, v' en a gevonden zijn.

Laat verder (Fig. 64) QQ′EE′ den evenaar en P de pool van den hemelbol verbeelden, en laten T, T′, t en t′ de punten zijn, waarin het oppervlak van dien bol, door het verlengde der lijnen CA, DB, DA en CB (Fig. 63) ontmoet wordt, dan liggen de punten T en t (Fig. 64) op den meridiaan QPE van de plaats A en de punten T′ en t′ op den meridiaan Q′PE′ van de plaats B, terwijl de groote cirkels DD′ en GG′, waarvan

de eene door T en t′, de andere door T′ en t gebragt is, de verticaalcirkels zullen zijn, waarin het hemellicht uit A en B is waargenomen geworden. Zij voorts de kleine cirkel a b a′ b′, de genoemde verticaalcirkels in de punten a, b, a′ en b′ snijdende, de dagcirkel van het hemellicht, dan zijn de hoeken QPa en Q′Pb de waargenomene tijden of uurhoeken, waarvan het verschil gelijk zou zijn aan het verschil QPQ′ van de lengten der beide plaatsen A en B, indien a en b in elkander vielen, zoodat dan de hoek A′PB′ of de boog A′B′ de te bepalene correctie is.

Deze correctie z en de waargenomene uurhoeken θ en θ' noemende, zijn in Fig. 64 bekend: QT $=\beta$, Q′T′ $=\beta'$, *hoek* QPa $=\theta$, *hoek* Q′Pb $=\theta'$, alsmede volgens de vergelijkingen (11) en (12) Tt $=\delta$ en T′t′ $=\delta'$; en zal het er op aan komen, uit deze bekenden, $z =$ A′B′ te berekenen.

Stellen wij daartoe, F het midden van den boog QQ′ zijnde: FA′ $= x$, FB′ $= x'$, FD $= y$, FG $= y'$, *hoek* D $= k$, *hoek* G $= k'$, *hoek* QPQ′ $= 2l$ en eindelijk de declinatie van het hemellicht A′a $=$ B′b $= d$, dan volgen, uit de regthoekige bolvormige driehoeken, die in de figuur voorkomen, deze formulen, te weten:

uit den driehoek QTD $\quad Tang.\beta = Tang.k\,Sin.(y+l),$
» » » Q′t′D $\quad Tang.(\beta'+\delta') = Tang.k\,Sin.(y-l),$ (13);
» » » A′aD $\quad Tang.d = Tang.k\,Sin.(y-x),$

» » » Q′T′G $\quad Tang\,\beta' = Tang.k'\,Sin.(y'-l),$
» » » QtG $\quad Tang.(\beta-\delta) = Tang.k'\,Sin.(y'+l),$ (14).
» » » B′bG $\quad Tang.d = Tang.k'\,Sin.(y'-x'),$

Indien wij de derde der vergelijkingen (13), na ontwikkeling van $Sin.(y-x)$, met $Sin.2l = 2Sin.l\;Cos.l$ vermenigvuldigen, komt er

$$Tang.d\;Sin.2l = 2Tang.k\;Sin.y\;Cos.l \times Sin.l\;Cos.x$$
$$-\;2Tang.k\;Cos.y\;Sin.l \times Cos.l\;Sin.x,$$

maar zoo wij de twee eerste der vergelijkingen (13) bij elkander optellen en van elkander aftrekken, vinden wij ook

$$2Tang.k\;Sin.y\;Cos.l = Tang.\beta + Tang.(\beta' + \delta')$$

en $$2Tang.k\;Cos.y\;Sin.l = Tang.\beta - Tang.(\beta' + \delta'),$$

derhalve is dan

$$Tang.d\ Sin.2l = \{Tang.\beta + Tang.(\beta' + \delta')\}\ Sin.l\ Cos.x - \{Tang.\beta - Tang.(\beta' + \delta')\}\ Cos.l\ Sin.x,$$

of ook

$$Tang.d\ Sin.2l = Tang.\beta\ Sin.(l - x) + Tang.(\beta' + \delta')\ Sin.(l + x) \ldots\ldots (15);$$

uit de drie vergelijkingen (14) volgt, volkomen op dezelfde wijze,

$$Tang.d\ Sin.2l = Tang.(\beta - \delta)\ Sin.(l - x') + Tang.\beta'\ Sin.(l + x') \ldots\ldots (16).$$

Daar voorts uit de figuur volgt $x + l = \theta$, $x' - l = \theta'$ en $x - x' = z$, zoo is $x - l = \theta' + z$, $x' + l = \theta - z$ en $2l = \theta - \theta' - z$, en hierdoor gaan de vergelijkingen (15) en (16) over in

$$Tang.d\ Sin.(\theta - \theta' - z) = Tang.(\beta' + \delta')\ Sin.\theta - Tang.\beta\ Sin.(\theta' + z) \ldots\ldots (17)$$

en

$$Tang.d\ Sin.(\theta - \theta' - z) = Tang.\beta'\ Sin.(\theta - z) - Tang.(\beta - \delta)\ Sin.\theta' \ldots\ldots (18).$$

Uit elk dezer vergelijkingen zou men z kunnen bepalen, indien de declinatie d bekend ware, doch naauwkeuriger in de toepassing zal het zijn, tot berekening van z, het verschil der beide laatste vergelijkingen te gebruiken, waardoor dan ook, overeenkomstig het voorstel, de onbekende onmiddellijk uit de gegevens wordt gevonden. Het verschil van (17) en (18) geeft dan

$$0 = Tang.(\beta' + \delta')\ Sin.\theta + Tang.(\beta - \delta)\ Sin.\theta' - Tang.\beta'\ Sin.(\theta - z) - Tang.\beta\ Sin.(\theta' + z),$$

of, na ontwikkeling van $Sin.(\theta - z)$ en $Sin.(\theta' + z)$,

$$\left.\begin{array}{l} Tang.(\beta' + \delta')\ Sin.\theta + Tang.(\beta - \delta)\ Sin.\theta' \\ - (Tang.\beta'\ Sin.\theta + Tang.\beta\ Sin.\theta')\ Cos.z \\ + (Tang.\beta'\ Cos.\theta - Tang.\beta\ Cos.\theta')\ Sin.z \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots (19).$$

Om nu voor z eene naauwkeurige uitdrukking te bekomen, zoude men eene vierkantsvergelijking moeten oplossen, en van hare wortels diegene kiezen, welke gelijktijdig met δ en δ' verdwijnt; doch het is blijkbaar,

dat men, dewijl z slechts een zeer klein boogje is, $Cos.z = 1$ zal mogen nemen; dit doende vindt men terstond

$$Sin.z = \frac{\{Tang.\beta' - Tang.(\beta'+\delta')\} Sin.\theta + \{Tang.\beta - Tang.(\beta-\delta)\} Sin.\theta'}{Tang.\beta' \, Cos.\theta - Tang.\beta \, Cos.\theta'},$$

waarvoor men, de kleinheid der boogjes δ en δ' in aanmerking nemende, ook zal mogen nemen

$$Sin.z = \frac{-\frac{\delta'}{Cos.^2\beta'} Sin.\theta + \frac{\delta}{Cos.^2\beta} Sin.\theta'}{Tang.\beta' \, Cos.\theta - Tang.\beta \, Cos.\theta'}$$

$$= \frac{\frac{\delta}{Cos.\beta} Cos.\beta' \, Sin.\theta' - \frac{\delta'}{Cos.\beta'} Cos.\beta \, Sin.\theta}{(Cos.\beta Cos.\beta')(Tang.\beta' Cos.\theta - Tang.\beta Cos.\theta')} \quad . \quad (20).$$

Men ziet, uit de bovenstaande uitdrukking voor $Sin.z$, dat $z = 0$ wordt, indien de plaatsen A en B op dezelfde breedte of lengte liggen; want in het eerste geval is $a = 0$ en dus volgens (11) en (12) ook $\delta = 0$ en $\delta' = 0$, terwijl in het tweede geval $\theta = 0$ en $\theta' = 0$ is.

Aanmerkingen. 1°. Indien, tot benadering der waarde van $CD = a$, de ontwikkeling niet verder dan tot $Sin.^2\varepsilon$ wordt voortgezet, zal men hebben

$$a = mSin.^2\varepsilon \,(Sin.\beta - Sin.\beta');$$

men zal verder kunnen nemen, volgens (11)

$$\frac{\delta}{Cos.\beta} = \frac{a}{v}\left(1 + \frac{a}{v} Sin.\beta + enz.\right) = \frac{a}{v} = \frac{a}{m},$$

en volgens (12)

$$\frac{\delta'}{Cos.\beta'} = \frac{a}{v'}\left(1 - \frac{a}{v'} Sin.\beta' + enz.\right) = \frac{a}{v'} = \frac{a}{m};$$

hierdoor wordt dan

$$\frac{\delta}{Cos.\beta} = \frac{\delta'}{Cos.\beta'} = \frac{a}{m} = Sin.^2\varepsilon \,(Sin.\beta - Sin.\beta')$$

en

$$z = \frac{(Sin.\beta - Sin.\beta')(Cos.\beta Sin.\theta - Cos.\beta' Sin.\theta')}{(Cos.\beta Cos.\beta')(Tang.\beta Cos.\theta' - Tang.\beta' Cos.\theta)} Sin.^2\varepsilon = PSin.^2\varepsilon.$$

In het algemeen is het zigtbaar, dat men z zal kunnen ontwikkelen in eene reeks van den vorm

$$PSin.^2\varepsilon + QSin.^4\varepsilon + RSin.^6\varepsilon + enz.$$

waarin P, Q, R, *enz.* functiën zijn van de breedten der beide plaatsen en van de waargenomene tijden. Indien men

dus eene reeks van plaatsen uitkoos, alle b. v. ongeveer in eene zuid-oostelijke rigting van elkander gelegen, en voor elke twee op elkander volgende van die plaatsen, de in het voorstel opgegevene waarnemingen herhaalde, zou men het verschil van lengte tusschen de eerste en laatste plaats kunnen berekenen door de formule

$$L - L' = \Sigma(\theta - \theta') - \Sigma(x) =$$
$$\Sigma(\theta - \theta') - Sin.^2\varepsilon.\Sigma(P) - Sin.^4\varepsilon.\Sigma(Q) - enz.;$$

doch bepaalde men daarenboven, door andere sterrekundige waarnemingen $L - L'$, dan zou men door deze zelfde formule de waarde van ε, dat is de afplatting der aarde kunnen vinden. Bij deze handelwijze ter bepaling van ε is men onafhankelijk van het uitwerksel der dampheffing.

2°. Zoo men in de formule (17) $d = 90° - aP, \beta' + \gamma' = 90° - t'P$, $\beta = 90° - TP$, $\theta - \theta' - x =$ *hoek* TPt', $\theta =$ *hoek* TPa en $\theta' + x =$ *hoek* $t'Pa$ substitueert, bekomt men

$$Cot.aP\ Sin.TPt' = Cot.t'P\ Sin.TPa - Cot.TP\ Sin.t'Pa$$

of $Cot.t'P\ Sin.TPa = Cot.aP\ Sin.TPt' + Cot.TP\ Sin.t'Pa.$

Door deze formule kan men, in eenen bolvormigen driehoek TPa, de waarde van eenen boog Pt' berekenen, die uit het hoekpunt P naar de overstaande zijde Ta getrokken wordt, indien gegeven zijn de beide zijden TP en aP, de ingesloten hoek TPa en de deelen, waarin deze hoek door den boog Pt' gedeeld wordt.

Alzoo geeft, indien van drie punten aan den hemel de regte opklimmingen en declinatiën zijn waargenomen, de formule (17) of (18) een gereed middel aan de hand, om te bepalen of die drie punten in eenen boog eens grooten cirkels gelegen zijn; een voorstel dat, gelijk bekend is, somtijds te pas kan komen.

CLXXXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar twee getallen, die de eigenschap hebben, dat het verschil, tusschen het verschil hunner derde magten en de derde magt van hun verschil, gelijk is aan het verschil tusschen de som hunner tweede magten en de tweede magt van hunne som?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. A. HANSEN, J. HEEMS-

kerk, Abz., D. W. Hinse, H. Kloos, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. Sjoenis, M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr. en G. Koster.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Stelt men voor de getallen $x+y$ en $x-y$, dan is hun verschil $2y$ en hunne som $2x$, zoodat men volgens de opgave hebben moet

$$\{(x+y)^3-(x-y)^3\}-8y^3=4x^2-\{(x+y)^2+(x-y)^2\}.$$

Deze vergelijking ontwikkelende, komt er

$$6x^2y-6y^3=2x^2-2y^2$$

of $$3y(x^2-y^2)=x^2-y^2,$$

en, na deeling door x^2-y^2,

$$3y=1$$

of $$y=\tfrac{1}{3}.$$

De begeerde getallen zijn dus $x+\frac{1}{3}$ en $x-\frac{1}{3}$, waarin x naar welgevallen genomen kan worden. Nemende b. v. $x=1$, dan zijn de verlangde getallen $\frac{4}{3}$ en $\frac{2}{3}$; voor het verschil hunner derde magten wordt dus gevonden $\frac{56}{27}$; voor de derde magt van hun verschil $\frac{8}{27}$; voor de som hunner tweede magten $\frac{20}{9}$; voor de tweede magt hunner som 4; en nu zijn naar behooren de verschillen

$$\tfrac{56}{27}-\tfrac{8}{27}=\tfrac{48}{27}=\tfrac{16}{9}$$

en $$4-\tfrac{20}{9}=\tfrac{16}{9}$$

even groot.

Aanmerking. Had men een der gelijk gegevene verschillen in eene omgekeerde orde genomen, dan zou men gevonden hebben $y=-\frac{1}{3}$; waaruit voor de getallen wederom zou verkregen zijn $x-\frac{1}{3}$ en $x+\frac{1}{3}$, even als boven.

CLXXXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men verlangt almede twee getallen te vinden, zoodanig dat het verschil, tusschen de som hunner derde magten en de derde magt van hunne som, gelijk is aan het verschil tusschen het vierkant van hunne som en de som hunner vierkanten?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. A. Hansen, D. W. Hinse, H. Kloos, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. Sjoenis, M. G. Snoer, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr. en G. Koster.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de gevraagde getallen zijn $x + y$ en $x - y$, dan is hunne som $2x$ en volgens de opgaaf moet men dus hebben

$$8x^3 - \{(x+y)^3 + (x-y)^3\} = 4x^2 - \{(x+y)^2 + (x-y)^2\}.$$

De vergelijking ontwikkelende, komt er

$$6x^3 - 6xy^2 = 2x^2 - 2y^2$$

of

$$3x(x^2 - y^2) = x^2 - y^2,$$

en, na deeling door $x^2 - y^2$,

$$3x = 1$$

of

$$x = \tfrac{1}{3}.$$

De begeerde getallen zijn dus $\frac{1}{3} + y$ en $\frac{1}{3} - y$, waarin voor y eene willekeurige waarde kan genomen worden. Neemt men $y = \frac{1}{6}$, dan vindt men voor de getallen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{6}$; de som hunner derde magten is dan $\frac{7}{54}$; de derde magt hunner som is $\frac{8}{27}$; de som hunner vierkanten is $\frac{5}{18}$; het vierkant hunner som $\frac{4}{9}$; en nu zijn naar behooren de verschillen

$$\tfrac{8}{27} - \tfrac{7}{54} = \tfrac{9}{54} = \tfrac{1}{6}$$

en

$$\tfrac{4}{9} - \tfrac{5}{18} = \tfrac{3}{18} = \tfrac{1}{6}$$

even groot.

Aanmerking. Had men een der gelijk gegevene verschillen in eene omgekeerde orde genomen, dan zou men gevonden hebben $x = -\frac{1}{3}$, waardoor men voor de verlangde getallen zou hebben verkregen $-\frac{1}{3} + y$ en $-\frac{1}{3} - y$; alsdan zou altijd ten minste een der beide gevraagde getallen negatief moeten wezen.

CLXXXIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert eindelijk nog twee getallen, die de eigenschap hebben, dat de som, van de som hunner derde magten en de derde magt van hunne som, gelijk is aan de som, van de som hunner tweede magten en de tweede magt van hunne som?

Opgelost *door* G. Koster, J. A. Hansen, D. W. Hinse, B. Lubbers, F. C. Radijs, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Y 5

OPLOSSING *van* G. KOSTER.

Stelt men voor de verlangde getallen ax en x, dan heeft men, volgens de opgave,

$$a^3x^3 + x^3 + (ax + x)^3 = a^2x^2 + x^2 + (ax + x)^2.$$

Deze vergelijking herleidende, komt er

$$(2a^3 + 3a^2 + 3a + 2)x^3 = (2a^2 + 2a + 2)x^2$$

en, door x^2 deelende,

$$(2a^3 + 3a^2 + 3a + 2)x = 2(a^2 + a + 1),$$

waaruit volgt

$$x = \frac{2(a^2+a+1)}{2a^3+3a^2+3a+2}.$$

De begeerde getallen zijn derhalve

$$\frac{2a(a^2+a+1)}{2a^3+3a^2+3a+2} \quad \text{en} \quad \frac{2(a^2+a+1)}{2a^3+3a^2+3a+2};$$

kunnende hierin voor a eene willekeurige waarde genomen worden.

Neemt men $a = 1$, dan verkrijgt men voor ieder der begeerde getallen $\frac{3}{5}$; neemt men $a = 2$, dan verkrijgt men $\frac{7}{9}$ en $\frac{7}{18}$.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van welken boog is de Secans gelijk aan de som van den Cosinus en tweemaal den Sinus?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, S. DIK, CORNSZ., J. A. HANSEN, H. KLOOS, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., J. SJOENIS, M. G. SNOER *en* J. HEEMSKERK, ABZ.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Den gevraagden boog ϕ noemende, heeft men

$$Sec.\phi = Cos.\phi + 2Sin.\phi \quad . \; . \; . \; . \quad (a).$$

De leden dezer vergelijking met $Cos.\phi$ vermenigvuldigende, komt er, omdat $Sec.\phi \times Cos.\phi = 1$ en $Cos.^2\phi = 1 - Sin.^2\phi$ is,

$$1 = 1 - Sin.^2\phi + 2Sin.\phi \; Cos.\phi$$

of wel $$Sin.\phi(Sin.\phi - 2Cos.\phi) = 0,$$

waaraan voldaan kan worden door te stellen $Sin.\phi = 0$ en $Sin.\phi - 2Cos.\phi = 0$.

Door $Sin.\phi = 0$ te stellen, vindt men $\phi = 0°, \phi = 180°$,

of in het algemeen $\phi = n \times 180°$, n een positief of negatief geheel getal zijnde.

Door $Sin.\phi - 2Cos\,\phi = 0$ te stellen, komt er $Sin.\phi = 2Cos.\phi$, of $Tang\,\phi = 2$, waaruit met behulp der tafels gevonden wordt $\phi = 63°\ 26'\ 6''$, $\phi = 243°\ 26'\ 6''$, of in het algemeen $\phi = n \times 180° + 63°\ 26'\ 6''$.

AANMERKINGEN. 1°. Stellen wij $\phi = 90° - \psi$, dan gaat de vergelijking (a) over in

$$Cosec.\psi = Sin.\psi + 2Cos.\psi \quad . \; . \; . \; . \quad (b).$$

Aan de vergelijking (b) zal dus in het algemeen voldaan worden, door te nemen:

$\psi = 90° - \phi = 90° - n \times 180° = (-2n+1) \times 90° = (2m+1) \times 90°$,

of $\psi = 90° - n \times 180° - 63°26'6'' = (2m+1) \times 90° - 63°26'6''$,

waarin m weder een willekeurig positief of negatief getal verbeeldt. Zich tot positieve boogen kleiner dan 360° bepalende, vindt men dus uit de vergelijking (b), $\psi = 26°\ 33'\ 54''$, $\psi = 90°$, $\psi = 206°\ 33'\ 54''$ en $\psi = 270°$.

2°. Stellen wij in (a) $\phi = 90° + \psi$, dan komt er

$$Cosec.\psi = Sin.\psi - 2Cos.\psi \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

en hieraan zal nu in het algemeen voldaan worden, door te nemen:

$\psi = \phi - 90° = n \times 180° - 90° = (2n-1) \times 90°$

of $\psi = n \times 180° + 63°26'6'' - 90° = (2n-1) \times 90° + 63°26'6''$.

Zich wederom tot positieve boogen, kleiner dan 360° bepalende, vindt men dus uit de vergelijking (c), $\psi = 90°$, $\psi = 153°26'6''$, $\psi = 270°$ en $\psi = 333°26'6''$.

3°. Stellen wij eindelijk $\phi = 360° - \psi$, dan verandert (a) in

$$Sec.\,\psi = Cos.\,\psi - 2\,Sin.\,\psi \quad . \; . \; . \quad (d),$$

waaraan nu algemeen voldaan wordt, door te nemen

$\psi = 360° - \phi = 360° - n \times 180° = (2-n) \times 180 = m \times 180°$

en $\psi = 360° - n \times 180° - 63°26'6'' = m \times 180° - 63°26'6''$.

Zoodat, wederom alleen positieve boogen kleiner dan den omtrek des cirkels nemende, uit de vergelijking (d) volgt, $\psi = 0°$, $\psi = 116°33'54''$, $\psi = 180°$ en $\psi = 296°33'54''$.

CLXXXV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van welken boog is de Secans gelijk aan de som van den Sinus en tweemaal den Cosinus?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, S. DIK, CORNSZ., J. A. HANSEN, H. KLOOS, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR., J. SJOENIS *en* J. HEEMSKERK, ABZ.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Den gevraagden boog ϕ noemende, heeft men

$$Sec.\ \phi = Sin.\ \phi + 2\ Cos.\ \phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e).$$

De leden dezer vergelijking met $Cos.\ \phi$ vermenigvuldigende, komt er

$$1 = Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + 2Cos.^2\phi$$

of $$1 - 2Cos.^2\phi = Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi,$$

dat is $$-\ Cos.\ 2\phi = \tfrac{1}{2}Sin.\ 2\phi,$$

waaruit volgt $$Tang.\ 2\phi = -\ 2.$$

Hieruit vindt men, met behulp der tafels, $2\phi = 116°33'54''$ en dus $\phi = 58°16'57''$, of in het algemeen

$2\phi = n \times 180° + 116°33'54''$ en $\phi = n \times 90° + 58°16'57$; zoo men zich dus tot positieve boogen kleiner dan 360° bepaalt, voldoen aan de vergelijking (e), $\phi = 58°16'57''$, $\phi = 148°16'57''$, $\phi = 238°16'57''$ en $\phi = 328°16'57''$.

AANMERKINGEN. 1°. Stelt men in de vergelijking (e) $\phi = \psi + 90°$, dan verandert zij in

$$Cosec.\ \psi = 2Sin.\ \psi - Cos.\ \psi \quad . \quad . \quad . \quad (f),$$

waaraan nu in het algemeen voldaan wordt, door te nemen $\psi = \phi + 90° = n \times 90° + 58°16'57'' + 90° = (n+1) \times 90° + 58°16'57''$ $= m \times 90° + 58°16'57''$.

Dezelfde waarden, die aan (e) voldoen, voldoen dus ook aan (f). De vergelijkingen

$$Sec.\alpha = Sin.\alpha + 2Cos.\alpha \quad \text{en} \quad Cosec.\alpha = 2Sin.\alpha - Cos.\alpha$$

zijn dan ook, hoezeer schijnbaar verschillend, niet wezenlijk van elkander onderscheiden, waarvan men zich kan overtuigen, door de eerste met $Cos.\ \alpha$, de tweede met $Sin.\ \alpha$ te vermenigvuldigen en vervolgens de komende vergelijkingen bij elkander op te tellen, als wanneer men tot de identieke vergelijking $2 = 2(Sin.^2\alpha + Cos.^2\alpha)$ zal geraken.

2°. Stelt men in (e) $\phi = 90° - \psi$, zoo verkrijgt men de vergelijking

$$Cosec.\ \psi = Cos.\ \psi + 2Sin.\ \psi \quad . \quad . \quad . \quad (g),$$

waaraan dan voldaan wordt door in het algemeen te nemen

$\psi = 90° - \phi = 90° - n \times 90° - 58°16'57'' =$

$= (-n+1) \times 90° - 58°16'57'' = m \times 90° - 58°16'57''$, zoodat de positieve boogen kleiner dan 360°, die aan de vergelijking (g) voldoen, zijn: $\psi = 31°43'3''$, $\psi = 121°43'3''$, $\psi = 211°43'3''$ en $\psi = 301°43'3''$.

3°. Stelt men eindelijk in (e) $\phi = 360° - \psi$, dan verkrijgt men

$$Sec.\,\psi = 2Cos.\,\psi - Sin.\,\psi \;.\;.\;.\;.\;.\; (h),$$

waaraan voldaan wordt, door te nemen

$\psi = 360° - \phi = 360° - n \times 90° - 58°16'57''$

$= (4-n) \times 90° - 58°16'57'' = m \times 90° - 58°16'57''$.

Dezelfde waarden voor ψ, die aan (g) voldoen, voldoen dus ook aan (h); en men zal dan ook, even als ten aanzien der vergelijkingen (e) en (f) handelende, gemakkelijk aantoonen, dat de vergelijkingen (g) en (h) niet wezenlijk van elkander onderscheiden zijn.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door J. A. KRAJENBRINK.

Men vraagt de eenvoudigste vergelijking te vinden, van welker oplossing het afhangt, om in den cirkel regelmatige veelhoeken te kunnen beschrijven, van 7, 14, 28, enz. en in het algemeen van $2^n \times 7$ zijden?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. A. KRAJENBRINK *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Men heeft (zie J. DE GELDER, *Meetkundige Analysis*, Bl. 208 en 209) de volgende drie algemeene vergelijkingen, om den Cosinus van het $\frac{1}{n}$ gedeelte des cirkelomtreks te vinden, waarin x het genoemde $\frac{1}{n}$ gedeelte voorstelt:

$$Cos.^{\frac{n-1}{2}} x + \tfrac{1}{2} Cos.^{\frac{n-3}{2}} x - \frac{n-3}{2.\,2^2} Cos.^{\frac{n-5}{2}} x - \frac{n-5}{2.\,2^3} Cos.^{\frac{n-7}{2}} x \;.\;.$$

$$+ \frac{(n-5)(n-7)}{2.\,4.\,2^4} Cos.^{\frac{n-9}{2}} x + \frac{(n-7)(n-9)}{2.\,4.\,2^5} Cos.^{\frac{n-11}{2}} x - enz. = 0 .. (a);$$

$$Cos.^{\frac{1}{2}n-1} x - \frac{n-4}{2.\,2^2} Cos.^{\frac{1}{2}n-3} x + \frac{(n-6)(n-8)}{2.\,4.\,2^4} Cos.^{\frac{1}{2}n-5} x \;.\;.$$

$$-\frac{(n-8)(n-10)(n-12)}{2.\ 4.\ 6.\ 2^6}Cos.^{\frac{1}{2}n-7}x+enz.=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (\beta);$$

$$Cos.^{\frac{1}{2}n-2}x-\frac{n-4}{2.\ 2^2}Cos.^{\frac{1}{2}n-4}x+\frac{(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 2^4}Cos.^{\frac{1}{2}n-6}x\ .\ .$$

$$-\frac{(n-8)(n-10)(n-12)}{2.\ 4.\ 6.\ 2^6}Cos.^{\frac{1}{2}n-8}x+enz.=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (\gamma);$$

de eerste vergelijking dient voor het geval, dat n oneven, de tweede voor het geval dat n even maar geen veelvoud van 4, en de derde voor het geval dat n een veelvoud van 4 is.

Om nu eenen regelmatigen zevenhoek in den cirkel te beschrijven, is het genoegzaam den Cosinus van $\frac{1}{7}$ des omtreks te bepalen; hiertoe neme men slechts, in de vergelijking (α), $n = 7$ als wanneer men terstond verkrijgt

$$Cos.^3x + \tfrac{1}{2}Cos.^2x - \tfrac{1}{2}Cos.x - \tfrac{1}{8} = 0\ .\ .\ .\ (1),$$

zoodat de constructie eens dergelijken veelhoeks van de oplossing eener derdemagtsvergelijking afhangt, en dus niet door passer en liniaal kan worden verrigt. De vergelijking (1) heeft drie bestaanbare en wel éénen positieven en twee negatieve wortels, die respectievelijk de Cosinussen van $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ en $\frac{3}{7}$ des omtreks zijn.

Om den regelmatigen veertienhoek in den cirkel te beschrijven, zonder eene voorafgaande constructie van den zevenhoek, is het voldoende den Cosinus van $\frac{1}{14}$ des omtreks te bepalen; hiertoe neme men slechts in (β) $n = 14$, dan verkrijgt men de vergelijking

$$Cos.^6x - \tfrac{7}{4}Cos.^4x + \tfrac{7}{8}Cos.^2x - \tfrac{1}{64} = 0\ .\ .\ (2),$$

welker wortels respectievelijk de Cosinussen van $\frac{1}{14}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{5}{14}$ en $\frac{6}{14}$ des omtreks zijn. In de vergelijking (2) alzoo de wortels der vergelijking (1) begrepen zijnde, is het voorste lid van (2) door het voorste lid van (1) deelbaar, zoodat men deze deeling werkelijk verrigtende, de nieuwe vergelijking

$$Cos.^3x - \tfrac{1}{2}Cos.^2x - \tfrac{1}{2}Cos.x + \tfrac{1}{8} = 0\ .\ .\ (2')$$

verkrijgt. De wortels hiervan zijn klaarblijkelijk dezelfde als die der vergelijking (1), maar met tegengestelde teekens; en wijzen de Cosinussen van $\frac{1}{14}$, $\frac{3}{14}$ en $\frac{5}{14}$ des omtreks aan.

Om, zonder voorafgaande constructie van veelhoeken van minder zijden, dadelijk eenen regelmatigen acht en twintig-

hoek in den cirkel te beschrijven, is het toereikend, den Cosinus van $\frac{1}{28}$ des omtreks te bepalen; hiertoe neme men slechts in (γ) $n = 28$ en verkrijgt dan de vergelijking

$$Cos.^{12}x - 3Cos.^{10}x + \tfrac{55}{16}Cos.^{8}x - \tfrac{15}{8}Cos.^{6}x + \tfrac{63}{128}Cos.^{4}x \ . \ .$$
$$- \tfrac{7}{128}\,Cos.^{2}x + \tfrac{7}{4096} = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3),$$

welker wortels respectievelijk de Cosinussen zijn van $\frac{1}{28}$, $\frac{2}{28}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{4}{28}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{6}{28}$, $\frac{8}{28}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{10}{28}$, $\frac{11}{28}$, $\frac{12}{28}$ en $\frac{13}{28}$ des omtreks. Dewijl hieronder nu weder de wortels van de vergelijking (2) begrepen zijn, moet het voorste lid van (3) door dat van (2) deelbaar wezen, zoodat men die deeling werkelijk uitvoerende tot de nieuwe vergelijking

$$Cos.^{6}x - \tfrac{7}{4}Cos.^{4}x + \tfrac{7}{8}Cos.^{2}x - \tfrac{7}{64} = 0 \ . \ . \ (3')$$

geraakt, welker wortels de Cosinussen van $\frac{1}{28}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{9}{28}$, $\frac{11}{28}$ en $\frac{13}{28}$ des omtreks zijn.

Doordien de wortels der vergelijking (3') twee aan twee even groot zijn met verschillende teekens, zal men haar voorste lid, als het ontwikkelde product van de beide factoren

$Cos.^{3}x + ACos.^{2}x + BCos.x + C$ en $Cos.^{3}x - ACos.^{2}x + BCos.x - C$

kunnen beschouwen. Hierin dan de coëfficienten A, B en C volgens de gewone leerwijze bepalende, wordt de vergelijking (3') ontbonden in de twee vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} Cos^{3}x - (\tfrac{1}{2}\sqrt{7})\,Cos.^{2}x + \tfrac{1}{8}\sqrt{7} = 0 \\ Cos^{3}x + (\tfrac{1}{2}\sqrt{7})\,Cos.^{2}x - \tfrac{1}{8}\sqrt{7} = 0 \end{array}\right\} \ . \ . \ (3''),$$

van welker oplossing dan nu het beschrijven van den regelmatigen acht en twintighoek afhangt. Daar echter de zesdemagtsvergelijking (3') van den derdemagtsvorm is, zoo is zij door hare ontbinding in de twee factoren (3''), eigenlijk niet tot lageren graad gebragt, weshalve wij dan ook hiervan verder geen gebruik zullen maken. Alleen zij nog opgemerkt, dat de grootste positieve wortel van de eerste der beide vergelijkingen (3''), de Cosinus van $\frac{1}{28}$ des omtreks is.

Daar, zoo als wij reeds opgemerkt hebben, de regelmatige zevenhoek niet met passer en liniaal kan geconstrueerd worden, zal het geen betoog behoeven, dat ook den regelmatigen veelhoek van 7×2^{n} zijden niet met deze werktuigen kan worden beschreven. Heeft men echter eens het $\frac{1}{7}$ gedeelte van den omtrek eens cirkels, door de oplossing

der derdemagtsvergelijking (1) bepaald, dan zal niets gemakkelijker zijn, dan dien omtrek, het zij door constructie, het zij door berekening, in 7×2^n gelijke deelen te verdeelen. Wij zullen ons dus niet bezig houden, met eene algemeene vergelijking voor die verdeeling op te sporen; en vergenoegen ons met na te gaan, tot welken laagsten graad die algemeene vergelijking zou kunnen gebragt worden.

Voor den veelhoek van 7×2^n zijden (n grooter dan 1 zijnde) vinden wij door (γ) eene vergelijking

$$V = 0, \text{ van den } (7 \times 2^{n-1} - 2)^{\text{den}} \text{ graad;}$$

voor den veelhoek van 2_n zijden, vinden wij door (γ) almede eene vergelijking

$$V' = 0, \text{ van den } (2^{n-1} - 2)^{\text{den}} \text{ graad;}$$

daar nu de wortels der laatste vergelijking ook in de eerste begrepen zijn, moet V door V′ deelbaar zijn en door het verrigten dier deeling, komen wij dan, voor den veelhoek van 7×2^n zijden, tot eene vergelijking

$$W = 0, \text{ van den } (6 \times 2^{n-1})^{\text{den}} \text{ graad.}$$

Voor den veelhoek van $7 \times 2^{n-1}$ zijden, geraken wij even zoo tot eene vergelijking

$$W' = 0, \text{ van den } (6 \times 2^{n-2})^{\text{den}} \text{ graad;}$$

en daar de wortels dezer vergelijking, weder alle in de vergelijking $W = 0$ moeten begrepen zijn, is ook W door W′ deelbaar, zoodat wij, door deze deeling uit te voeren, voor den veelhoek van 7×2^n zijden, tot eenvoudigste vergelijking zullen bekomen, eene vergelijking

$$X = 0, \text{ van den } (6 \times 2^{n-2})^{\text{den}} \text{ graad.}$$

Neemt men echter in aanmerking, dat in deze vergelijking slechts de evene magten van *Cos. x* voorkomen, dan volgt hieruit, dat het beschrijven van eenen regelmatigen veelhoek van 7×2^n zijden, zonder voorafgaande constructiën van veelhoeken van minder zijden, in het algemeen van de oplossing eener $(3 \times 2^{n-2})^{\text{de}}$ magtsvergelijking afhangt, waarvan de wortels dan zoowel positief als negatief moeten genomen worden.

CLXXXVII. Voorstel.

Door L. van de Kasteele.

De differentiaal-vergelijking

$$(y - x)\delta y = \frac{n(1 + y^2)\ \sqrt{(1 + y^2)}}{\sqrt{(1 + x^2)}}\delta x$$

te integreren?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. S. Speijer, J. Bassan, L. van de Kasteele *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stellen wij $x = Tang.\phi$ en $y = Tang.\psi$, dan is $\sqrt{(1 + x^2)} = Sec.\phi$, $\sqrt{(1 + y^2)} = Sec.\psi$, $\delta x = \frac{\delta\phi}{Cos.^2\phi} = Sec.^2\phi\delta\phi$, $\delta y = \frac{\delta\psi}{Cos.^2\psi} = Sec.^2\psi\delta\psi$, zoodat de opgegevene differentiaal-vergelijking verandert in

$$(Tang.\psi - Tang.\phi)\ Sec.^2\psi\delta\psi = \frac{nSec.^3\psi}{Sec.\phi}\ Sec.^2\phi\delta\phi$$

of

$$\frac{Tang.\psi - Tang\,\phi}{Sec.\psi\ Sec.\phi}\ \delta\psi = n\delta\phi,$$

waarvoor wij, omdat $\frac{Tang\,\psi - Tang.\phi}{Sec.\psi\ Sec.\phi} = Sin.(\psi - \phi)$ is, ook kunnen schrijven

$$Sin.(\psi - \phi)\delta\psi = n\delta\phi.$$

Zij verder $\psi - \phi = \frac{1}{2}\pi - \chi$, waardoor $Sin.(\psi - \phi) = Cos.\chi$ en $\delta\phi = \delta\psi + \delta\chi$ wordt, dan gaat de laatste vergelijking over in

$$Cos.\chi\delta\psi = n\delta\psi + n\delta\chi,$$

zoodat wij nu te integreren hebben

$$\delta\psi = \frac{n\delta\chi}{-n + Cos.\chi}.$$

Passen wij hierop toe de algemeene formule, voorkomende bij I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 254, dan vinden wij terstond:

1°. Voor het geval dat $n < 1$ is,

$$\psi = \frac{n}{\sqrt{(1 - n^2)}}\ Log.\ \frac{-nCos.\chi + 1 + Sin.\chi\sqrt{(1 - n^2)}}{-n + Cos.\chi};$$

en 2°. Voor het geval dat $n > 1$ is,

$$\psi = \frac{n}{\sqrt{(n^2 - 1)}}\ Boog\ Cos.\ \frac{nCos.\chi - 1}{n - Cos.\chi}.$$

Nu is, volgens de verrigte substitutiën,

$$\psi = \text{Boog Tang.}y$$

$$\text{Cos.}\chi = \text{Sin.}(\psi - \phi) = \frac{\text{Tang.}\psi - \text{Tang.}\phi}{\text{Sec.}\psi\,\text{Sec.}\phi} = \frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}},$$

en dus $\text{Sin.}\chi = \sqrt{(1-\text{Cos.}^2\chi)} = \dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$;

wij verkrijgen derhalve voor de begeerde integraal, indien $n < 1$ is,

$$\text{Boog Tang.}y + C =$$

$$\frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}\,\text{Log.}\,\frac{-n(y-x)+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+(1+xy)\sqrt{(1-n^2)}}{-n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+(y-x)};$$

en indien $n > 1$ is,

$$\text{Boog Tang.}y + C' =$$

$$\frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}}\,\text{Boog Cos.}\,\frac{n(y-x)-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-(y-x)},$$

welke laatste vergelijking, omdat men in het algemeen heeft $\text{Boog Cos.}a = \text{Boog Tang.}\,\dfrac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$, dadelijk herleidbaar is tot

$$\text{Boog Tang.}y + C' =$$

$$\frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}}\,\text{Boog Tang.}\,\frac{(1+xy)\sqrt{(n^2-1)}}{n(y-x)-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}.$$

Voor het geval dat $n = \pm 1$ is, schijnen de gevondene integralen niet bruikbaar te zijn; merken wij echter op, dat voor $n = \pm 1$ de boog, die in de laatste vergelijking voorkomt, gelijk nul wordt en men dus voor dien boog deszelfs tangens in de plaats mag stellen, dan vinden wij voor $n = \pm 1$

$$\text{Boog Tang.}y + C' = \frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}} \times \frac{(1+xy)\sqrt{(n^2-1)}}{n(y-x)-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$$

$$= \frac{n(1+xy)}{n(y-x)-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}};$$

de begeerde integraal is dus, voor $n = +1$

$$\text{Boog Tang.}y + C' = \frac{1+xy}{(y-x)-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$$

en voor $n = -1$

$$\text{Boog Tang.}\,y + C' = \frac{1+xy}{(y-x)+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}.$$

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door P. KROM.

Men vraagt de waarde te vinden van de onderling gelijke breuken $\frac{5x+6}{17}$ *en* $\frac{9x-3}{26}$*, zonder, uit de gegevene gelijkheid dier breuken, het zij de onbekende x, het zij een veelvoud of gedeelte van die onbekende te bepalen?*

OPGELOST *door* P. KROM, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, H. KLOOS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* P. KROM.

Dewijl de waarde van een gebroken niet verandert, wanneer men teller en noemer met een zelfde getal vermenigvuldigt, kunnen wij teller en noemer van de eerste breuk met 9 en van de tweede met 5 vermenigvuldigen, om die breuken te verkrijgen in de vormen

$$\frac{45x+54}{153} = \frac{45x-15}{130}.$$

Daar voorts in het algemeen, zoo $a : b = c : d$ is, ook $a - c : b - d = a : b = c : d$ en dus altijd $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ is, zoo hebben wij, door $a = 45x+54$, $b = 153$, $c = 45x - 15$ en $d = 130$ te nemen,

$$\frac{45x+54}{153} = \frac{45x-15}{130} = \frac{(45x+54)-(45x-15)}{153-130} = \frac{69}{23} = 3;$$

zoodat dan, voor de waarde der opgegevene onderling gelijke breuken, het getal 3 gevonden wordt, zonder dat x, of een veelvoud of een deel van x, zijn bepaald geworden.

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door J. SJOENIS.

Uit de vergelijking

$$ab[(x-a)(x-b)+a^2-b^2] = [a^2(x-b)+b^2(x-a)]\sqrt{(a^2-b^2)}$$

de waarde van x te vinden? (*)

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. A. HANSEN, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, J. C. OLIVIER, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

(*) P. J. BAUDET, *Algebra*, 3e Deel, 83ste Voorstel.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Indien wij ter bekorting $x - a = p$, $x - b = q$ en $a^2 - b^2 = c^2$ stellen, wordt de opgegevene vergelijking

$$ab(pq + c^2) = (a^2q + b^2p)c$$

of na ontwikkeling en verplaatsing van termen

$$abpq - b^2pc - a^2qc + abc^2 = 0.$$

Als nu ziet men gemakkelijk, dat het voorste lid dezer vergelijking in twee factoren kan ontbonden worden, zoodat men voor dezelve kan schrijven

$$(bp - ac)(aq - bc) = 0,$$

weshalve aan de vergelijking niet anders voldaan kan worden, dan door te stellen $bp - ac = 0$ of $aq - bc = 0$.

Uit $bp - ac = 0$ volgt

$$bp = ac,$$

dat is

$$b(x - a) = a\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

waaruit dan gevonden wordt

$$x - a = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 - b^2)}$$

of

$$x = a + \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 - b^2)};$$

uit $aq - bc = 0$ volgt

$$aq = bc,$$

dat is

$$a(x - b) = b\sqrt{(a^2 - b^2)},$$

waaruit gevonden wordt

$$x - b = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)}$$

of

$$x = b + \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Derhalve zijn

$$x = a + \frac{a}{b}\sqrt{(a^2-b^2)} \text{ en } x = b + \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-b^2)}$$

de waarden van x, die aan de opgegevene vergelijking voldoen.

CXC. VOORSTEL.

Door E. OLIVIER, Dz.

Hoe kan men de breuk $\frac{230}{77}$ *in twee andere breuken verdeelen, welke* 7 *en* 11 *tot noemers hebben?* (*)

(*) MEIER HIRSCH, *Verz. van Voorb.* bladz. 214. No. 33.

Opgelost *door* J. A. Hansen, D. W. Hinse, E. Olivier, Dz., J. C. Olivier, J. Sjoenis, J. S. Speijer, M. G. Snoek, J. Teixeira de Mattos, Jr., J. Heemskerk, Abz. H. Kloos, G. Koster, H. Middelburg, F. C. Radijs *en* A. Volkerse.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Voor de tellers der gedeeltelijke breuken x en y stellende, moet men hebben

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77},$$

of met 77 vermenigvuldigende

$$11x + 7y = 230,$$

terwijl uit den aard der vraag x en y geheele positieve getallen moeten zijn.

Uit de laatste vergelijking volgt terstond

$$y = \frac{230 - 11x}{7} = 32 - 2x + \frac{3x + 6}{7},$$

zoodat x en y geene geheele getallen kunnen zijn, ten zij ook $\frac{3x + 6}{7}$ en bijgevolg $\frac{x + 2}{7}$ een geheel getal zij.

Men stelle dus

$$\frac{x + 2}{7} = z \text{ of } x + 2 = 7z,$$

dan volgt hieruit

$$x = 7z - 2$$

en door substitutie dezer waarde voor x

$$y = 36 - 11z,$$

zoodat nu elk geheel getal voor z genomen, geheele getallen voor x en y zal doen kennen, die aan de vergelijking, waartoe het voorstel aanleiding gaf, voldoen.

Daar echter x en y positieve getallen moeten wezen, zal men moeten hebben

$$7z > 2 \text{ en } 11z < 36$$

of

$$z > \tfrac{2}{7} \text{ en } z < 3\tfrac{3}{11},$$

weshalve men voor z geene andere waarden dan $z = 1$, $z = 2$ en $z = 3$ kan nemen.

Voor $z = 1$, is $x = 5$ en $y = 25$, zoodat men dan voor de begeerde verdeeling heeft

$$\tfrac{5}{7} + \tfrac{25}{11} = \tfrac{230}{77}.$$

Voor $z = 2$, is $x = 12$ en $y = 14$, en dan heeft men

$$\frac{12}{7} + \frac{14}{11} = \frac{230}{11}.$$

Voor $z = 3$, is $x = 19$ en $y = 3$, waaruit dan voor de verlangde verdeeling volgt

$$\frac{19}{7} + \frac{3}{11} = \frac{230}{77}.$$

Het gebroken $\frac{230}{77}$ kan dus alleen op de drie bovengevondene wijzen in twee breuken verdeeld worden, waarvan 7 en 11 de noemers zijn.

CXCI. VOORSTEL.

Door E. OLIVIER, Dz.

Wanneer in de uitdrukking $a^2x^2 + cy^2$, *a en c twee rationale getallen zijn, zoo is de vraag, welke rationale getallen men voor x en y zal kunnen nemen, opdat de genoemde uitdrukking een volkomen vierkant zij?* (*)

OPGELOST *door* E. OLIVIER, Dz., J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, J. C. OLIVIER, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, G. KOSTER, F. C. RADIJS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* E. OLIVIER, Dz.

Men stelle voor den vierkantswortel uit de opgegevene uitdrukking $ax + \frac{m}{n}y$, dan heeft men

$$a^2x^2 + cy^2 = \left(ax + \frac{m}{n}y\right)^2.$$

Hieruit volgt: door ontwikkeling

$$a^2x^2 + cy^2 = a^2x^2 + \frac{2amxy}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$$

of

$$cy^2 = \frac{2amxy}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2};$$

door vermenigvuldiging met n^2, na deeling door y,

$$cn^2y = 2amnx + m^2y,$$

en door afzondering van y

$$y = \frac{2amnx}{cn^2 - m^2}.$$

De laatste vergelijking geeft aanleiding tot de evenredigheid

$$x : y = cn^2 - m^2 : 2amn;$$

men kan derhalve stellen

(*) MEIER HIRSCH, *Verz. van Voorb.* bladz. 214. No. 85.

$$x = cn^2 - m^2 \text{ en } y = 2amn,$$

waardoor dan, voor alle willekeurige rationale waarden van m en n, de opgegevene uitdrukking een volkomen vierkant wordt. Men vindt namelijk

$$\begin{aligned} a^2x^2 + cy^2 &= a^2(cn^2 - m^2)^2 + 4a^2cm^2n^2 \\ &= a^2(c^2n^4 - 2cm^2n^2 + m^4 + 4cm^2n^2) \\ &= a^2(c^2n^4 + 2cm^2n^2 + m^4) \\ &= a^2(cn^2 + m^2)^2. \end{aligned}$$

CXCII. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn: een hoek, de som der zijden om dien hoek en de middellijn des ingeschreven cirkels?

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Laat ABC (Fig. 65) een driehoek met deszelfs ingeschreven cirkel zijn, en trekken wij uit het middelpunt M van dien cirkel lijnen naar de hoekpunten des driehoeks en naar de raakpunten, indien dan gegeven zijn AC + BC $= s$, MD = ME = MF $= r$, *hoek* ACB $= C$, en wij BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$, *hoek* BAC $= A$, *hoek* ABC $= B$ stellen, hebben wij ter berekening van dien driehoek het volgende.

Uit de regthoekige driehoeken MCD en MCE, waarin *hoek* MCD = *hoek* MCE $= \frac{1}{2}C$ is, blijkt dat men heeft

$$CD = CE = r Cot. \tfrac{1}{2}C,$$

en omdat AF = AE en BF = BD is, heeft men verder

$$AB = AF + BF = AE + BD = AC + BC - (CE + CD)$$

of

$$c = s - 2r Cot. \tfrac{1}{2}C \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

waardoor de zijde c des driehoeks gevonden wordt.

Laat vervolgens uit A eene lijn evenwijdig met MC getrokken worden, tot dat zij het verlengde van BC in G ontmoet, dan is

$$hoek\, CAG = hoek\, ACM = \tfrac{1}{2}C \text{ en } hoek\, AGC = hoek\, MCB = \tfrac{1}{2}C$$

dus ook *hoek* CAG = *hoek* AGC en AC = CG;

derhalve is dan: *hoek* GAB $= A + \frac{1}{2}C$

en BG = CG + BC = AC + BC $= s$.

Nu volgt, uit den driehoek ABG,

$$Sin.\ GAB : Sin.\ AGB = BG : AB$$

of $$Sin.(A + \tfrac{1}{2}C) : Sin.\tfrac{1}{2}C = s : c,$$

waaruit men heeft

$$Sin.(A + \tfrac{1}{2}C) = \frac{sSin.\tfrac{1}{2}C}{c}$$

of, door substitutie der waarde (1) voor c gevonden,

$$Sin.(A + \tfrac{1}{2}C) = \frac{sSin.\tfrac{1}{2}C}{s - 2rCot.\tfrac{1}{2}C} \ . \ . \ . \ (2).$$

Verder is klaarblijkelijk

$$B + \tfrac{1}{2}C = 180° - (A + \tfrac{1}{2}C) \ . \ . \ . \ (3),$$

alsmede $$a = \frac{Sin.A}{Sin.C}c \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

en $$b = \frac{Sin.B}{Sin.C}c \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5),$$

zoodat men door het stelsel vergelijkingen (1), (2), (3), (4) en (5) den geheelen driehoek kan berekenen.

Daar volgens (3) $Sin.(B + \tfrac{1}{2}C) = Sin.(A + \tfrac{1}{2}C)$ is, zal het slechts eene verwisseling der hoeken A en B en dus ook van de zijden a en b ten gevolge hebben, indien men de beide waarden van $A + \tfrac{1}{2}C$, die uit (2) voortvloeijen met elkander verwisselt; zonder dat dit overigens op den berekenden driehoek van invloed zal wezen.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. Indien men den driehoek uit de gegevens wilde construeren, zou men dit aldus kunnen doen.

Men beschrijve uit een willekeurig punt M als middelpunt, met den gegevenen straal, eenen cirkel DEF (Fig. 66) en trekke daaraan twee raaklijnen CR en CS, elkander onder den gegeven hoek C snijdende; op eene dezer raaklijnen, bijv. op CS neme men CQ $= s$, DG $=$ CD en beschrijve vervolgens uit Q als middelpunt met QG als straal eenen cirkelboog, welke de lijn door C en M getrokken ergens in H snijdt. Indien men dan eerst QH, en vervolgens evenwijdig met QH eene raaklijn AB aan den cirkel trekt, zal ABC de begeerde driehoek zijn. Om dit aan te toonen is het genoegzaam te doen zien, dat door deze constructie AC $+$ BC $=$ CQ $= s$ zal geworden zijn.

Volgens eene eigenschap der driehoeken, waarin een

hoek middendoorgedeeld is, heeft men de evenredigheid

$$AC : BC = AI : BI,$$

waaruit volgt

$$AC + BC : AB = BC : BI;$$

maar wegens de evenwijdigheid van AB en QH is ook

$$BC : BI = CQ : QH,$$

zoodat wij in verband met de vorige evenredigheid hebben

$$AC + BC : AB = CQ : QH,$$

waaruit wederom volgt

$$AC + BC - AB : CQ - QH = AB : QH;$$

maar nu is $AC + BC - AB = CE + CD = 2CD$ en $CQ - QH = CQ - QG = CG = 2CD$, zoodat in de laatste evenredigheid, de termen der eerste reden even groot zijnde, ook die der tweede reden onderling gelijk moeten zijn en men dus heeft

$$AB = QH = QG;$$

en hieruit volgt nu verder

$$AC + BC = AB + 2CD = QG + CG = CQ,$$

hetgeen moest bewezen worden.

De cirkelboog GH snijdt de lijn CM nog in een ander punt H'; ook dit punt kan men tot constructie des driehoeks gebruiken, en zal dan eenen driehoek A'B'C verkrijgen, die gelijk en gelijkvormig met ABC zijnde, daarvan slechts in stand verschilt.

CXCIII. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Eenen driehoek te berekenen als gegeven zijn: de basis, de inhoud en de middellijn des omgeschreven cirkels?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. BADON GHIJBEN, F. C. RADIJS, J. A. HANSEN, D. W. HINSE, H. KLOOS, H. MIDDELBURG, J. C. OLIVIER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* G. KOSTER.

I. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC (Fig. 67) de bedoelde driehoek, M het middelpunt van den daarom beschrevenen cirkel zijn en zij gegeven $AB = a$, $AMD = 2r$ en *Inh. drieh.* $ABC = p^2$.

Nu heeft men, gelijk bekend is, ter bepaling van den hoek C, onmiddellijk de formule

$$Sin.C = \frac{a}{2r};$$

neemt men verder het verschil der hoeken A en B tot onbekende aan, en stelt men dus *hoek* B — *hoek* A $= \phi$, waardoor

hoek A $= 90° - \frac{1}{2}(C + \phi)$ en *hoek* B $= 90° - \frac{1}{2}(C - \phi)$ wordt, dan heeft men, uit de bekende formule

$$Inh.\ drieh.\ ABC = \tfrac{1}{2}AB^2 \frac{Sin.A\ Sin.B}{Sin.C},$$

de vergelijking

$$p^2 = \tfrac{1}{2}a^2 \frac{Cos.\frac{1}{2}(C + \phi)\ Cos.\frac{1}{2}(C - \phi)}{Sin.C}$$

of, omdat

$$Cos.\tfrac{1}{2}(C + \phi)\ Cos.\tfrac{1}{2}(C - \phi) = \tfrac{1}{2}(Cos.C + Cos.\phi) \text{ is,}$$

$$p^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \frac{Cos.C + Cos.\phi}{Sin.C},$$

waaruit gevonden wordt

$$Cos.\phi = \frac{4p^2 Sin.C - a^2 Cos.C}{a^2}.$$

Om deze formule voor de berekening door logarithmen geschikter te maken, kan men stellen

$$\frac{4p^2}{a^2} = Tang.\alpha,$$

alsdan wordt

$$Cos.\phi = Tang.\alpha\ Sin.C - Cos.C = -\frac{Cos.(C + \alpha)}{Cos.\alpha},$$

zoodat men het volgende stelsel van formules heeft, om ϕ en verder den geheelen driehoek te berekenen:

$$Sin.C = \frac{a}{2r};\ Tang.\alpha = \frac{4p^2}{a^2};\ Cos.\phi = -\frac{Cos.(C+\alpha)}{Cos.\alpha};$$

hoek A $= 90° - \frac{1}{2}(C + \phi)$; *hoek* B $= 90° - \frac{1}{2}(C - \phi)$;

$$AC = \frac{a}{Sin.C} Sin.B = 2r Cos.\tfrac{1}{2}(C - \phi),$$

en $$BC = \frac{a}{Sin.C} Sin.A = 2r Cos.\tfrac{1}{2}(C + \phi).$$

II. Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Indien wij AC $= x$ en BC $= y$ stellende, de gegevens door dezelfde letters als in de vorige oplossing aanduiden, geeft de eigenschap, dat de straal des omgeschreven cir-

kels gelijk is aan het product der zijden gedeeld door 4 maal den inhoud des driehoeks, aanleiding tot de vergelijking

$$xy = \frac{4p^2r}{a};$$

uit de bekende formule, waardoor de inhoud eens driehoeks in zijne zijden wordt uitgedrukt, heeft men verder

$$-x^4 - y^4 - a^4 + 2x^2y^2 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = 16p^4.$$

Zoo wij nu de laatste vergelijking van 4 maal het vierkant der eerste aftrekken, komt er

$$x^4 + y^4 + a^4 + 2x^2y^2 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 = \frac{64p^4r^2}{a^2} - 16p^4,$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = \frac{16p^4(4r^2 - a^2)}{a^2}.$$

Stellen wij ter bekorting $\sqrt{(4r^2 - a^2)} = k$, dan volgt uit de laatste vergelijking

$$x^2 + y^2 - a^2 = \pm \frac{4p^2k}{a};$$

zullende, naar gelang men het bovenste of benedenste teeken gebruikt, $x^2 + y^2 > a^2$ of $x^2 + y^2 < a^2$ en dus de hoek over de zijde a scherp of stomp zijn.

Wij hebben dan nu de beide vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm \frac{4p^2k}{a} \quad \text{en} \quad xy = \frac{4p^2r}{a},$$

waaruit door eene algemeen bekende leerwijze, en in de onderstelling dat wij de grootste der onbekende zijden door x hebben voorgesteld, gevonden wordt:

1°. Voor het geval, dat de hoek over de gegevene zijde scherp is:

$$x + y = \sqrt{\left\{a^2 + \frac{4p^2}{a}(2r + k)\right\}}$$

en $$x - y = \sqrt{\left\{a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r - k)\right\}}.$$

2°. Voor het geval, dat de genoemde hoek stomp is:

$$x + y = \sqrt{\left\{a^2 + \frac{4p^2}{a}(2r - k)\right\}}$$

en $$x - y = \sqrt{\left\{a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r + k)\right\}}.$$

Door deze formulen worden dan nu de onbekende zijden

des driehoeks gevonden, zoodat men dan ook de hoeken daaruit berekenen kan.

Tot de bestaanbaarheid van den driehoek wordt vooreerst gevorderd, dat $k = \sqrt{(4r^2 - a^2)}$ bestaanbaar en dus $a < 2r$ gegeven zij. Deze lijn k stelt dan de koorde voor, bij voorbeeld BD, die uit een der uiteinden van de gegevene zijde getrokken wordt naar het punt van den cirkelomtrek, dat diametraal over het andere uiteinde van die zijde gelegen is. Dus is dan ook altijd $k < 2r$.

Ten tweede wordt vereischt, dat ten minste eene der twee bovengevondene waarden voor $x - y$ bestaanbaar zij; terwijl, indien beide die waarden bestaanbaar zijn er ook twee verschillende driehoeken, een met eenen scherpen en een met eenen stompen hoek over de zijde a, aan de gegevens beantwoorden zullen. Zijn a en r naar behooren gegeven, zoodat $a < 2r$ is, en neemt men dan $p^2 = \frac{1}{4}a(2r + k)$, zoo wordt $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r - k) = 0$; neemt men dus $p^2 > \frac{1}{4}a(2r + k)$, dan wordt $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r - k)$ en zoo veel te meer $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r + k)$ negatief, zoodat dan beide waarden van $x - y$ onbestaanbaar worden. Voor $p^2 = \frac{1}{4}a(2r - k)$, wordt $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r + k) = 0$; neemt men dus $p^2 < \frac{1}{4}a(2r - k)$, dan wordt $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r + k)$ en zoo veel te meer $a^2 - \frac{4p^2}{a}(2r - k)$ positief, zoodat dan beide waarden van $x - y$ bestaanbaar zijn. Er zullen dus, onder de gegevens, of geen, of slechts een, of twee verschillende driehoeken bestaan, naar gelang p^2 boven, tusschen, of beneden de grenzen $\frac{1}{4}a(2r + \sqrt{(4r^2 - a^2)})$ en $\frac{1}{4}a(2r - \sqrt{(4r^2 - a^2)})$ gegeven wordt.

Begeert men den driehoek uit de gegevens te construeren, zoo kan men eerst eene vierde evenredige tot $\frac{1}{2}a$ en p construeren, deze zal dan de hoogte des driehoeks zijn; vervolgens kan men eenen cirkel met r als straal beschrijven en daarin eene koorde gelijk aan a plaatsen; trekt men dan

verder lijnen evenwijdig aan die koorde en daarvan aan weerszijde, op eenen afstand gelijk aan de gevondene hoogte, verwijderd, dan zullen de driehoeken, die de snijpunten der laatstgetrokkene lijnen met den cirkelomtrek tot toppen en de genoemde koorde tot bazis hebben, de begeerde zijn.

De gevondene voorwaarden, voor de bestaanbaarheid van den begeerden driehoek, worden door deze constructie volkomen bevestigd; want, naar gelang de laatstgetrokkene evenwijdige lijnen, of geen van beide, of slechts een van beide, of beide den cirkel snijden, zal de constructie, of geen, of slechts een, of twee verschillende driehoeken doen kennen.

CXCIV. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Door een regthoekig driehoekig stuk land, waarvan de eene regthoekszijde a ellen lang is, wordt eene sloot gegraven, b ellen breed en evenwijdig met de andere regthoekszijde. Zoo nu de inhouden der deelen zijn als p tot q, hoe ver is dan de kant der sloot van den scherpen hoek af?

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. S. Speijer, D. W. Hinse, H. Kloos, G. Koster, H. Middelburg, J. C. Olivier, F. C. Radijs, J. Sjoenis *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laat ABC (Fig. 68) het bedoelde stuk land en DEFG de sloot zijn, dan is gegeven AB $= a$ ellen, DF $= b$ ellen, alsmede dat de inhouden der deelen ADE en GFBC tot elkander zijn als p tot q, terwijl de afstand AD, die wij gelijk x ellen zullen stellen, moet berekend worden.

Uit de eigenschappen der figuur volgt terstond

$$\textit{Inh}.ABC : \textit{Inh}.AFG : \textit{Inh}.ADE = AB^2 : AF^2 : AD^2,$$

dus is ook, volgens eene eigenschap der evenredigheden,

$$\textit{Inh}.ABC - \textit{Inh}.AFG : \textit{Inh}.ADE = AB^2 - AF^2 : AD^2;$$

of $$\textit{Inh}.ADE : \textit{Inh}.GFBC = AD^2 : AB^2 - AF^2.$$

Maar nu is $$\textit{Inh}.ADE : \textit{Inh}.GFBC = p : q,$$

$$AD = x,\ AB = a \text{ en } AF = x + b,$$

derhalve hebben wij

$$p : q = x^2 : a^2 - (x + b)^2,$$

waaruit achtervolgens afgeleid kan worden:

$$qx^2 = a^2p - p(x + b)^2,$$
$$qx^2 = a^2p - px^2 - 2bpx - pb^2,$$
$$(p + q)x^2 + 2bpx = p(a^2 - b^2),$$
$$x^2 + 2\frac{bp}{p + q}x = \frac{p(a^2 - b^2)}{p + q};$$

uit deze vierkantsvergelijking wordt nu gevonden

$$x = -\frac{bp}{p + q} \pm \sqrt{\left\{\frac{b^2p^2}{(p + q)^2} + \frac{p(a^2 - b^2)}{p + q}\right\}}$$

of na behoorlijke herleiding en in het oog houdende, dat uit den aard der zaak x positief moet zijn en dus slechts het bovenste teeken bruikbaar is,

$$x = \frac{-bq + \sqrt{[a^2p^2 + pq(a^2 - b^2)]}}{p + q},$$

waardoor de gevraagde afstand in de gegevens is uitgedrukt.

Moeten de beide deelen even groot zijn, dan is $p = q$, zoodat wij voor dit bijzonder geval vinden

$$x = \tfrac{1}{2}\{- b + \sqrt{(2a^2 - b^2)}\}.$$

Aanmerking *van* J. S. Speijer. Het is blijkbaar, dat de afstand AE door de gegevens niet bepaald wordt; want de lijn AC kan in eene andere rigting, bij voorbeeld AC′, loopen, zonder dat zulks eenigen invloed op de gegevens heeft. Voorts zal men dezelfde waarde voor x vinden, indien de hoek B niet regt is, mits maar altijd de sloot evenwijdig met BC zij; want de driehoeken ABC, AFG en ADE blijven dan gelijkvormig en hunne inhouden hebben dus dezelfde verhouding als vroeger; echter is dan DF niet meer de breedte der sloot.

CXCV. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Een getal van n cijfers wordt op alle mogelijke wijzen omgezet, en de som van al deze getallen is gelijk S gegeven. Men vraagt hieruit de som van die n cijfers te vinden?

Opgelost *door* J. C. Olivier, D. W. Hinse, J. Speijer, J. Bassan, J. A. Hansen, H. Kloos, F. C. Radijs, M. G. Snoer, J. Teixeira de Mattos, Jr. *en* G. Koster.

OPLOSSING *van* J. C. OLIVIER.

Indien men aanneemt, dat het getal uit n verschillende cijfers bestaat, dan is het aantal der omzettingen $1 \times 2 \times 3 \times$ *enz.* $\ldots \times (n-1) \times n$. Plaatst men al deze omzettingen onder elkander, dan komt elk der cijfers in de kolom der eenheden $1 \times 2 \times 3 \times$ *enz.* $\ldots \times (n-1)$ malen voor, zoodat, indien men de som der cijfers x noemt, de som van de cijfers die in de kolom der eenheden staan zijn zal

$$1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x.$$

Ook in de kolom der tientallen, in de kolom der honderdtallen, enz., komt elke cijfer even dikwijls voor als in die der eenheden, zoodat, met in het oog houding van de waarde die de cijfers door hunne plaats verkrijgen, de som van de kolom der tientallen zijn zal

$$10 \left\{1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x\right\};$$

even zoo is de som van de kolom der honderdtallen

$$10^2 \left\{1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x\right\},$$

die van de kolom der duizendtallen

$$10^3 \left\{1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x\right\},$$

enz. en eindelijk die van de kolom der hoogste cijfers in rang

$$10^{n-1} \left\{1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x\right\}.$$

Voor de som van al de getallen, door de bedoelde omzettingen verkregen, wordt dus gevonden

$$\left\{1+10+10^2+10^3+\text{enz.}+10^{n-1}\right\}\left\{1\times2\times3\times\text{enz.}\ldots\times(n-1)\times x\right\},$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x \times \frac{10^n - 1}{10 - 1},$$

en daar deze som gelijk S gegeven is, heeft men de vergelijking

$$1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times x \times \frac{10^n - 1}{9} = S,$$

waaruit voor de gevraagde som der cijfers dadelijk gevonden wordt

$$x = \frac{9S}{1 \times 2 \times 3 \times \text{enz.} \ldots \times (n-1) \times (10^n - 1)}.$$

Neemt men aan, dat er onder de n cijfers a zijn die p maal, b die q maal, en dus $n - (ap + bq)$ die slechts éénmaal

voorkomen, dan kan het getal $\frac{1\times2\times3\times enz \ldots \times(n-1)n}{(1\times2\times\ldots\times p)^a.(1\times2\times\ldots\times q)^b}$ malen omgezet worden. In ieder der kolommen komt dan voor:

elk der $n-(ap+bq)$ cijfers, $\frac{1\times2\times3\times enz \ldots (n-1)}{(1\times2\times\ldots\times p)^a(1\times2\times\ldots q)^b}$ malen;

elk der a cijfers, $\frac{1\times2\times3\times enz \ldots (n-1)p}{(1\times2\times\ldots\times p)^a(1\times2\times\ldots\times q)^b}$ malen;

en elk der b cijfers, $\frac{1\times2\times3\times enz \ldots (n-1)q}{(1\times2\times\ldots\times p)^a(1\times2\times\ldots\times q)^b}$ malen;

indien men dus de som der $n - (ap + bq)$ cijfers x, de enkele som der a cijfers y, de enkele som der b cijfers z noemt, en kortheidshalve $\frac{1\times2\times3\times enz \ldots \times(n-1)}{(1\times2\times\ldots\times p)^a(1\times2\times\ldots\times q)^b} = P$ stelt, vindt men voor de som der cijfers van elke kolom, zonder op de waarde die deze cijfers door hunne plaats verkrijgen te letten,

$$Px + Ppy + Pqz.$$

Met in het oog houding der genoemde waarde, heeft men dus, voor de som:

van de kolom der eenheden $(Px + Ppy + Pqz)$,
van die der tientallen $10(Px + Ppy + Pqz)$,
van die der honderdtallen $10^2(Px + Ppy + Pqz)$,
enz., en eindelijk voor de som van de kolom der hoogste cijfers in rang $10^{n-1}(Px + Ppy + Pqz)$.

De som der getallen, door al de omzettingen verkregen, wordt dan

$$(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})\ (Px + Ppy + Pqz),$$

waarvoor men weder schrijven kan

$$P(x + py + qz) \times \frac{10^n - 1}{10 - 1},$$

zoodat men nu heeft de vergelijking

$$P(x + py + qz) \times \frac{10^n - 1}{9} = S.$$

Dewijl voorts x de som der cijfers is, die slechts éénmaal, y de enkele som der cijfers die p maal, en z de enkele som der cijfers die q maal voorkomen, is $x + py + qz$ de geheele som der cijfers, zoodat, deze som X noemende,

$$PX \times \frac{10^n - 1}{9} = S$$

of $$x = \frac{98}{P(10^n - 1)}$$

wordt; hierin voor P weder hare waarde stellende, komt er eindelijk, voor de gevraagde som der cijfers, in de laatst aangenomene onderstelling,

$$x = \frac{(1\times2\times\ldots\times p)^a(1\times2\times\ldots\times q)^b}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\times(n-1)} \times \frac{98}{10^n - 1}.$$

CXCVI. VOORSTEL.

Door F. C. Radijs.

Een bak, welke de gedaante van eenen concentriek uitgeholden halven bol heeft, staat op een horizontaal vlak en is geheel met water gevuld. Wanneer deze bak bewogen wordt, zoodat deszelfs bolvormig oppervlak over het horizontale vlak rolt, stort het water er gedeeltelijk uit. Men vraagt nu de meetkunstige plaats te bepalen van het zwaartepunt van het water, dat in den bak blijft?

Opgelost *door* L. J. Ulman *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Laat APBDMC (Fig. 69) eene verticale doorsnede van den halven bol verbeelden, in dien stand, waarin de middellijn AB horizontaal en de bak geheel gevuld is, en zij Z het zwaartepunt van den inwendigen halven bol. Als nu de buiten-omtrek APB dezer doorsnede, over eene in haar vlak gelegene horizontale lijn PB″, zoodanig rolt, dat de punten van den boog PB achtervolgens met de punten van de lijn PB″ in aanraking komen, zal de bak achtervolgens de standen A′QB′D′M′C′, A″RB″D″M″C″, enz. aannemen; de middellijn AB, steeds in hetzelfde verticale vlak blijvende, zal daardoor achtervolgens de standen A′B′, A″B″, enz., verkrijgen, totdat zij eindelijk in den verticalen stand A‴B‴ komt; het punt D hierdoor gedurig dalende, zal achtervolgens in D′, D″, enz., komen en de horizontale lijnen D′E′, D″E″, enz., zullen de opvolgende standen voorstellen van den spiegel des waters, dat in den bak blijft; totdat het punt D in D‴ gekomen zijnde, de bak ledig geloopen en dus de waterspiegel verdwenen zal wezen. Het in den bak blijvende water vormt dus bolvormige segmenten D′E′, D″E″, enz., wier zwaartepunten Z′, Z″, enz., in het meergenoemde verticale vlak, en wel verticaal boven

de raakpunten Q, R, *enz.*, van den buiten-omtrek met de horizontale lijn, zullen gelegen zijn. Wanneer derhalve die zwaartepunten, volgens de bekende constructie, gevonden zijn, zal de kromme lijn ZZ'Z"D", welke door dezelve getrokken wordt, de bedoelde meetkunstige plaats zijn, indien aan den bak geene andere beweging gegeven wordt dan die, waarbij de boog PB over de horizontale lijn PB" rolt. Wij kunnen echter ook onderstellen, dat, terwijl de middellijn AB altijd in hetzelfde verticale vlak blijft, de boog PA over de lijn Pb, het verlengde van PB" rolt, als wanneer wij eene tweede kromme lijn Zz verkrijgen, die met de eerste gelijk en gelijkvormig en symmetriek met dezelve ten opzigte van de lijn MP geplaatst is. Eindelijk kunnen wij dezelfde beweging, die wij voor ééne verticale doorsnede beschouwd hebben, ook aan alle andere door de lijn MP gaande verticale doorsneden toekennen; en hieruit blijkt dan, dat de gevraagde meetkunstige plaats een omwentelingsvlak is, voortgebragt door de omwenteling der kromme lijn ZZ'Z"D" om de lijn MP als as. Ter bepaling van die meetkunstige plaats, is het alzoo voldoende, de vergelijking der genoemde kromme lijn op te maken.

Laat daartoe, voor den willekeurigen stand A'QB' van den halven bol, in Fig. 70 afzonderlijk voorgesteld, M'Q de straal zijn, behoorende tot het punt van den buiten-omtrek, dat met het horizontale vlak in aanraking is, en zij S het snijpunt van dien straal met den waterspiegel D'E', dan ligt het zwaartepunt, van het bolvormig segment D'qE', op de lijn M'Q, en wel zoodanig, dat men heeft (Zie J. R. SCHMIDT, *Beg. der Statica*, §. 104, III)

$$M'Z' = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2M'q - Sq)^2}{3M'q - Sq}.$$

Stellen wij nu, na M'P loodregt op A'B' getrokken te hebben, hoek $PM'Q = \phi$, alsmede de stralen van de uit- en inwendige oppervlakken van den bak gelijk R en r, dan is $M'q = r$ en $Sq = M'q - M'S = r - r Cos. D'M'S = r - r Sin.\phi$; hierdoor wordt

$$M'Z' = \frac{3}{4} \cdot \frac{(r + r Sin.\phi)^2}{2r + r Sin.\phi} = \frac{3}{4} r \frac{(1 + Sin.\phi)^2}{2 + Sin.\phi},$$

terwijl wij verder hebben

$$\text{Boog PQ} = R\phi.$$

Nemen wij voorts, in Fig. 69, Z tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aan, en MP tot as der abscissen, zoodat wij voor de coördinaten van het punt Z' hebben

$$x = M'Z' - MZ \quad \text{en} \quad y = PQ,$$

en merken wij op, dat uit de voor M'Z' gevondene waarde, door $\phi = 0$ te nemen, dadelijk volgt $MZ = \frac{3}{8}r$, alsmede dat de lijn PQ in Fig. 69 gelijk is aan den boog PQ in Fig. 70, dan hebben wij de twee vergelijkingen

$$x = \frac{3}{4}r\frac{(1 + Sin.\phi)^2}{2 + Sin.\phi} - \frac{3}{8}r$$

en $$y = R\phi,$$

waaruit slechts ϕ behoeft geëlimineerd te worden, om de vergelijking onzer kromme lijn te bekomen.

Trekken wij daartoe uit de laatste vergelijking $\phi = \frac{y}{R}$, en brengen wij deze waarde voor ϕ in de voor x gevondene uitdrukking over, na die vooraf te hebben herleid tot den vorm

$$x = \frac{3}{8}\,rSin.\phi\,\frac{3+2Sin.\phi}{2+Sin.\phi} = \frac{3}{8}rSin.\phi\left\{2 - \frac{1}{2+Sin.\phi}\right\},$$

dan komt er

$$x = \frac{3}{8}\,rSin.\,\frac{y}{R}.\left\{2 - \frac{1}{2+Sin.\frac{y}{R}}\right\};$$

of R tot eenheid aannemende, en r in die eenheid uitgedrukt door r' voorstellende,

$$x = \frac{3}{8}\,r'Sin.y.\left\{2 - \frac{1}{2 + Sin\,y}\right\}.$$

Deze is dan nu de vergelijking der kromme lijn ZZ'Z"D", die, om de as der x wentelende, het oppervlak voortbrengt, waarin de zwaartepunten van het in den bak blijvende water zullen gelegen zijn.

Aanmerking. De beide kromme lijnen ZZ'Z"D" en Zx zijn in deze vergelijking niet begrepen, ten zij men voor y het dubbele teeken $\pm$ verkoos te stellen. Wanneer men dan ook de kromme lijn, door de gevondene vergelijking

aangegeven, beschouwt als in D'' te beginnen, en men haar, na door Z' en Z' tot in Z gekomen te zijn, verder wilde vervolgen, zou men geenszins den tak Z z verkrijgen. Dit vervolg der kromme lijn zou gevonden worden, als men het punt D, na van D'' tot D te zijn opgeklommen, nog verder liet oprijzen en dan de zwaartepunten in aanmerking nam der bolvormige segmenten, grooter dan de halve bol, die men zoo doende zou verkrijgen.

CXCVII. Voorstel.

Door K. Smit.

De zijden van eenen regthoekigen driehoek in rationale getallen te vinden, zoodanig, dat eene der regthoekszijden en de som der regthoekszijden volkomen tweedemagtsgetallen zijn?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, J. Bassan, J. A. Hansen, H. Kloos, G. Koster, H. Middelburg, F. C. Radijs *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

In het algemeen heeft men, voor de zijden van eenen regthoekigen driehoek, in rationale getallen,

$$m(p^2 - q^2),\ 2mpq \quad \text{en} \quad m(p^2 + q^2),$$

van welke vormen de twee eerste de regthoekszijden voorstellen, terwijl de derde de hypothenusa is.

Men neme nu $m = p^2 - q^2$, dan is reeds eene der regthoekszijden een volkomen vierkant, zoodat nu nog slechts de som der regthoekszijden, die voor $m = p^2 - q^2$ overgaat in

$$(p^2 - q^2) \times (p^2 - q^2 + 2pq),$$

tot een vierkant gemaakt moet worden.

Stelt men hiertoe $p = nq$, dan verandert deze uitdrukking na ontwikkeling in

$$q^4(n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 2n + 1),$$

en neemt men vervolgens, voor den vierkantswortel uit dezelve, den vorm $q^2(n^2 + n + r)$ aan, dan heeft men

$$n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 2n + 1 = (n^2 + n + r)^2$$

of, na ontwikkeling en weglating der termen die elkander vernietigen,

$$-2n^2 - 2n + 1 = (2r + 1)n^2 + 2rn + r^2;$$

en door hierin $2r + 1 = -2$, of $r = -\frac{3}{2}$ te nemen,

verkrijgt men

$$-2n + 1 = -3n + \frac{9}{4},$$

waaruit volgt $n = \frac{5}{4}$.

Om nu de zijden des driehoeks in geheele getallen te bekomen, stelle men $q = 4$, dan wordt $p = nq = 5$, $m = p^2 - q^2 = 9$, zoodat men voor de zijden des driehoeks de getallen 9×9, 9×40 en 9×41 verkrijgt; of wel in kleinere getallen 9, 40 en 41.

Om nog meerdere waarden voor n te vinden, die de uitdrukking $q^4(n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 2n + 1)$ tot een vierkant maken, kan men in dezelve $n = s + \frac{5}{4}$ stellen en vervolgens de gewone leerwijze toepassen. Worden onder de waarden, die men hierdoor voor n verkrijgt, negatieve gevonden, of zoodanige, waarvoor $q > p$ en dus m negatief wordt, dan zal de tweede regthoekszijde, of deze zijde met de hypothenusa negatief worden. Hierdoor wordt alsdan het voorstel opgelost, om het verschil in plaats van de som der regthoekszijden tot een volkomen vierkant te maken.

Indien men, in plaats van $m = p^2 - q^2$ te stellen, $m = 2pq$ stelt, zal de tweede regthoekszijde terstond een vierkant worden en de som der regthoekszijden in $2pq(p^2-q^2+2pq)$ overgaan, zoodat men dan nog deze laatste uitdrukking, of wederom $p = nq$ stellende, de uitdrukking $q^4(2n^3+4n^2-2n)$ tot een vierkant zal moeten maken. Daar nu hieraan blijkbaar voldaan wordt door $n = 1$ te nemen, stelle men $n = x + 1$, dan gaat de factor $2n^3 + 4n^2 - 2n$ over in $2x^3 + 10x^2 + 12x + 4$. Zij, om dezelve tot een vierkant te maken,

$$2x^3 + 10x^2 + 12x + 4 = (rx + 2)^2,$$

dan wordt, na ontwikkeling en weglating van termen,

$$2x^3 + 10x^2 + 12x = r^2x^2 + 4rx$$

en door hierin $r = 3$ te nemen

$$2x^3 + 10x^2 = 9x^2,$$

waaruit volgt $x = -\frac{1}{2}$;

alsdan wordt $n = x + 1 = \frac{1}{2}$, en ter bekoming van

geheele getallen $q = 2$ nemende, $p = nq = 1$ en $m = 2pq = 4$, zoodat men voor de zijden des driehoeks vindt — 12, 16 en 20, of in kleinere getallen — 3, 4 en 5. Zoo als wij vroeger aanmerkten, zullen dus 3, 4 en 5 de zijden eens driehoeks in rationale getallen zijn, waarbij behalve eene regthoekszijde, ook het verschil der regthoekszijden een vierkant is.

Door $n = y + \frac{1}{2}$ te stellen, zal men weder nog andere voldoende waarden kunnen vinden. Voor $n = y + \frac{1}{2}$, gaat namelijk de factor $2n^3 + 4n^2 - 2n$ over in $2y^3 + 7y^2 + \frac{7}{2}y + \frac{1}{4}$; stellende dus

$$2y^3 + 7y^2 + \frac{7}{2}y + \frac{1}{4} = \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2,$$

dat is:

$$2y^3 + 7y^2 + \frac{7}{2}y = x^2y^2 + xy,$$

en nemende vervolgens $x = \frac{7}{2}$, dan komt er

$$2y^3 + 7y^2 = \frac{49}{4}y^2,$$

waaruit volgt $$y = \frac{21}{8};$$

alsdan wordt $n = y + \frac{1}{2} = \frac{25}{8}$, en $q = 8$ stellende, $p = nq = 25$, $m = 2pq = 400$; zoodat men voor de zijden des driehoeks verkrijgt 400×561, 400×400 en 400×689; of wel in kleinere getallen 561, 400 en 689.

CXCVIII. Voorstel.

Door K. Smit.

Eenen ongelijkzijdigen driehoek te vinden, waarvan de zijden, de hoogte en de lijn, die den tophoek middendoordeelt, alle door rationale getallen uitgedrukt worden? (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, D. W. Hinse, J. Bassan, J. S. Speijer *en* L. J. Ulman.

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect*, No. 472.

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Laat ABC (Fig. 71) een driehoek zijn, waarin de tophoek C door eene lijn CD middendoorgedeeld is; indien dan de zijden door rationale getallen uitgedrukt worden, zal dit ook met de deelen AD en BD van de basis het geval zijn. Stellen wij nu $BD = p$, $AD = mp$, $BC = np$, dan volgt, uit de bekende evenredigheid $BD : AD = BC : AC$, dat $AC = mnp$ zal wezen, zoodat de zijden des driehoeks dan zijn

$$AB = p(m + 1),\ AC = mnp \text{ en } BC = np.$$

Verder is, mede volgens eene bekende eigenschap des driehoeks, waarin een hoek middendoorgedeeld is,

$$CD^2 = AC \times BC - AD \times BD;$$

dus verkrijgen wij, door substitutie der gestelde waarden,

$$CD^2 = mn^2p^2 - mp^2$$

of

$$CD = p\sqrt{m(n^2 - 1)},$$

zoodat het er vooreerst op aankomt voor m en n zulke rationale waarden te vinden, dat ook $\sqrt{m(n^2 - 1)}$ rationaal worde.

Hieraan wordt klaarblijkelijk terstond voldaan, met te stellen

$m = r^2 \dfrac{n - 1}{n + 1}$, waardoor wij verkrijgen

$$CD = pr(n - 1);$$

terwijl dan de zijden des driehoeks worden

$$AB = pr^2 \frac{n - 1}{n + 1} + p,\ AC = npr^2 \frac{n - 1}{n + 1},\ BC = np.$$

Zonder aan de algemeenheid der oplossing te kort te doen, kunnen wij de laatstgevondene uitdrukkingen voor de zijden, met een' zelfden factor vermenigvuldigen of door een' zelfden factor deelen; vermenigvuldigen wij dezelve alzoo alle met $\dfrac{2(n + 1)}{p(n - 1)^2}$, dan verkrijgen wij

$$AB = \frac{2}{n-1}\left\{r^2 + \frac{n+1}{n-1}\right\},\ AC = \frac{2n}{n-1}r^2,\ BC = \frac{2n}{n-1} \times \frac{n+1}{n-1}$$

of $\dfrac{n + 1}{n - 1} = q$ stellende, waardoor $n = \dfrac{q + 1}{q - 1}$

$\dfrac{2}{n - 1} = q - 1$ en $\dfrac{2n}{n - 1} = q + 1$ wordt,

$$AB = (q-1)(r^2+q),\ AC = (q+1)r^2,\ BC = (q+1)q \ldots (a).$$

Uit deze waarden voor de zijden des driehoeks zal nu gevonden worden

$AD = (q - 1)r^2$, $BD = (q + 1)q$ en $CD = 2qr$.....(β),

zoodat men, in de vormen (α), voor q en r rationale waarden nemende, de zijden eens driehoeks in rationele getallen zal vinden, zoodanig, dat ook de lijn, die den tophoek middendoordeelt, rationaal wordt. De voor q en r te nemene waarden worden alleen beperkt door de noodzakelijkheid, dat elke twee zijden eens driehoeks te zamen grooter dan de derde moeten zijn; opdat $AB + AC > BC$ zij, zal $r > 1$; en opdat $AB + BC > AC$ zij, zal $q > r$ genomen moeten worden; terwijl de vormen (α) altijd van zelven aan de voorwaarde voldoen, dat $AC + BC > AB$ is.

Om ook voor de hoogte CE des driehoeks een rationaal getal te bekomen, is het genoegzaam, de waarden van q en r zoodanig te bepalen, dat de inhoud des driehoeks een rationaal getal worde; want, uit de rationaliteit van de bazis en van den inhoud, zal die van de hoogte noodwendig volgen. Nu vinden wij uit de vormen (α), na herleiding,

$$+ AB + AC + BC = 2q(r^2 + q),$$
$$- AB + AC + BC = 2(r^2 + q),$$
$$+ AB - AC + BC = 2(q^2 - r^2),$$
$$+ AB + AC - BC = 2q(r^2 - 1);$$

en daar het gedurig product van de helften dezer vier factoren, zoo als bekend is, de tweede magt van den inhoud des driehoeks oplevert, zoo hebben wij, dien inhoud I noemende

$$I^2 = q^2(r^2 + q)^2 (q^2 - r^2)(r^2 - 1)$$

of

$$I = q(r^2 + q)\sqrt{(q^2 - r^2)(r^2 - 1)} \ldots (\gamma),$$

zoodat het, ter beantwoording aan het voorstel, genoegzaam is q en r zoodanig te bepalen, dat $(q^2 - r^2)(r^2 - 1)$ een volkomen vierkant worde.

Stellen wij daartoe

$$\sqrt{(q^2 - r^2)(r^2 - 1)} = \frac{(q - r)(r^2 - 1)}{s},$$

dan volgt hieruit

$$s^2(q^2 - r^2)(r^2 - 1) = (q - r)^2 (r^2 - 1)^2,$$

of, na door $(q - r)(r^2 - 1)$ gedeeld te hebben,

$$s^2(q + r) = (q - r)(r^2 - 1);$$

uit deze laatste vergelijking vindt men door q af te zonderen

$$q = \frac{r(r^2 - 1 + s^2)}{r^2 - 1 - s^2} \quad \ldots\ldots \quad (\delta),$$

en voor deze waarde van q wordt

$$\sqrt{(q^2 - r^2)(r^2 - 1)} = \frac{2rs(r^2 - 1)}{r^2 - 1 - s^2},$$

zoodat dan ook I en bij gevolg

$$CE = \frac{2I}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

rationaal wordt.

Men neme dus in (δ) eerst voor s en daarna voor r eene willekeurige getallenwaarde aan, mits opdat q positief worde $r > \sqrt{(s^2 + 1)}$; de waarden van r en q, die men dan heeft, voldoen van zelven aan de reeds aangewezene voorwaarden, dat $r > 1$ en $q > r$ moet wezen, en zullen dus, in (α) gesubstitueerd, de zijden eens driehoek opleveren, die aan het voorstel beantwoordt. Kunnende voorts door (β) de deelen der bazis en de deellijn, alsmede door (γ) en (ε) de inhoud en hoogte des driehoeks berekend worden. Neemt men $r = s + 1$, dan zal men door (δ) $q = r^2$ vinden; hierdoor zal AC = BC en dus de driehoek gelijkbeenig worden, zoodat men, om eenen wezenlijk ongelijkzijdigen driehoek te verkrijgen, r niet juist ééne eenheid grooter dan s mag nemen.

Stellen wij $s = 1$ en $r = 3$, dan wordt volgens (δ) $q = \frac{27}{7}$; dus volgens (α)

$$AB = \frac{1800}{49},\ AC = \frac{306}{7},\ BC = \frac{918}{49},$$

volgens (β) wordt dan verder

$$AD = \frac{180}{7},\ BD = \frac{540}{49},\ CD = \frac{162}{7};$$

volgens (γ) $\qquad I = \frac{116640}{343},$

en volgens (ε) $\qquad CE = \frac{648}{35}.$

Door al de waarden der lijnen met 49 te vermenigvul-

digen, verkrijgt men voor eenen driehoek, waarvan de zijden geheele getallen zijn,

AB=1800, AC=2142, BC=918, CD=1134, CE=907½.

Ter bekoming van eenen driehoek in kleinere getallen, kan men de laatste waarden door hunnen gemeenen deeler 18 deelen, en vindt dan

AB=100, AC=119, BC=51, CD=63, CE=50⅖.

Begeerde men eindelijk, dat ook de hoogte des driehoeks een geheel getal ware, dan zou men, al de vorige waarden met 5 vermenigvuldigende, verkrijgen

AB=500, AC=595, BC=255, CD=315, CE=252.

Het is duidelijk, dat men door aan s en r andere waarden te geven, zoo veel voldoende driehoeken kan vinden als men verkiest; en wel altijd in geheele getallen, omdat men, door al de gevondene waarden met een zelfde getal te vermenigvuldigen, de breuken kan verdrijven, en zoo doende een' driehoek bekomt, die wel grooter dan de eerstgevondene, maar altijd daaraan gelijkvormig is.

Stelt men $s = \frac{12}{13}$ en $r = \frac{31}{13}$, dan vindt men door (δ)

$q = \frac{31}{9}$; en vervolgens door (α)

$$AB = \frac{2^7 \times 7 \times 11 \times 31}{3^4 \times 13^2},\ AC = \frac{2^3 \times 5 \times 31^2}{3^2 \times 13^2},\ BC = \frac{2^3 \times 5 \times 31}{3^4};$$

vermenigvuldigt men nu deze waarden met $\frac{3^2 \times 13^2}{2 \times 31^2}$, dan komt er

$$AB = \frac{2^6 \times 7 \times 11}{3^2 \times 31},\ AC = 2^2 \times 5,\ BC = \frac{2^2 \times 5 \times 13^2}{3^2 \times 31},$$

of wel

$$AB = \frac{4928}{279},\quad AC = 20 \text{ en } BC = \frac{3380}{279};$$

welke laatste getallen door Halcken zijn opgegeven.

Neemt men $s = 3$ en $r = 5$, dan wordt $q = 11$ en men zal dan, na de waarden, die men voor de zijden vindt, door 12 gedeeld te hebben,

AB = 30, AC = 25 en BC = 11

verkrijgen; waardoor de vraag in vrij kleine geheele getallen

is opgelost. Hoezeer dan nu ook, voor de deellijn en voor de hoogte, wel meetbare, maar geene geheele getallen gevonden worden.

CXCIX. VOORSTEL.

Door G. KOSTER.

Van twee schepen A *en* B *verschillen de ligplaatsen* 180° *in lengte;* A *ligt zoo veel bezuiden, als* B *benoorden de linie.* A *schiet de zon, een uur na zijnen middag, op* 24°, *en* B., *acht uren daarna, op* 44° *hoogte boven den horizon. Men vraagt op welke breedten deze schepen lagen en hoe groot de zonsdeclinatie was?* (*)

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, G. KOSTER *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Omdat de ligplaatsen 180° in lengte verschillen, zullen zij onder denzelfden middagcirkel gelegen zijn, en zal het op de eene plaats middernacht wezen als het op de andere middag is.

Laat ZTPNQZ (Fig. 72) dien middagcirkel, P de noord- en Q de zuidpool voorstellen; zij verder, van eene der bedoelde plaatsen, T het toppunt en ZONW de gezigteinder, waarin de zuid-, oost-, noord- en westpunten, door de letters Z, O, N en W zijn aangewezen. Indien dan S de zonsplaats op het oogenblik der waarneming is, en men door S den topboog TSH, alsmede den declinatie-cirkel PS trekt, is in den parallactischen driehoek PTS, PT het complement van de breedte, PS dat van de declinatie en TS dat van de hoogte; terwijl TPS de uurhoek is van den tijd, die er van het oogenblik der waarneming tot aan den middag nog verloopen moet.

Den genoemden uurhoek U, de breedte B, de declinatie D en de hoogte H noemende, hebben wij alzoo, uit genoemden parallactischen driehoek, de formule (Zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* derde Druk. § 1294.)

$$Cos.U = \frac{Sin.H - Sin.B\ Sin.D}{Cos.B\ Cos.D},$$

waarin nu B en D breedte en declinatie van denzelfden

(*) J. A. VAN DAM, *Wiskunstige Rekening.* No. 40 der Besluitquestiën.

naam (zuider- of noorder-) beteekenen. Op de ligplaats van A heeft men $H = 24°$ en $U = -15°$, omdat de waarneming aldaar één uur *na* den middag heeft plaats gehad. Voorts is de waarneming, op de ligplaats van B, 8 uren later, dus 9 uren na den middag van A of 3 uren vóór den middag van B, geschied; hier is dus $U = 45°$ en $H = 44°$. Stellen wij nu gemakshalve $15° = \alpha$, $24° = \beta$, $45° = \alpha'$, $44° = \beta'$, en laat B de breedte van A, dus $-B$ de breedte van B zijn, dan geeft de bovenstaande formule, ten gevolge der gedane waarnemingen, de twee vergelijkingen

$$Cos.\alpha = \frac{Sin.\beta - Sin.B\ Sin.D}{Cos.B\ Cos.D}$$

en
$$Cos.\alpha' = \frac{Sin.\beta' + Sin.B\ Sin.D}{Cos.B\ Cos.D},$$

waaruit B en D moeten opgelost worden.

Schrijven wij voor deze vergelijkingen

$$Cos.\alpha\ Cos.B\ Cos.D = Sin.\beta - Sin.B\ Sin.D$$

en
$$Cos.\alpha'\ Cos.B\ Cos.D = Sin.\beta' + Sin.B\ Sin.D,$$

dan vinden wij, door er de som van te nemen

$$(Cos.\alpha + Cos.\alpha')\ Cos.B\ Cos.D = Sin.\beta + Sin.\beta',$$

waaruit volgt

$$Cos.B\ Cos.D = \frac{Sin.\beta + Sin.\beta'}{Cos.\alpha + Cos.\alpha'};$$

en substitueren wij deze waarde voor $Cos.B\ Cos.D$ in eene der vergelijkingen, dan verkrijgen wij na herleiding

$$Sin.B\ Sin.D = \frac{Sin.\beta\ Cos.\alpha' - Sin.\beta'\ Cos.\alpha}{Cos\alpha + Cos\alpha'};$$

door ten laatste deze waarden over te brengen in de bekende vergelijkingen

$$Cos.(B + D) = Cos.B\ Cos.D - Sin.B\ Sin.D,$$
$$Cos.(B - D) = Cos.B\ Cos.D + Sin.B\ Sin.D,$$

vinden wij

$$Cos.(B + D) = \frac{Sin.\beta(1 - Cos.\alpha') + Sin.\beta'(1 + Cos.\alpha)}{Cos.\alpha + Cos.\alpha'}$$

en
$$Cos.(B - D) = \frac{Sin.\beta(1 + Cos.\alpha') + Sin.\beta'(1 - Cos.\alpha)}{Cos.\alpha + Cos.\alpha'},$$

waardoor nu B en D onmiddellijk kunnen berekend worden.

Om echter deze formulen voor de berekening met logarithmen geschikter te maken, nemen wij in aanmerking, dat in het algemeen $1 + Cos.\phi = 2Cos.^2\tfrac{1}{2}\phi$, $1 - Cos.\phi =$

$2Sin.^2\frac{1}{2}\phi$ en $Cos.\phi + Cos.\phi' = 2Cos.\frac{1}{2}(\phi' + \phi)\ Cos.\frac{1}{2}(\phi' - \phi)$ is, dat dus voor dezelve kan geschreven worden

$$Cos.(B + D) = \frac{Sin.\beta Sin.^2\frac{1}{2}\alpha' + Sin.\beta' Cos.^2\frac{1}{2}\alpha}{Cos.\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)Cos.\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}$$

$$Cos.(B - D) = \frac{Sin.\beta Cos.^2\frac{1}{2}\alpha' + Sin.\beta' Sin.^2\frac{1}{2}\alpha}{Cos.\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)Cos.\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)};$$

verder stellen wij, den noemer dezer uitdrukkingen gemakshalve N noemende,

$$\frac{Sin.\beta Sin.^2\frac{1}{2}\alpha'}{N} = Tang.p,\quad \frac{Sin.\beta' Cos.^2\frac{1}{2}\alpha}{N} = Tang.q$$

$$\frac{Sin.\beta Cos.^2\frac{1}{2}\alpha'}{N} = Tang.p',\quad \frac{Sin.\beta' Sin.^2\frac{1}{2}\alpha}{N} = Tang.q',$$

dan wordt hierdoor

$$Cos.(B + D) = Tang.p + Tang.q = \frac{Sin.(p+q)}{Cos.p Cos.q}$$

en $$Cos.(B - D) = Tang.p' + Tang.q' = \frac{Sin.(p' + q')}{Cos.p' Cos.q'}.$$

Volgens deze formulen, hebben wij dan deze berekening:

	$\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) = 30°$	$Log.Cos.\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) =$	9,9375306
	$\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = 15°$	$Log.Cos.\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) =$	9,9849438
			opt.
		$Log.N =$	9,9224744
$\frac{1}{2}\alpha' = 22°30'$	$Log.Sin.\frac{1}{2}\alpha' =$ 9,5828397	$Log.Cos.\frac{1}{2}\alpha' =$	9,9656153
	2		2
	9,1656794		9,9312306
$\beta = 24°$	$Log.Sin.\beta =$ 9,6093133	. . . .	9,6093133
	$Comp.Log.N =$ 0,0775256	. . . .	0,0775256
	opt.		opt.
	$Log.Tang.p =$ 8,8525183	$Log.Tang.p' =$	9,6180695
	$p =$ 4°4'22",5	$p' =$	22°32'22"
$\frac{1}{2}\alpha = 7°30'$	$Log.Sin.\frac{1}{2}\alpha =$ 9,1156977	$Log.Cos.\frac{1}{2}\alpha =$	9,9962686
	2		2
	8,2313954		9,9925372
$\beta' = 44°$	$Log.Sin.\beta' =$ 9,8417713	. . . .	9,8417713
	$Comp.Log.N =$ 0,0775256	. . . .	0,0775256
	opt.		opt.
	$Log.Tang.q' =$ 8,1506923	$Log.Tang.q =$	9,9118341
	$q' =$ 0°48'38"	$q =$	39°13'25",5

$p+q=43°17'48''$ $Log.Sin.(p+q)=9,8361823$
$Log.Cos.p=9,9989018$ $Comp.Log.Cos.p=0,0010982$
$Log.Cos.q=9,8891237$ $Comp.Log.Cos.q=0,1108763$
opt.
$Log.Cos.(B+D)=9,9481568$
$B+D=\pm 27°26'31'',8$

$p'+q'=23°21'$ $Log.Sin.(p'+q')=9,5980754$
$Log.Cos.p'=9,9654914$ $Comp.Log.Cos.p'=0,0345086$
$Log.Cos.q'=9,9999566$ $Comp.Log.Cos.q'=0,0000434$
opt.
$Log.Cos.(B-D)=9,6326274$
$B-D=\pm 64°35'6'',8.$

Eigenlijk zou men, uit de voor $Log. Cos.(B+D)$ en $Log. Cos.(B-D)$ verkregene waarden, kunnen besluiten tot $B+D=m\times 360°\pm 27°26'31'',8$ en $B-D=n\times 360°\pm 64°35'6'',8$; maar dewijl uit den aard der zaak $B < 90°$ en $D < 23° 30'$ moeten zijn, kunnen m en n niet anders dan nul wezen. Voorts moeten gelijktijdig de bovenste of de benedenste teekens, in de bovengevondene waarden van $B+D$ en $B-D$, gebruikt worden, want anders zou men D, het zij positief, het zij negatief, grooter dan 23° 30′ vinden. Wij vinden dus uit dezelve, door optelling en aftrekking,

$B = 46°\ 0'\ 49'',3$ en $D = -18°\ 34'\ 17'',5$
of $B = -46°\ 0'\ 49'',3$ en $D = 18°\ 34'\ 17'',5$.

Daar nu in de opgaaf uitdrukkelijk bepaald is, dat A bezuiden de linie en B benoorden dezelve ligt, zoo ligt A op 46° 0′ 49″ 3 zuider- en B op even veel noorder-breedte, terwijl de zon 18° 34′ 17″ 5 noorder-declinatie heeft.

CC. Voorstel.

Door F. J. Stamkart.

Een omgekeerde regte kegel, op elliptische basis, is tot zekere hoogte met water gevuld; indien men nu onderstelt, dat de rigting der zwaartekracht op alle mogelijke wijzen verandert, en de oppervlakte des waters alzoo genoodzaakt wordt verschillende standen in den kegel aan te nemen, echter zoodanig, dat het water er niet uitloope, begeert men de vergelijking van het oppervlak te vinden,

dat door den waterspiegel in al zijne verschillende standen wordt aangeraakt?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Laat MABCD (Fig. 73) den bedoelden kegel voorstellen; ABCD de elliptische bazis, waarvan AB de groote en CD de kleine as is; en zij NOP een der standen van den waterspiegel. Nemen wij den top M des kegels tot oorsprong van onderling regthoekige coördinaten, de as ME des kegels tot as der x en de lijnen MX en MY, evenwijdig met AB en CD loopende, tot assen der x en y aan; laten verder F, G en H de punten zijn, waarin deze assen door het vlak van den waterspiegel of deszelfs verlengde gesneden worden, zoodat GH de doorsnede van den verlengden waterspiegel met het vlak der xy is; indien wij dan uit M eene loodlijn MI op GH nederlaten, IF trekken en vervolgens MK loodregt op IF laten vallen, zal MK loodregt op het vlak des waterspiegels en dus de rigting der zwaartekracht zijn, terwijl FIM de hoek zal wezen, onder welken het vlak der xy door dat van den waterspiegel gesneden wordt.

Voor de ruimte, die door de aanwezige hoeveelheid water wordt ingenomen, hebben wij dus

$$\textit{Inh. Keg.}\ \text{MNOP} = \tfrac{1}{3}\ \text{MK} \times \textit{Inh. Ellips}\ \text{PON},$$

alsmede voor den inhoud der ellips PON, zoo wij den inhoud van hare projectie op het vlak der xy door P voorstellen,

$$\textit{Inh. Ellips}\ \text{PON} = P \times \textit{Sec.}\ \text{FIM};$$

daar verder, MF $= p$ stellende, uit de figuur terstond volgt $\text{MK} = \text{MF} \times \textit{Sin.}\ \text{MFK} = p \times \textit{Cos.}\ \text{FIM}$, wordt

$$\textit{Inh. Keg.}\ \text{MNOP} = \tfrac{1}{3}\ pP;$$

wanneer dus de waterspiegel van stand verandert, zal het product pP standvastig even groot blijven.

Ten opzigte van de aangenomene coördinaten-assen, is de vergelijking van het oppervlak des kegels

$$Mx^2 + Ny^2 = z^2 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

en die van het platte vlak FGH

$$Ax + By + p = z \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

in deze vergelijkingen zijn A en B onbepaalde coëfficiënten, die met den stand des waterspiegels veranderen; $p =$ MF

is almede veranderlijk, maar M en N zijn gegevene standvastige grootheden, die van den vorm des kegels afhangen; stellen wij namelijk

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ME}} = Tang.\alpha \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ME}} = Tang\,\beta,$$

dan is $\quad M = Cot.^2\alpha$ en $N = Cot.^2\beta$.

Elimineren wij z tusschen (1) en (2) dan verkrijgen wij, voor de vergelijking van de projectie der ellips PON op het vlak der xy

$$Mx^2 + Ny^2 = (Ax + By + p)^2$$

of $(M-A^2)x^2-2ABxy+(N-B^2)y^2-2Apx-2Bpy-p^2=0 \ldots (3)$; door toepassing van het LIII. Voorstel des V Deels *Verzam. van Wisk. Voorst.* vinden wij dus onmiddellijk voor den inhoud P dier projectie (*)

$$P = \frac{MNp^2\pi}{\sqrt{(MN - NA^2 - MB^2)^3}}$$

en dus voor het product pP

$$pP = \frac{MNp^3\pi}{\sqrt{(MN - NA^2 - MB^2)^3}} \quad \ldots \quad (4).$$

Stellen wij dat m de hoogte is, waartoe het water in den kegel opklimt, als de waterspiegel loodregt op de as des kegels is, dan wordt voor dien stand des waterspiegels $p = m$, $A = 0$, $B = 0$ en dus

$$pP = \frac{MNm^3\pi}{\sqrt{(MN)^3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

daar verder pP standvastig is en bij gevolg in (4) en (5) dezelfde waarde heeft, volgt uit het verband van (4) en (5)

$$\frac{p}{\sqrt{(MN-NA^2-MB^2)}} = \frac{m}{\sqrt{(MN)}}$$

$$\text{of} \quad p = \frac{m\sqrt{(MN-NA^2-MB^2)}}{\sqrt{(MN)}} = m\sqrt{\left\{1-\frac{A^2}{M}-\frac{B^2}{N}\right\}},$$

(*) Aldaar is namelijk gevonden, dat, de algemeenste vergelijking eener ellips, tusschen coördinaten die elkander onder eenen hoek α snijden, door

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

voorgesteld wordende, de inhoud dier ellips wordt uitgedrukt door de formule

$$I = 2\pi Sin\alpha.\frac{ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}}$$

waarvoor wij, omdat $M = Cot.^2\alpha$ en $N = Cot.^2\beta$ is, ook kunnen schrijven

$$p = m\sqrt{(1 - A^2 Tang.^2\alpha - B^2 Tang.^2)} \quad . \quad . \quad (6);$$

deze vergelijking wijst nu het verband aan, dat er tusschen de veranderlijke grootheden A, B en p moet bestaan, opdat het platte vlak, waarvan (2) de vergelijking is, in alle willekeurige standen even groote stukken MNOP van den kegel afsnijde. Brengende dus de waarde van p volgens (6) in (2) over, dan vinden wij

$$Ax + By + m\sqrt{(1 - A^2 Tang.^2\alpha - B^2 Tang.^2\beta)} = z \ldots (7)$$

voor de vergelijking van een onbepaald rakend vlak, aan het gebogen oppervlak, waarnaar in het voorstel gevraagd wordt; door in deze vergelijking A en B beide of een van beide willekeurig te veranderen, gaan wij van het eene rakende vlak tot het andere over.

Laten wij in (7) A tot $A + \Delta A$ of B tot $B + \Delta B$ aangroeijen, waardoor wij verkrijgen

$$\left.\begin{array}{l}(A+\Delta A)x+By+m\sqrt{(1-(A+\Delta A)^2 Tang.^2\alpha-B^2 Tang.^2\beta)}=z\\ \text{en } Ax+(B+\Delta B)y+m\sqrt{(1-A^2 Tang.^2\alpha-(B+\Delta B)^2 Tang.^2\beta)}=z\end{array}\right\}\ldots(8),$$

dan zijn (7) en (8) de vergelijkingen van drie verschillende rakende vlakken, en de waarden van x, y en z, die gelijktijdig aan deze vergelijkingen voldoen, zijn de coördinaten van het snijpunt dezer drie rakende vlakken. Dit snijpunt, dat buiten het gebogen oppervlak ligt, zal, naar gelang ΔA en ΔB kleiner genomen worden, nader bij het gebogen oppervlak komen, en een punt van dat oppervlak zelve worden, indien de eindige aangroeijingen ΔA en ΔB in differentialen δA en δB overgaan. De waarden van x, y en z, die gelijktijdig aan (7) en (8) voldoen, zullen dus coördinaten van een punt van het gevraagde oppervlak zijn, zoodra men onderstelt, dat in (8) $\Delta A = \delta A$ en $\Delta B = \delta B$ is. Kunnen wij alzoo, in deze onderstelling, A en B tusschen de drie vergelijkingen (7) en (8) elimineren, dan zal de eindvergelijking die van het bedoelde gebogen oppervlak wezen.

De verbinding van de vergelijking (7) met elk der vergelijkingen (8) moet blijkbaar, indien $\Delta A = \delta A$ en $\Delta B = B\delta$ is, tot dezelfde uitkomsten voeren als de differentiatie der vergelijking (7) in de onderstelling, dat of A of B alleen veranderlijk is; differentiëren wij derhalve de vergelijking (7)

beurtelings in elk dier onderstellingen, dan vinden wij, na deeling door δA en δB,

$$\left.\begin{array}{l} x - \dfrac{mA\,Tang.^2\alpha}{\sqrt{(1-A^2Tang.^2\alpha-B^2Tang.^2\beta)}} = 0 \\ \text{en} \quad y - \dfrac{mB\,Tang.^2\beta}{\sqrt{(1-A^2Tang.^2\alpha-B^2Tang.^2\beta)}} = 0 \end{array}\right\} \ldots (9)$$

voor de vergelijkingen, die uit het verband van (7) met elk der vergelijkingen (8), in de onderstelling, dat ΔA en ΔB oneindig klein zijn, moeten voortvloeijen. Wij hebben dus nu nog A en B tusschen de vergelijkingen (7) en (9) te elimineren.

Stellen wij daartoe kortheidshalve

$$\sqrt{(1 - A^2Tang.^2\alpha - B^2Tang.^2\beta)} = q \ldots (10),$$

dan volgt uit (9)

$$A = \frac{qx}{m\,Tang.^2\alpha},\ B = \frac{qy}{m\,Tang.^2\beta} \ldots (11),$$

terwijl (7) overgaat in

$$Ax + By + mq = z \ldots\ldots\ldots (12);$$

brengen wij nu de waarden (11) in (10) over, dan komt er

$$q = \sqrt{\left\{1 - \frac{q^2x^2}{m^2Tang.^2\alpha} - \frac{q^2y^2}{m^2Tang.^2\beta}\right\}}$$

of ook $$q^2\left\{1 + \frac{x^2}{m^2Tang.^2\alpha} + \frac{y^2}{m^2Tang.^2\beta}\right\} = 1 \ldots (13);$$

brengen wij ook de waarden (11) in (12) over, dan vinden wij

$$\frac{qx^2}{m\,Tang.^2\alpha} + \frac{qy^2}{m\,Tang.^2\beta} + mq = z$$

of ook $$qm\left\{1 + \frac{x^2}{m^2Tang.^2\alpha} + \frac{y^2}{m^2Tang.^2\beta}\right\} = z \ldots (14);$$

en zoo wij dan het vierkant van (14) door (13) deelen, vinden wij eindelijk

$$m^2\left\{1 + \frac{x^2}{m^2Tang.^2\alpha} + \frac{y^2}{m^2Tang.^2\beta}\right\} = z^2$$

of $$z^2 = m^2 + x^2Cot.^2\alpha + y^2Cot.^2\beta \ldots (15),$$

voor de begeerde vergelijking van het gebogen oppervlak.

Het blijkt alzoo, dat het gebogen vlak, hetwelk bij de verandering van de rigting der zwaartekracht gedurig door den waterspiegel wordt aangeraakt, eene *hyperboloïde* is, en wel zulk eene, die men *met twee bladen* noemt, zijnde

het andere blad in den tegenovergestelden kegel begrepen. De doorsneden van deze hyperboloïde, regthoekig op de as ME des kegels genomen, zijn alle ellipsen, die onderling en met de elliptische bazis ABCD gelijkvormig zijn; terwijl alle doorsneden, evenwijdig met de as ME des kegels genomen, of door die as gaande, hyperbolen worden. Het oppervlak des kegels is een asymptoot-vlak aan de hyperboloïde.

Is $\beta = \alpha$ en dus de kegel een gewone cirkelvormige, dan is het bedoelde gebogen oppervlak eene omwentelings hyperboloïde, waarvan de vergelijking is

$$z^2 = m^2 + (x^2 + y^2)\ Cot.^2\alpha.$$

Is $\beta = \alpha = 45°$ en heeft dus de cirkelvormige kegel eenen regten tophoek, dan wordt de vergelijking

$$z^2 = m^2 + x^2 + y^2$$

en het gebogen vlak wordt dan door de omwenteling van eene gelijkzijdige hyperbool beschreven.

Aanmerkingen. 1°. Wanneer men de zwaartekracht niet *alle* willekeurige rigtingen liet aannemen, maar slechts op eene bepaalde wijze van rigting liet veranderen, zou men, om van eenig rakend vlak tot een ander over te gaan, in de vergelijking (7), niet A en B elk op zich zelve willekeurig mogen laten veranderen; er zou dan eene betrekking van afhankelijkheid tusschen A en B bestaan, zoodat $B = \phi(A)$ zijnde, door den vorm der functie ϕ zou bepaald worden, op welke wijze de zwaartekracht van rigting veranderde.

In dit geval wordt de vergelijking (7), van het platte vlak, dat steeds met het te zoeken gebogen vlak in aanraking blijft,

$$z = Ax + [\phi(A)]y + m\sqrt{\{1 - A^2 Tang.^2\alpha - [\phi(A)]^2 Tang.^2\beta\}} \ldots (16);$$

hierin A tot $A + \Delta A$ latende aangroeijen, verkrijgt men

$$z = (A + \Delta A)x + [\phi(A + \Delta A)]y + \ldots$$
$$m\sqrt{\{1 - (A + \Delta A)^2 Tang.^2\alpha - [\phi(A + \Delta A)]^2 Tang.^2\beta\}} \ldots (17),$$

zoodat men in (16) en (17) de vergelijkingen van twee willekeurige rakende vlakken heeft, wier gemeene doorsnede buiten het gebogen oppervlak ligt, maar er meer toe nadert naar gelang ΔA kleiner genomen wordt, en geheel in het gebogen oppervlak valt, zoodra men $\Delta A = \delta A$ neemt.

Wordt dus A tusschen (16) en (17) geëlimineerd, in de onderstelling dat $\Delta A = \delta A$ is, dan moet de eindvergelijking die van het gebogen oppervlak zijn, voor het geval dat de zwaartekracht slechts op eene bepaalde wijze, door den vorm der functie ϕ aangegeven, van rigting verandert; en dit oppervlak zal klaarblijkelijk ontwikkelbaar zijn.

Om eene vergelijking te bekomen, die in de onderstelling van $\Delta A = \delta A$ uit verbinding van (16) met (17) voortvloeit, behoeven wij slechts (16) te differentiëren alsof A alleen veranderlijk ware en daarna door δA te deelen; dit geeft, na herleiding en kortheidshalve $\delta.\phi(A) = \phi'(A)\delta A$ stellende,

$$0 = x - \frac{mA\,Tang.^2\alpha}{\sqrt{\{1 - A^2Tang.^2\alpha - [\phi(A)]^2Tang.^2\beta\}}} + .$$
$$\left\{y - \frac{m\phi(A)Tang.^2\beta}{\sqrt{\{1 - A^2Tang.^2\alpha - [\phi(A)]^2Tang.^2\beta\}}}\right\}.\phi'(A) \quad . . (18),$$

zoodat nu de vergelijking van het gebogen oppervlak gevonden wordt door A tusschen (16) en (18) te elimineren. Deze eliminatie kan echter, zonder dat de vorm der functie ϕ gegeven is, niet bewerkstelligd worden. Neemt men, bij voorbeeld, $B = \phi(A) = 0$, waardoor ook $\phi'(A) = 0$ wordt, dan gaan (16) en (18) over in

$$z = Ax + m\sqrt{(1 - A^2Tang.^2\alpha)}$$
en
$$x\sqrt{(1 - A^2Tang.^2\alpha)} = mA\,Tang.^2\alpha,$$

waaruit men, door A te elimineren, gemakkelijk vinden zal

$$z^2 = m^2 + x^2Cot.^2\alpha.$$

In dit geval is dus het gebogen vlak een *cilindervlak*, waarvan de rigtlijn eene in het vlak der xz gelegene hyperbool is, en waarvan de beschrijvende lijn loodregt op het vlak der rigtlijn staat.

2°. Het zij men in de vergelijking (7) A en B als standvastig en x, y, z, als de coördinaten van een onbepaald punt van het rakende vlak beschouwt, het zij men x, y, z als de coördinaten van een onbepaald punt van het gebogen vlak en bij gevolg A en B als veranderlijk beschouwt, in beide gevallen heeft men

$$A = \frac{\delta z}{\delta x} \text{ en } B = \frac{\delta z}{\delta y};$$

door dus deze differentiaal-quotiënten in (7) voor A en B te

substitueren, verkrijgt men voor de differentiaal-vergelijking van het gevraagde oppervlak

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + m\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 Tang.^2\alpha - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 Tang.^2\beta\right\}} \quad \ldots\ldots \quad (a);$$

zien wij nu hoe aan deze differentiaal-vergelijking kan voldaan worden.

Differentiëren wij daartoe (a) eerst ten opzigte van x, vervolgens ten opzigte van y, dan verkrijgen wij

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(x - \frac{m Tang.^2\alpha}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(y - \frac{m Tang.^2\beta}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \text{en} \quad 0 &= \left(x - \frac{m Tang.^2\alpha}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(y - \frac{m Tang.^2\beta}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b),$$

zijnde kortheidshalve de wortelgrootheid in (a) voorkomende door q voorgesteld.

Aan de vergelijkingen (b) en dus ook aan (a) wordt *vooreerst* voldaan, door te stellen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C',$$

zoodat wij dan voor de integraal van (a) de vergelijking (7), dat is, de vergelijking van een plat vlak, verkrijgen.

Ten *tweede* voldoet men aan (b) en bij gevolg aan (a), door te stellen

$$x - \frac{m Tang.^2\alpha}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad y - \frac{m Tang.^2\beta}{q}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

en dan verkrijgen wij, daar deze vergelijkingen dezelfde zijn als de vergelijkingen (9), voor de integraal van (a) de vergelijking (15), dat is, de vergelijking der hyperboloïde.

Ten *derde* voldoet men aan (b) en dus ook aan (a), door te voldoen aan eene b. v. de eerste der vergelijkingen (b), en aan eenige andere vergelijking, door verbinding der beide vergelijkingen (b) verkregen.

Vermenigvuldigen wij nu de eerste der vergelijkingen (b) met $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ en de tweede met $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, trekken wij de producten van elkander af en deelen wij het verschil door $z - \frac{m Tang.^2 \alpha}{q} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$, welke factor niet gelijk nul kan wezen, zonder op het vorige geval terug te komen, dan vinden wij

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \times \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2,$$

waaruit, zoo als gemakkelijk te verifiëren is, wordt afgeleid $\frac{\delta z}{\delta y} = \phi\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, zijnde ϕ eene functie van geheel willekeurigen vorm. Nemen wij dus in de eerste der vergelijkingen (b), alsmede in (a), $\frac{\delta z}{\delta y} = \phi\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ en stellen wij $\delta . \frac{\delta z}{\delta y} = \phi'\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) \delta . \frac{\delta z}{\delta x}$, waardoor $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \phi'\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) . \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ wordt, dan verkrijgen wij voor de integraal van (a) het stelsel vergelijkingen

$$0 = x - \frac{m Tang.^2 \alpha}{q} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} + \left\{y - \frac{m Tang.^2 \beta}{q} \cdot \phi\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)\right\} \phi'\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$$

en

$$z = x \frac{\delta z}{\delta x} + y\, \phi\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) + m \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 Tang.^2 \alpha - \left[\phi\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)\right]^2 Tang.^2 \beta\right\}},$$

die volkomen dezelfde zijn als de vroeger gevondene vergelijkingen (16) en (18).

Deze vergelijkingen behooren tot een ontwikkelbaar oppervlak, dat om de hyperboloïde kan beschreven worden; want de vergelijking $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \times \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2$ is juist de kenmerkende vergelijking van de ontwikkel-

baarheid der oppervlakken, terwijl altijd de vergelijking (a) de voorwaarde der aanraking bevat. Dit ontwikkelbaar oppervlak is dan de limiet der onderlinge doorsnijdingen van het vlak der waterspiegels, wanneer men de zwaartekracht op eene bepaalde, ofschoon naar welgevallen te kiezene wijze van rigting laat veranderen, zonder haar alle willekeurige rigtingen te laten aannemen; wordende, zoo als reeds opgemerkt is, de wijze, waarop men aanneemt, dat die rigting verandert door den vorm der functie ϕ bepaald en omgekeerd.

Het stelsel vergelijkingen (16) en (18) moet als de volkomene integraal van (a) beschouwd worden, waarin de vorm der functie ϕ de plaats eener toegevoegde standvastige grootheid vervangt. De vergelijking (7) is eene *bijzondere integraal* van (a); terwijl eindelijk de vergelijking (15) eene *bijzondere oplossing* van de differentiaal-vergelijking (a) daarstelt. Het vlak, dat door de bijzondere oplossing gegeven wordt, of de hyperboloïde, raakt alle mogelijke gebogen vlakken, die in de volkomene integraal, of in het stelsel vergelijkingen (16) en (18), begrepen zijn.

CCI. Voorstel.

Door J. A. Hansen.

Men begeert van twee onderscheidene stoffen, welker soortelijke zwaarten p en p' zijn, zulke hoeveelheden gewigts met elkander te verbinden, dat het daardoor gevormde ligchaam eene soortelijke zwaarte p'' hebbe en q pond wege. Hoe veel pond moet men daartoe van elke stof nemen, in de beide onderstellingen: 1°. *dat door de verbinding de omvang (het volumen) niet verandert; en* 2°. *dat door de verbinding de omvang vermindert in reden als r tot s?*

Opgelost *door* J. A. Hansen, J. Bassan, D. W. Hinse, H. Middelburg, E. Ç. Radijs, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. A. Hansen.

Stel dat men x pond moet nemen van de stof, welker soortelijke zwaarte p is, en y pond van de stof, welker soortelijke zwaarte p' is, om te verkrijgen een ligchaam van q pond, welks soortelijke zwaarte p'' is, dan wordt het vo-

lumen van die x pond door $\frac{x}{p}$, van die y pond door $\frac{y}{p'}$ en van het zamengestelde ligchaam door $\frac{q}{p''}$ voorgesteld; want het volumen van een ligchaam is in regte reden van deszelfs gewigt, en in omgekeerde reden van deszelfs soortelijke zwaarte.

In beide opgegevene onderstellingen moet men hebben

$$x + y = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

omdat de gewigten der deelen altijd het gewigt van het geheel moeten opleveren.

In de eerste onderstelling moet daarenboven het volumen van het geheel gelijk zijn aan de som der volumens van de deelen, waaruit volgt

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} = \frac{q}{p''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

In de tweede onderstelling moet echter de som der volumens van de deelen tot het volumen van het geheel als r tot s zijn, waaruit dan volgt

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} : \frac{q}{p''} = r : s$$

of

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} = \frac{qr}{p''s} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Lost men nu x en y uit de vergelijkingen (1) en (2) op, dan vindt men, in de eerste onderstelling:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{p''}\left(\frac{p'' - p'}{p - p'}\right)q \\ \text{en} \quad y &= \frac{p'}{p''}\left(\frac{p - p''}{p - p'}\right)q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4);$$

en lost men x en y uit de vergelijkingen (1) en (3) op, dan vindt men in de tweede onderstelling:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{p''} \cdot \frac{p''s - p'r}{(p - p')s} \cdot q \\ \text{en} \quad y &= \frac{p'}{p''} \cdot \frac{pr - p''s}{(p - p')s} \cdot q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Aanmerking. Uit de vergelijkingen (4) volgt

$$\frac{x}{p} : \frac{y}{p'} = p'' - p' : p - p'';$$

zal dus, in de eerste onderstelling, de vraag voor eene

eigenlijke oplossing vatbaar wezen, waartoe gevorderd wordt, dat x en y positief zijn, dan moet de waarde, die voor p' gegeven wordt, tusschen p en p' vallen; terwijl verder blijkt, dat de volumens der te verbinden stoffen, omgekeerd evenredig zijn, met de over- en ondermaat harer soortelijke zwaarten boven en beneden de soortelijke zwaarte van het door de verbinding verkregene ligchaam.

In de tweede onderstelling blijven deze gevolgtrekkingen onveranderd, mits men de soortelijke zwaarton der te verbindene stoffen in teden van s tot r verhooge; want uit de vergelijkingen (5) volgt

$$\frac{x}{p} : \frac{y}{p'} = p' - \frac{r}{s}p' : \frac{r}{s}p - p'.$$

CCII. VOORSTEL.

Door J. Sjoenis.

In eenen molen, moet een rad van 273 tanden op eenen schijfloop werken, die 18 staven heeft, en welke as, op eenen afstand van 2,934 el, evenwijdig met de as van het rad loopt. Hoe groot moeten tot dat einde de middellijnen van het rad van den schijfloop genomen worden?

Opgelost *door* G. Koster, J. A. Hansen, D. W. Hinse, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* G. Koster.

De stralen der raderen staan tot elkander als derzelver omtrekken, en de omtrekken der raderen, welke op elkander werken, staan tot elkander als de getallen tanden of staven, dus in dit geval als 273 tot 18 of als 91 tot 6.

Dus staat de straal van het rad tot den straal van den schijfloop als 91 tot 6; de som dier stralen gelijk 2,934 el gegeven zijnde, hebben wij alzoo die som slechts te verdeelen in twee deelen, die zich als 91 tot 6 verhouden, om elken straal afzonderlijk te vinden.

Hiertoe hebben wij de evenredigheden:

91 + 6 : 91 = 2^{el},934 : *den straal van het rad*

en 91 + 6 : 6 = 2^{el},934 : *den straal van den schijfl.*,

waaruit gevonden wordt:

voor den straal van het rad, 2^{el},7525;

voor dien van den schijfloop, 0^{el},1815;

dus voor de middellijn van het rad, $5^{el},505$;
en voor die van den schijfloop, $0^{el},363$.

Aanmerking. De gevondene stralen en middellijnen zijn eigenlijk die van de steekcirkels van rad en schijfloop; dat is van de cirkels, welker omtrekken, gedurende de beweging, met elkander in aanraking blijven. Begeerde men de stralen of middellijnen, tot aan den buitenkant der staven, en tot aan de uiterste punten der tanden te meten, zoo zouden zij eenigzins grooter dan de bovengevondene afmetingen moeten zijn; hoe veel dit meerdere zou moeten wezen, is geheel afhankelijk, van de dikte, die men aan de staven, en van de gedaante, die men aan de tanden zou verkiezen te geven.

CCIII. Voorstel.

Door P. Krom.

Een merkwaardig jaartal, in de geschiedenis der Nederlanden, heeft de eigenschappen: 1°. dat het zonder overschot door 11 kan gedeeld worden; 2°. dat de som der cijfers gelijk is aan het aantal volle eeuwen, dat er toen sedert den aanvang der jaartelling verloopen was, en 3°. dat het cijfer der tientallen gelijk is aan de som van de cijfers der honderd en duizendtallen. Men vraagt hieruit dit jaartal te bepalen?

Opgelost *door* J. A. Hansen, G. Koster, J. Heemskerk, Abz., D. W. Hinse, P. Krom, J. de la Mar, J. S. Speijer, J. Teixeira de Mattos, Jr., H. Middelburg, F. C. Radijs *en* A. Volkerse.

I. Oplossing *van* J. A. Hansen.

Laat de cijfers van het bedoelde jaartal zijn x, y, z en v; en wel x dat der duizendtallen, y dat der honderdtallen, z dat der tientallen en v dat der eenheden, dan geeft de eerste voorwaarde, overeenkomstig de bekende eigenschap der getallen die door 11 deelbaar zijn, aanleiding tot, de vergelijking

$$(x + z) - (y + v) = 11m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin m een geheel getal voorstelt.

Uit de tweede voorwaarde volgt

$$x + y + z + v = 10x + y$$

of

$$z + v = 9x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

en uit de derde

$$s = x + y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Trekt men de vergelijking (3) van de vergelijking (2) af, dan vindt men

$$v = 8x - y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

en substitueert men in (1) voor s en v de waarden (3) en (4), dan komt er

$$2x + y - 8x = 11m,$$

waaruit volgt

$$\left.\begin{aligned} y &= 6x + 11m; \\ \text{dus is volgens (3)}\quad s &= 7x + 11m, \\ \text{en volgens (4)}\quad v &= 2x + 11m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

zoodat nu de drie laatste cijfers van het getal in x en m zijn uitgedrukt.

Dewijl deze cijfers, even als x, geheele positieve getallen kleiner dan 10 moeten wezen, kan m niet anders dan nul zijn; om dezelfde reden kan x niet grooter dan 1 zijn, terwijl, zoo men niet voor al de cijfers nullen begeert, x ook niet gelijk nul kan wezen. Derhalve moet $m = 0$ en $x = 1$ zijn, waardoor volgens (5) $y = 6$, $s = 7$ en $v = 2$ wordt. Alzoo is 1672 het begeerde jaartal.

II. Oplossing van G. Koster.

Aannemende, dat uit den aard der zaak het cijfer der duizendtallen 1 moet zijn, kan volgens de derde bepaling het getal geen ander zijn, dan een der volgende:

101△, 112△, 123△, 134△, 145△, 156△, 167△, 178△, 189△,

waarin △ het cijfer der eenheden voorstelt; het laatste dezer getallen vervalt echter dadelijk, omdat de jaartelling nog zoo verre niet gevorderd is.

Blijkens het bekende kenmerk, van deelbaarheid der getallen door 11, kunnen de bovenstaande jaartallen niet aan de eerste voorwaarde voldoen, ten zij △ = 2 genomen worde; maar △ = 2 nemende, zijn zij ook alle door 11 deelbaar; het begeerde jaartal moet dus een der volgende zijn:

1012, 1122, 1232, 1342, 1452, 1562, 1672, 1782.

Onder deze is er echter slechts een, dat aan de tweede voorwaarde voldoet, namelijk 1672; derhalve is 1672 het begeerde merkwaardige jaartal.

CCIV. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Van eenige op elkander volgende positieve getallen, is gegeven de som en de som hunner derde magten. Men verlangt deze getallen te bepalen?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Bassan, J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, H. Middelburg, F. C. Radijs *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat de begeerde getallen op elkander moeten volgen, is het genoegzaam, het eerste en laatste te bepalen. Laat te dien einde het eerste getal door $x + 1$, het laatste door y, de gegevene som der getallen door s, en de gegevene som hunner derde magten door s' worden voorgesteld; laat verder gemakshalve gesteld worden:

$$1 + 2 + 3 + \text{enz.} \quad \ldots \quad + x = \Sigma(x),$$
$$1 + 2 + 3 + \text{enz.} + x + (x + 1) + \text{enz.} \ldots + y = \Sigma(y),$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \text{enz.} \quad \ldots \quad + x^3 = \Sigma(x^3),$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \text{enz.} \ldots + x^3 + (x+1)^3 + \text{enz.} \ldots + y^3 = \Sigma(y^3),$$

dan is gegeven

$$\Sigma(y) - \Sigma(x) = s \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en

$$\Sigma(y^3) - \Sigma(x^3) = s' \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Maar nu is in het algemeen (Zie J. de Gelder, *Wisk. Lessen*, 2de Cursus § 788)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \text{enz.} \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \text{enz.} \ldots + n)^2$$

of volgens de boven aangenomene notatie

$$\Sigma(n^3) = [\Sigma(n)]^2;$$

dus kan men in plaats van (2) schrijven

$$[\Sigma(y)]^2 - [\Sigma(x)]^2 = s' \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Het quotient der deeling van (3) door (1) geeft

$$\Sigma(y) + \Sigma(x) = \frac{s'}{s} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

terwijl verder de som en het verschil van (4) en (1) de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Sigma(x) &= \frac{s'}{s} - s = \frac{s' - s^2}{s} \\ 2\,\Sigma(y) &= \frac{s'}{s} + s = \frac{s' + s^2}{s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

opleveren.

Daar nu, volgens de bekende formule tot sommering der gewone rekenkunstige reeksen, $\Sigma(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$ en $\Sigma(y) = \frac{1}{2}y(y+1)$ is, kan men in plaats van (5) schrijven

$$\left.\begin{aligned} x(x+1) &= \frac{s' - s^2}{s} \\ y(y+1) &= \frac{s' + s^2}{s} \end{aligned}\right\} \quad (6),$$

uit welke vergelijkingen men dadelijk vindt

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4} + \frac{s'}{s} - s\right\}}$$

en

$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4} + \frac{s'}{s} + s\right\}}.$$

Omdat, uit den aard der zaak, noch x noch y negatief kunnen wezen, zal in deze laatste formulen alleen het bovenste teeken moeten gebruikt worden; door dezelve wordt dan het eerste en laatste der gevraagde getallen, en dus ook de geheele reeks dier getallen bekend.

Was, bij voorbeeld, gegeven $s = 40$ en $s' = 2800$, dan zou men vinden

$$x = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 70 - 40)} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{2} = 5,$$
$$y = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 70 + 40)} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{21}{2} = 10;$$

en de begeerde getallen zouden dan zijn: 6, 7, 8, 9 en 10.

CCV. Voorstel.

Door H. Kloos.

Men verlangt zonder behulp der differentiaal-rekening te vinden, welke waarde van x de uitdrukking $15x - 8x^2$ tot een maximum maakt?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, J. Bassan *en* H. Kloos.

I. Oplossing *van* J. S. Speijer.

De gegevene uitdrukking in het algemeen door $bx - ax^2$ en hare waarde door y voorstellende, heeft men

$$bx - ax^2 = y$$

of

$$ax^2 - bx^2 + y = 0,$$

en hieruit x oplossende, vindt men

$$x = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 - 4ay)}}{2a}.$$

Zal nu x bestaanbaar zijn, dan mag $b^2 - 4ay$ niet negatief worden; de grootstmogelijke waarde, welke y heb-

ben kan, is dus die, waarbij $b^2 - 4ay = 0$ of $y = \frac{b^2}{4a}$ wordt; en heeft y deze grootstmogelijke waarde, dan is $x = \frac{b}{2a}$. Neemt men dus volgens de opgave $b = 15$ en $a = 8$, dan is $x = \frac{15}{16}$ de waarde van x, die de uitdrukking $15x - 8x^2$ tot een maximum maakt; terwijl de waarde van dit maximum $y = 7\frac{1}{32}$ wordt.

II. Oplossing van D. W. Hinse.

Stellen wij, dat de gegevene uitdrukking voor $x = a$ een maximum wordt, dan moet de waarde, welke zij voor $x = a$ verkrijgt, grooter zijn dan die, welke zij voor $x = a \pm \delta$ heeft, hoe klein ook δ genomen moge worden. Men moet dus gelijktijdig hebben

$$15a - 8a^2 > 15(a + \delta) - 8(a + \delta)^2$$

en

$$15a - 8a^2 > 15(a - \delta) - 8(a - \delta)^2.$$

Door deze ongelijkheden te herleiden, vindt men uit dezelve, dat gelijktijdig

$$a > \frac{15}{16} - \frac{1}{2}\delta$$

en

$$a < \frac{15}{16} + \frac{1}{2}\delta$$

zal moeten wezen; maar zal dit voor de kleinstmogelijke waarde van δ plaats hebben, dan kan a geene andere waarde dan $\frac{15}{16}$ hebben. Hieruit volgt alzoo, dat $15x - 8x^2$ een maximum wordt, indien $x = \frac{15}{16}$ wordt genomen.

CCVI. Voorstel.

Door H. Kloos.

Men vraagt van de wederkeerige reeks:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{11}{9}x^2 + \frac{7}{9}x^3 + \frac{85}{27}x^4 + \frac{45}{27}x^5 + \frac{659}{81}x^6 + \text{enz.}$$

de voortbrengende breuk te vinden?

Opgelost *door* H. Kloos *en* J. B. Speijer.

Oplossing *van* H. Kloos.

Daar men weet, dat de opgegevene reeks eene wederkeerige is, weet men ook, dat al hare termen, bij den $(n+1)^{den}$ term te beginnen, op dezelfde wijze van de n vorafgaande termen moeten afhangen. Daar echter de betrekkingsschaal der reeks niet gegeven is, weet men niet van *hoeveel* voorafgaande termen elke volgende term afhangt, en dit zal dus in de eerste plaats moeten opgespoord worden.

Het is vooreerst duidelijk, dat niet elke term op dezelfde wijze van den onmiddellijk voorgaanden afhangt; wij beginnen dus met te onderzoeken, of elke term op dezelfde wijze afhangt van twee onmiddellijk voorgaande termen. Indien dit zoo is, zal de betrekkingsschaal moeten zijn

$$R + aQ + bP = 0,$$

waarin P, Q, R, de coëfficiënten van drie op elkander volgende termen der reeks verbeelden, terwijl a en b onbepaalde coëfficiënten zijn. Uit deze betrekkingsschaal volgt dan, dat men zal moeten hebben

$$\frac{11}{9} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = 0,$$

$$\frac{7}{9} + \frac{11}{9}a + \frac{1}{3}b = 0,$$

$$\frac{85}{27} + \frac{7}{9}a + \frac{11}{9}b = 0,$$

$$\frac{45}{27} + \frac{85}{27}a + \frac{7}{9}b = 0$$

en $$\frac{659}{81} + \frac{45}{27}a + \frac{85}{27}b = 0;$$

uit de twee eerste dezer vergelijkingen zal men vinden $a = \frac{1}{2}$ en $b = -4\frac{1}{6}$, maar deze waarden van a en b voldoen niet aan de drie andere vergelijkingen, dus kan elke term niet op dezelfde wijze van de twee voorgaande afhangen.

Wij onderzoeken dus, of elke term op dezelfde wijze van drie voorgaanden afhangt, en stellen daartoe voor de betrekkingsschaal

$$S + aR + bQ + cP = 0,$$

dan zullen wij moeten hebben

$$\frac{7}{9} + \frac{11}{9}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = 0,$$

$$\frac{85}{27} + \frac{7}{9}a + \frac{11}{9}b + \frac{1}{3}c = 0,$$

$$\frac{45}{27} + \frac{85}{27}a + \frac{7}{9}b + \frac{11}{9}c = 0$$

en

$$\frac{659}{81} + \frac{45}{27}a + \frac{85}{27}b + \frac{7}{9}c = 0;$$

lossen wij nu a, b en c uit de drie eerste dezer vergelijkingen op, dan vinden wij $a = 0$, $b = -\frac{8}{3}$ en $c = \frac{1}{3}$; deze waarden van a, b en c voldoen ook aan de vierde vergelijking en hieruit blijkt, dat werkelijk elk der gegevene termen op dezelfde wijze van drie voorgaande afhangt, en dat de betrekkingsschaal der reeks is

$$S + 0.R - \frac{8}{3}Q + \frac{1}{3}P = 0$$

of

$$3S + 0.R - 8Q + P = 0.$$

Door het bekende verband, dat er tusschen de betrekkingsschaal eener wederkeerige reeks en den noemer van hare voortbrengende breuk bestaat, weten wij dan verder, dat die noemer zijn zal

$$3 + 0.x - 8x^2 + x^3$$

of

$$3 - 8x^2 + x^3;$$

en wij hebben slechts dezen noemer met de opgegevene reeks te vermenigvuldigen, dat is het product

$$(3-8x^2+x^3)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x+\frac{11}{9}x^2+\frac{7}{9}x^3+\frac{85}{27}x^4+\text{enz.}\right)$$

te ontwikkelen, om voor den teller der voortbrengende breuk dadelijk te vinden

$$1 + x + x^2.$$

De voortbrengende breuk der opgegevene reeks is derhalve

$$\frac{1 + x + x^2}{3 - 8x^2 + x^3}.$$

CCVIII. VOORSTEL.

Door E. OLIVIER, Dz.

Welke waarden kan men aan de onbepaalde grootheid x

geven, opdat de uitdrukking $a^2x^2 + c$ een volkomen vierkant worde? (*)

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. A. Hansen, D. W. Hinse, G. Koster, F. O. Radijs, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

Men stelle, voor den vierkantswortel uit de opgegevene uitdrukking, $ax + \frac{m}{n}$, dan is

$$a^2x^2 + c = \left(ax + \frac{m}{n}\right)^2$$

of $$a^2x^2 + c = a^2x^2 + \frac{2max}{n} + \frac{m^2}{n^2};$$

hieruit wordt achtervolgens afgeleid

$$cn^2 = 2mnax + m^2,$$

$$2mnax = cn^2 - m^2$$

en $$x = \frac{cn^2 - m^2}{2mna}.$$

Neemt men dus voor m en n willekeurige getallen en vervolgens $x = \frac{cn^2 - m^2}{2mna}$, dan zal de opgegevene uitdrukking een volkomen vierkant zijn. Men vindt dan ook, voor deze waarde van x,

$$a^2x^2 + c = a^2\frac{(cn^2-m^2)^2}{4m^2n^2a^2} + c = \frac{(cn^2-m^2)^2}{4m^2n^2} + c =$$

$$= \frac{(cn^2-m^2)^2 + 4cm^2n^2}{4m^2n^2} = \frac{c^2n^4 + 2cm^2n^2 + m^4}{4m^2n^2} = \left(\frac{cn^2+m^2}{2mn}\right)^2.$$

CCVIII. Voorstel.

Door E. Olivier, Dz.

Wanneer a, b en c drie rationale getallen voorstellen, zoo is de vraag, welke rationale getallen men voor x en y kan nemen, opdat de uitdrukking $a^2x^2 + bxy + cy^2$ een volkomen vierkant worde? (†)

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. A. Hansen, D. W.

(*) Meier Hirsch, *Verz. van Voorb.* Vert. door G. Ramakers, bladz. 214. No. 36.

(†) Meier Hirsch, *Verz. van Voorb.* Vert. door G. Ramakers, bladz. 215. No. 37.

Hinse; G. Kesser, F. C. Radijs, J. S. Sprijer en J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing van E. Olivier, Dz.

Men stelle, voor den vierkantswortel uit de opgegevene uitdrukking, $ax + \frac{m}{n}y$, dan is

$$a^2x^2 + bxy + cy^2 = \left(ax + \frac{m}{n}y\right)^2,$$

waaruit achtervolgens wordt afgeleid:

$$a^2x^2 + bxy + cy^2 = a^2x^2 + \frac{2amxy}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2},$$

$$n^2bxy + cn^2y^2 = 2amnxy + m^2y^2,$$

$$n^2bx + cn^2y = 2amnx + m^2y,$$

$$(cn^2 - m^2)y = (2amn - bn^2)x$$

en $$x : y = cn^2 - m^2 : 2amn - bn^2.$$

Neemt men derhalve $x = cn^2 - m^2$ en $y = 2amn - bn^2$, dan zal de opgegevene uitdrukking een volkomen vierkant worden, voor alle rationale waarden, die men aan m en n mogt verkiezen te geven. Men vindt dan ook, voor deze waarden van x en y,

$$a^2x^2+bxy+cy^2 = a^2x^2+y(bx+cy) =$$
$$= a^2(cn^2-m^2)^2+(2amn-bn^2)(bcn^2-bm^2+2acmn-bcn^2) =$$
$$= a^2(cn^2-m^2)^2+(2amn-bn^2)(2acmn-bm^2) =$$
$$= a^2(cn^2-m^2)^2+4a^2cm^2n^2-2abcmn^3-2abm^3n+b^2m^2n^2 =$$
$$= a^2[(cn^2-m^2)^2+4cm^2n^2]-2abmn(cn^2+m^2)+b^2m^2n^2 =$$
$$= a^2(cn^2+m^2)^2-2abmn(cn^2+m^2)+b^2m^2n^2 =$$
$$= [a(cn^2+m^2)-bmn]^2=(acn^2+am^2-bmn)^2.$$

CCLX. VOORSTEL.

Door E. Olivier, Dz.

Gegeven zijnde:

$$x = \frac{1}{10}y - \frac{2}{10^3}y^2 + \frac{2^2}{10^5}y^3 - \frac{2^3}{10^7}y^4 + \text{enz.},$$

vraagt men y in eene reeks uit te drukken, die naar de magten van x opklimt? (*)

Opgelost *door* J. Bassan, J. A. Hansen, H. Middelberg, F. C. Radijs, J. S. Sprijer, D. W. Hanse en E. Olivier, Dz.

(*) Lehmus, *Höheren Analysis*, bl. 8.

OPLOSSING van J. BASSAN.

Voor de gegevene vergelijking kan men schrijven

$$x = \frac{1}{10}y - \frac{2}{10^2}y\left\{\frac{1}{10}y - \frac{2}{10^3}y^2 + \frac{2^2}{10^5}y^3 - enz.\right\},$$

of, daar de tusschen haakjes gestelde factor juist de voor x gegevene waarde is,

$$x = \frac{1}{10}y - \frac{2}{10^2}xy;$$

hieruit y afzonderende, vindt men gemakkelijk

$$y = \frac{50x}{5-x}.$$

Wanneer men nu $\frac{x}{5-x}$ in eene reeks ontwikkelt, vindt men

$$y = 50\left\{\frac{1}{5}x + \frac{1}{5^2}x^2 + \frac{1}{5^3}x^3 + \frac{1}{5^4}x^4 + enz.\right\}$$

of ook $y = 10x + 2x^2 + \frac{2}{5}x^3 + \frac{2}{25}x^4 + enz.$

CCX. VOORSTEL.

Door E. OLIVIER, Dz.

Gegeven zijnde de vergelijking:

$$x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + enz. = y - y^2 + y^3 - y^4 + enz.,$$

vraagt men x in eene naar de magten y, en y in eene naar de magten van x opklimmende reeks uit te drukken? (*)

OPGELOST door F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, D. W. HINSE en E. OLIVIER, Dz.

OPLOSSING van F. C. RADIJS.

Trekt men de beide leden der gegevene vergelijking van de eenheid af, dan verkrijgt men

$$1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - enz. = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - enz.;$$

hierin is nu het eerste lid de bekende ontwikkeling van e^{-x} (zijnde e het grondtal van het Neperiaansche logarithmenstelsel), terwijl het tweede lid de ontwikkeling is van het

(*) LEMMENS, Hoogeren Analysis, bl. 8.

gebroken $\frac{1}{1+y}$. Derhalve heeft men ook

$$e^{-x} = \frac{1}{1+y}$$

of $$e^{x} = 1 + y,$$

waaruit volgt

$$x = Nep. Log. (1 + y)$$

en $$y = e^{x} - 1.$$

Door dus *Nep. Log.* $(1 + y)$ en e^{x} te ontwikkelen, vindt men dadelijk, ter voldoening aan het gevraagde,

$$x = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + enz.$$

en $$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + enz.$$

CCXI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Welke waarden van ϕ *maken de functie*

$y = Nep.\ Log. \left(Sin.\phi^{Sin.\phi}\right)$ *tot een maximum of minimum?*

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., D. W. Hinse, J. S. Speijer, J. Bassan, F. C. Radijs *en* W. Smaasen.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Volgens de eigenschappen der logarithmen, kan men voor de opgegevene functie schrijven.

$$y = Sin.\phi.\ Nep.\ Log.\ Sin.\phi;$$

differentiëert men dezelve twee malen, dan vindt men

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = Cos.\phi \left\{1 + Nep.\ Log.\ Sin.\phi\right\}$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = \frac{Cos.^2\phi - (1 + Nep.\ Log.\ Sin.\phi)\ Sin.^2\phi}{Sin.\phi}.$$

Stellen wij nu $\frac{\partial y}{\partial \phi} = 0$, dan kan hieraan op tweeërlei wijze voldaan worden, namelijk door te nemen $Cos.\phi = 0$ of $1 + Nep.\ Log.\ Sin.\phi = 0$.

Nemen wij $Cos.\phi = 0$, dan volgt hieruit $\phi = 90°$ of $\phi = 270°$; maar $\phi = 270°$ maakt $y = 0 - Nep.Log.(-1)$ en dus y onbestaanbaar; voor $\phi = 90°$ echter, wordt $y = 0$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}$ negatief, zoodat $\phi = 90°$ de functie y tot een maximum maakt, welke waarde $y = 0$ is.

Nemen wij $1 + Nep.\ Log.\ Sin.\phi = 0$, dan wordt

$$Nep.\ Log.\ Sin.\phi = -1,$$

of dezen Neperiaanschen Logarithmus met den modulus van het gewone of Briggiaansche Logarithmenstelsel vermenigvuldigende,

$$Log.\ Sin.\phi = -0,43429;$$

dat is $$Log.\ Sin.\phi = 9,56571 - 10,$$

waarmede overeenstemt $Sin.\phi = 0,36788$

en $\phi = 21°\ 35'$ of $\phi = 158°\ 25'$.

Voor deze waarden van ϕ wordt $\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2}$ positief en bijgevolg de functie y een minimum. De waarde van dit minimum is negatief en wordt $y = 0,36788 \times -1 = -0,36788$.

Aanmerking. Omdat de cosinus van eenen boog gelijk is aan de sinus van zijn complement, zal men uit het bewezene gemakkelijk kunnen besluiten, dat de functie $y = Nep.\ Log.\ \left(Cos.\phi^{Cos.\phi}\right)$, voor $\phi = 0°$ een maximum, en voor $\phi = 68°\ 25'$ een minimum wordt.

CCXII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Welke waarden van ϕ maken de functie $y = Nep.\ Log.\ \left(Tang.\phi^{Tang.\phi}\right)$ tot een maximum of minimum?

Opgelost door S. Dik, Cornsz., J. S. Speijer, D. W. Hinse, J. Bassan, F. C. Radijs en W. Smaasen.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Schrijven wij voor de gegevene functie

$$y = Tang.\phi\ Nep.\ Log.\ Tang.\phi$$

en differentiëren wij dezelve twee malen, dan vinden wij

$$\frac{\delta y}{\delta \phi} = (1 + Nep.\ Log.\ Tang.\phi)\ Sec.^2\phi$$

en $$\frac{\delta^2 y}{\delta \phi^2} = \frac{2(1 + Nep.Log.Tang.\phi)Tang.^2\phi + Sec.^2\phi}{Cos.^2\phi Tang.\phi}.$$

Stellen wij nu $\frac{\delta y}{\delta \phi} = 0$, dan kan hieraan, omdat $Sec.\phi$ niet gelijk nul kan wezen, alleen voldaan worden door te nemen $1 + Nep.\ Log.\ Tang.\phi = 0$; hieruit volgt, even

als in de vorige oplossing handelende,

$$Nep.\ Log.\ Tang.\phi = +1,$$

$$Log.\ Tang.\phi = 9{,}56571 - 10,$$

$$Tang.\phi = 0{,}36788$$

en nagenoeg $\phi = 20^\circ\ 12'$;

voor deze waarde van ϕ, wordt $\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}$ positief en dus y een minimum; de waarde van dit minimum is, even als in het vorige voorstel, $y = -0{,}36788$.

Overigens is er geene waarde voor ϕ, die de functie tot een maximum zou maken.

Aanmerking van J. S. Speijer. Hoezeer y niet vatbaar is voor een maximum, is het nogtans klaar, dat, voor $\phi = 90^\circ$, y de grootste waarde bereikt; maar y is dan geen maximum, daar hiertoe vereischt wordt, dat de naastvolgende grootere en kleinere waarden van ϕ, beide kleinere waarden voor y geven. Dit nu heeft hier geen plaats; want, voor de naastvolgende grootere waarde van ϕ, is $Tang.\phi$ negatief en dus y onbestaanbaar.

CCXIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De waarde te vinden van het gebroken

$$\frac{\sqrt{(9x^2+3ax-8a^2)}+\sqrt[3]{(6a^2x-5x^3)}-\sqrt{(5x^2+4a^2)}}{\sqrt[3]{(13ax^2-5a^2x)}-\sqrt{(50x^2-25a^2)}+\sqrt[3]{(21a^2x+6ax^2)}}$$

ingeval $x = a$ genomen wordt?

Opgelost door G. Koster, S. Dik, Cornsz., J. Bassan, D. W. Hinse, F. C. Radijs en J. S. Speijer.

Oplossing van G. Koster.

In het gebroken $x = a$ stellende, komt er den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$; wij differentiëren derhalve teller en noemer ieder afzonderlijk ten opzigte van x, dan komt er, zoo wij gemakshalve den teller X en den noemer X′ noemen,

$$\frac{\partial X}{\partial X'} = \frac{\frac{18x+3a}{2\sqrt{(9x^2+3ax-8a^2)}}+\frac{2a^2-5x^2}{\sqrt[3]{(6a^2x-5x^3)^2}}-\frac{5x}{\sqrt{(5x^2+4a^2)}}}{\frac{26ax-5a^2}{3\sqrt[3]{(13ax^2-5a^2x)^2}}-\frac{10x}{\sqrt{(2x^2-a^2)}}+\frac{7a^2+4ax}{\sqrt[3]{(21a^2x+6ax^2)^2}}};$$

stellen wij nu hierin $x = a$, dan vinden wij

$$\frac{\partial X}{\partial X'} = \frac{\frac{21}{4}-3-\frac{5}{3}}{\frac{7}{4}-10+\frac{13}{9}} = \frac{\frac{7}{12}}{-\frac{245}{36}} = -\frac{21}{245},$$

waaruit blijkt, dat voor $x = a$ de waarde van het opgegeven gebroken $-\frac{21}{253}$ is.

CCXIV. VOORSTEL.

Door S. Dik, Cornsz.

Er zijn twee getallen, wier som tot derzelver verschil in reden is als 5 tot 1, en waarvan het verschil der vierkanten tot het verschil der derde magten staat als 30 tot 19. Welke getallen zijn dit?

Opgelost *door* J. de la Mar, S. Dik, Cornsz., J. A. Hansen, D. W. Hinse, J. Hemmakerk, Azz., G. Koster, H. Middelbeek, E. C. Radijs, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing van J. de la Mar.

Daar de som der getallen tot hun verschil staat als 5 tot 1, zoo kan men die som door $5x$ en het verschil door x voorstellen, als wanneer de getallen zelven zijn $3x$ en $2x$.

Verder moet men dan volgens de opgaaf hebben, de evenredigheid

$$9x^2 - 4x^2 : 27x^3 - 8x^3 = 30 : 19$$

of

$$5x^2 : 19x^3 = 30 : 19,$$

welke door vereenvoudiging overgaat in

$$5 : 19x = 30 : 19$$

of

$$1 : x = 6 : 1,$$

en waaruit alzoo volgt $x = \frac{1}{6}$.

De gevraagde getallen zijn derhalve

$$3x = \tfrac{1}{2} \text{ en } 2x = \tfrac{1}{3}.$$

CCXV. VOORSTEL.

Door S. Dik, Cornsz.

Men vraagt de waarde van y uit de vergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = (Sin.2\phi - \phi\, Sin.^2\phi)\; Cosec.\phi$$

te vinden?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. S. Speijer, E. C. Radijs, J. Bassan *en* D. W. Hinse.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Wanneer wij in de opgegevene vergelijking overbrengen $Sin.2\phi = 2Sin.\phi\; Cos.\phi$ en $Cosec.\phi = \frac{1}{Sin.\phi}$, dan wordt dezelve, na vermenigvuldiging met $\partial\phi$,

$$\frac{\delta^2 y}{\delta\phi} = 2Cos.\phi\delta\phi - \phi Sin.\phi\delta\phi;$$

derhalve is $\frac{\delta y}{\delta\phi} = 2\int Cos.\phi\delta\phi - \int\phi Sin.\phi\delta\phi.$

Nu is (Zie I. R. SCHMIDT, *Diff.* en *Int. Rek.* §§ 242 en 258) $\int Cos.\phi\delta\phi = Sin.\phi$ en $\int\phi Sin.\phi\delta\phi = Sin.\phi - \phi Cos.\phi$, hierdoor hebben wij

$$\frac{\delta y}{\delta\phi} = Sin.\phi + \phi Cos.\phi + C,$$

of $\delta y = Sin.\phi\delta\phi + \phi Cos.\phi\delta\phi + C\delta\phi,$

en $y = \int Sin.\phi\delta\phi + \int\phi Cos.\phi\delta\phi + \int C\delta\phi.$

Verder is (Zie: als boven) $\int Sin.\phi\delta\phi = -Cos.\phi$ en $\int\phi Cos.\phi\delta\phi = Cos.\phi + \phi Sin.\phi$, en hierdoor verkrijgen wij eindelijk

$$y = \phi Sin.\phi + C\phi + C'.$$

AANMERKING van J. S. SPEIJER. Men zal de waarde van y ook kunnen vinden, zonder twee achtervolgende malen te integreren. Uit de opgegevene vergelijking volgt namelijk terstond

$$y = \int\int(2Cos.\phi - \phi Sin.\phi)\delta\phi^2,$$

of wel $y = \int\{\delta\phi\int(2Cos.\phi - \phi Sin.\phi)\delta\phi\}.$

Hierop de algemeene herleidingsformule $\int X\delta Y = XY - \int Y\delta X$ toepassende, zal men, door $X = \int(2Cos.\phi - \phi Sin.\phi)\delta\phi$ en $Y = \phi$ te stellen, verkrijgen

$$y = \phi\int(2Cos.\phi - \phi Sin.\phi)\delta\phi - \int(2\phi Cos.\phi - \phi^2 Sin.\phi)\delta\phi.$$

Nu is (zoo als in bovenstaande oplossing gevonden is) $\int(2Cos.\phi - \phi Sin.\phi)\delta\phi = Sin.\phi + \phi Cos.\phi + C$, en verder $\int(2\phi Cos.\phi\delta\phi - \phi^2\delta\phi Sin.\phi) = \int(Cos.\phi\delta(\phi^2) + \phi^2\delta.Cos.\phi) = \int\delta.\phi^2 Cos.\phi = \phi^2 Cos.\phi + C'$; hierdoor wordt dan

$$y = \phi(Sin.\phi + \phi Cos.\phi + C) - (\phi^2 Cos.\phi + C')$$

of $y = \phi Sin.\phi + C\phi - C',$

welke waarde, daar C' zoowel positief als negatief kan genomen worden, volkomen met de vroeger gevondene overeenkomt.

CCXVI. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Als men buitenwaarts, op de opstaande zijden AB *en* BC *van eenen driehoek* ABC, *gelijkzijdige driehoeken* ABD *en* BCE *beschrijft, en vervolgens de lijnen* AE *en* CD *trekt,*

zullen: die lijnen even groot zijn; en de som der hoeken ADC *en* AEC *zal gelijk aan den tophoek* ABC *wezen. Men vraagt dit te bewijzen; en bovendien den driehoek te berekenen, indien, behalve de lijn* AE *of* CD *en de tophoek* ABC, *ook nog de afstand der punten* D *en* E *gegeven is?*

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. J. BASSAN, D. W. HINSÉ, H. MIDDELBURG *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Naar gelang de tophoek ABC kleiner dan 60° is, zoo als in Fig. 74; tusschen 60° en 120°, zoo als in Fig. 75; of grooter dan 120°, zoo als in Fig. 76, is het klaar, dat of alle drie de lijnen AE, CD en DE, of alleen de twee eerstgenoemde van deze lijnen, of geene van dezelve den driehoek ABC zullen doorsnijden. In elk dezer gevallen zijn de hoeken ABE en CBD onderling gelijk, omdat zij in Fig. 74 en 75 elk in het bijzonder 60° grooter dan de tophoek ABC zijn, hetgeen in Fig. 76 met hun aanvulsel tot 360° plaats heeft; voorts is AB = DB en BE = BC, zoodat de driehoeken ABE en DBC, als twee zijden met een' ingesloten hoek gelijk hebbende, gelijk en gelijkvormig zijn; hieruit volgt dat men heeft AE = CD, hetgeen in de eerste plaats moest bewezen worden.

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid der genoemde driehoeken volgt verder: *hoek* BEA = *hoek* BCD en *hoek* BAE = *hoek* BDC; trekt men dus uit B, door het snijpunt F der lijnen AE en CD, eene lijn BF, dan zal men op BF als koorde cirkelsegmenten kunnen beschrijven, waarvan het eene met zijnen omtrek door C en E, het andere door A en D gaat; om de vierhoeken BFCE en BFAD kunnen alzoo cirkels beschreven worden; hieruit volgt, dat men in Fig. 74 en 75 heeft

hoek AEC = *hoek* FBC en *hoek* ADC = *hoek* FBA;
waaruit door optelling volgt

hoek AEC + *hoek* ADC = *hoek* ABC;

terwijl men in Fig. 76 hebben zal

*hoek*AEC=180°—*hoek*FBC en *hoek*ADC=180°—*hoek*ABF,
waaruit door optelling insgelijks volgt

$$hoek\ AEC + hoek\ ADC = 360^\circ - hoek\ FBC - hoek\ ABE = hoek\ ABC,$$

hetgeen in de tweede plaats te bewijzen stond.

Na nog opgemerkt te hebben, dat de in onze figuren aanwezige lijnen, om het punt F zes hoeken elk van 60° vormen, gaan wij tot de verlangde berekening over.

Stellen wij daartoe AE = CD = a, DE = b, *hoek* ABC = α, AB = x en BC = y, dan hebben wij, uit de driehoeken ABE en DBE,

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ Cos.\ ABE$$

en

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ Cos.\ DBE;$$

maar nu is in Fig. 74 en 75 *hoek* ABE = 60° + α, in Fig. 76 *hoek* ABE = 300° − α, in Fig. 74 *hoek* DBE = 120° + α, in Fig. 75 en 76 *hoek* DBE = 240° − α, en dus in allen gevalle, daar in het algemeen $Cos.p = Cos.\ (360^\circ - p)$ is,

$$Cos.\ ABE = Cos.\ (60^\circ + \alpha) = Cos.\ 60^\circ\ Cos.\alpha - Sin.\ 60^\circ\ Sin.\alpha = \tfrac{1}{2}(Cos.\alpha - Sin.\alpha\sqrt{3}),$$

$$Cos.\ DBE = Cos.\ (120^\circ + \alpha) = Cos.\ 120^\circ\ Cos.\alpha - Sin.\ 120^\circ\ Sin.\alpha = -\tfrac{1}{2}(Cos.\alpha + Sin.\alpha\sqrt{3});$$

de beide vorige vergelijkingen worden alzoo:

$$a^2 = x^2 + y^2 - xy(Cos.\alpha - Sin.\alpha\sqrt{3}),$$

$$b^2 = x^2 + y^2 + xy(Cos.\alpha + Sin.\alpha\sqrt{3});$$

en door hiervan de som en het verschil te nemen, vinden wij

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy\,Sin.\alpha\sqrt{3} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en

$$a^2 - b^2 = -2xy\,Cos.\alpha \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Uit (1) kunnen wij afleiden

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^2 = 2xy - xy Sin.a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2) \\ (x-y)^2 = -2xy - xy Sin.a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\end{array}\right\} \quad (3),$$

of ook

terwijl uit (2) gevonden wordt

$$xy = -\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) Sec.a \quad \ldots \quad (4);$$

brengen wij dus deze waarde van xy in (3) over; dan verkrijgen wij

$$(x+y)^2 = -(a^2-b^2)Sec.a + \tfrac{1}{2}(a^2-b^2)Tang.a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2),$$

$$(x-y)^2 = +(a^2-b^2)Sec.a + \tfrac{1}{2}(a^2-b^2)Tang.a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2),$$

of kortheidshalve

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} - Sec.a = p$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} + Sec.a = q$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} + Sec.a = p'$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} - Sec.a = q'$$

stellende,

$$(x+y)^2 = a^2p + b^2q,$$

$$(x-y)^2 = a^2p' + b^2q'$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2p + b^2q)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2p' + b^2q')}$$

en

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2p + b^2q)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2p' + b^2q')}.$$

Hierdoor de zijden AB en BC des driehoeks bekend zijnde, kan het overige door de gewone regels der driehoeksmeting gevonden worden.

Was $a = 60°$ gegeven, dan zou men hebben $\tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} = \tfrac{3}{2}$, $Sec.a = 2$, $p = 0$; $q = 1$, $p' = 4$, $q' = -3$; in dit geval zou dus gevonden worden

$$x + y = b \text{ en } x - y = \sqrt{(4a^2 - 3b^2)}.$$

Was $a = 120°$ gegeven, dan zou men hebben $\tfrac{1}{2}Tang.a\sqrt{3} = -\tfrac{3}{2}$, $Sec.a = -2$, $p = 1$, $q = 0$, $p' = -3$, $q' = 4$; dus zou dan gevonden worden

$$x + y = a \text{ en } x - y = \sqrt{(4b^2 - 3a^2)}.$$

Men behoeft dan ook, voor de beide laatstgenoemde gevallen, slechts de figuren 77 en 78 te teekenen, om duidelijk in te zien, dat voor het eerste AB + BC = DE of $x + y = b$ en dat voor het laatste AB + BC = AE of $x + y = a$ zal moeten zijn.

Leidt men uit (1) af

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) - xySin.a\sqrt{3}$$

en brengt men hierin voor xy de waarde (4) over, dan komt er

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ Tang.\alpha\sqrt{3};$$

telt men hierbij volgens (2) op

$$-2xyCos.\alpha = a^2 - b^2$$

en neemt men in aanmerking, dat uit den driehoek ABC volgt, $AC^2 = x^2 + y^2 - 2xyCos.\alpha$, dan vindt men

$$AC^2 = \tfrac{1}{2}(3a^2 - b^2) + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\ Tang.\alpha\sqrt{3},$$

waardoor de basis des driehoeks onmiddellijk uit de gegevens kan worden berekend.

Voor $\alpha = 60°$, verkrijgt men $AC = \sqrt{(3a^2 - 2b^2)}$; en voor $\alpha = 120°$, $AC = b$.

CCXVII. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Wanneer, in eenen regthoekigen driehoek, een cirkel beschreven is, en vervolgens in een' der scherpe hoeken een tweede cirkel, die den eersten raakt, begeert men de zijden des driehoeks te vinden, als de stralen dezer cirkels gegeven zijn?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, D. W. HINSE, J. BAMAN, J. A. HANSEN, J. HEEMSKERK, ABZ., G. KOSTER, H. MIDDELBURG, F. C. BADIJS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC (Fig. 79) de regthoekige driehoek zijn, regthoekig in C; M en N de middelpunten van de in het voorstel bedoelde cirkels, dan zal de lijn MN, die deze middelpunten vereenigt, gelijk aan de som der stralen zijn en haar verlengde zal, door het hoekpunt A des driehoeks gaande, den hoek BAC middendoordeelen.

Trekken wij MD en NE loodregt op AC, alsmede NF evenwijdig met AC en MG loodregt op BC, en stellen wij $MD = a$, $NE = b$, *hoek* $BAC = 2\phi$, dan is $MN = a + b$, $MF = a - b$, *hoek* $MNF =$ *hoek* $MAC = \phi$, zoodat men uit den driehoek MNF slechts behoeft te nemen

$$Sin.\ MNF = \frac{MF}{MN},$$

om onmiddellijk te vinden

$$Sin.\phi = \frac{a - b}{a + b}.$$

Daar nu ϕ bekend is, kunnen de zijden des driehoeks mede gemakkelijk berekend worden; men heeft namelijk,

uit den driehoek AMD; $AD = MD \times Cot.\ MAD = aCot.\phi$,

en verder $AC = MG + AD = a + aCot.\phi = a(1 + Cot.\phi)$,

$BC = AC \times Tang.\ BAC = a(1 + Cot.\phi)\ Tang.2\phi$,

alsmede $AB = AC \times Sec.\ BAC = a(1 + Cot.\phi)\ Sec.2\phi$.

Wil men de zijden onmiddellijk in de gegevene stralen uitdrukken, dan berekene men

$$Cosec.\phi = \frac{1}{Sin.\phi} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$Cot.\phi = \sqrt{(Cosec.^2\phi - 1)} = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b},$$

$$1 + Cot.\phi = 1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a - b + 2\sqrt{ab}}{a-b};$$

$$(1 + Cot.\phi)\ Tang.2\phi = (1 + Cot.\phi)\ \frac{2Cot.\phi}{Cot.^2\phi - 1} = \frac{2Cot.\phi}{Cot.\phi - 1} = \frac{4\sqrt{ab}}{-a+b+2\sqrt{ab}}$$

en $$(1 + Cot.\phi)\ Sec.2\phi = (1 + Cot.\phi)\ \frac{Cosec.^2\phi}{Cot.^2\phi - 1} = \frac{Cosec.^2\phi}{Cot.\phi - 1} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)(-a+b+2\sqrt{ab})},$$

waardoor dan gevonden wordt $$AC = \frac{a(a - b + 2\sqrt{ab})}{a-b},$$

$$BC = \frac{4a\sqrt{ab}}{-a+b+2\sqrt{ab}}$$

en $$AB = \frac{a(a+b)^2}{(a-b)(-a+b+2\sqrt{ab})}.$$

Aanmerking. Indien men den driehoek uit de gegevens wilde construeren, zou men slechts, met de gegevene stralen, twee elkander rakende cirkels beschrijven; verder aan die cirkels raaklijnen AB en AC trekken, die ieder op zich zelven de beide cirkels aan denzelfden kant raken; en vervolgens aan den grootsten cirkel nog eene raaklijn BC, loodregt op eene der eerstgetrokkene raaklijnen AC.

Dewijl $\phi < 45^0$ en dus $Sin.\phi < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ moet zijn, wordt tot de mogelijkheid der oplossing gevorderd, dat men hebbe

$$\frac{a-b}{a+b} < \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

of door achtervolgende herleiding:

$$a - b < \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}b\sqrt{2},$$

$$a - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} < b + \tfrac{1}{2}b\sqrt{2},$$

$$a < b\,\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}},$$

en, omdat

$$\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}{(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})} = \frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 3+2\sqrt{2} \text{ is},$$

$$a < (3+2\sqrt{2})b;$$

zoodra dus de grootste straal grooter dan $(3+2\sqrt{2})$ maal de kleinste straal gegeven wordt, is de driehoek niet bestaanbaar in den eigenlijken zin des voorstels. Deze onbestaanbaarheid houdt echter op, indien men de cirkels zoodanig buiten den driehoek wil beschrijven, als in Fig. 80 is aangewezen; aldaar raakt de grootste cirkel de drie zijden des regthoekigen driehoeks, terwijl de kleinste, behalve den eersten cirkel, ook nog de hypothenusa en eene regthoekzijde raakt.

CCXVIII. Voorstel.

Door J. Teixeira de Mattos, Jr.

Hetzelfde als in het vorige voorstel wordt gevraagd, indien de driehoek niet regthoekig is, maar behalve de genoemde stralen ook nog de omtrek des driehoeks is gegeven?

Opgelost door J. Badon Ghijben, D. W. Hinse, J. Bassan, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Abz., G. Koster, H. Middelburg, F. C. Radijs, J. S. Speijer en J. Teixeira de Mattos, Jr.

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Laat ABC (Fig. 81) de bedoelde driehoek verbeelden, waarin alles op dezelfde wijze is voorgesteld als in Fig. 79, alleen met dit verschil, dat de hoek C nu niet meer regt is, dan hebben wij, wederom MD = a, NE = b en hoek BAC = 2ϕ stellende, even als in de vorige oplossing

$$Sin.\phi = \frac{a-b}{a+b},$$

en

$$AD = aCot.\phi.$$

Omdat AH = AD, BH = BG en CD = CG is, hebben wij uit de figuur

$$AB + AC - BC = AH + BH + AD + CD - BG - CG = 2AD$$

of

$$AB + AC - BC = 2aCot.\phi;$$

is dus gegeven $AB + AC + BC = 2p$,

dan hebben wij, door de halve som en het halve verschil der beide laatste vergelijkingen te nemen,

$$AB + AC = p + aCot.\phi$$

en

$$BC = p - aCot.\phi;$$

of ook, daar uit $Sin.\phi = \frac{a-b}{a+b}$ volgt $Cot.\phi = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$,

$$AB + AC = p + \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$BC = p - \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Van den driehoek ABC is dus nu bekend: de bazis BC, de tophoek BAC en de som der opstaande zijden AB en AC; en hierdoor is deszelfs verdere berekening, tot vroeger opgeloste voorstellen, bij voorbeeld tot het CXCII. VOORSTEL, teruggebragt.

Verlangt men ook de opstaande zijden in de gegevens uit te drukken, dan neme men de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}\, AB \times AC \times Sin.2\phi = pa,$$

waarvan elk lid den inhoud des driehoeks op eene verschillende wijze uitdrukt, en trekke uit dezelve

$$AB \times AC = \frac{pa}{Sin.\phi Cos.\phi}$$

of, omdat uit $Sin.\phi = \frac{a-b}{a+b}$ volgt $Cos.\phi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, door

deze waarden voor $Sin.\phi$ en $Cos.\phi$ te substitueren,

$$AB \times AC = \frac{pa(a+b)^2}{2(a-b)\sqrt{ab}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Door nu het vierkant der vergelijking (1) te verminderen met het viervoud der vergelijking (3), en uit het verschil den vierkantswortel te nemen, komt er

$$AB - AC = \sqrt{\left\{p^2 - \frac{2pa(a^2+b^2)}{(a-b)\sqrt{ab}} + \frac{4a^3b}{(a-b)^2}\right\}} \, . \, . \, (4),$$

zoodat men uit verbinding van (1) met (4) vindt:

$$AB = \tfrac{1}{2}p + \frac{a\sqrt{ab}}{a-b} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{p^2 - \frac{2pa(a^2+b^2)}{(a-b)\sqrt{ab}} + \frac{4a^3b}{(a-b)^2}\right\}} \, . \, . \, (5)$$

en

$$AC = \tfrac{1}{2}p + \frac{a\sqrt{ab}}{a-b} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{p^2 - \frac{2pa(a^2+b^2)}{(a-b)\sqrt{ab}} + \frac{4a^3b}{(a-b)^2}\right\}} \, . \, . \, (6).$$

Door de formulen (2), (5) en (6) zijn alzoo de zijden des driehoeks in de gegevens uitgedrukt.

Aanmerking. Indien men den driehoek uit de gegevens wil construeren, beschrijve men eerst, met de gegevene stralen, twee elkander rakende cirkels; aan deze cirkels trekke men twee raaklijnen AB en AC, die elk in het bijzonder de cirkels aan denzelfden kant raken. Neemt men dan op eene dezer raaklijnen, bij voorbeeld op AH, van H af, een stuk HI, dat gelijk is aan de helft van den gegeven omtrek, dan zal $AI = p + aCot.\phi$ de som der zijden om den hoek BAC zijn, en men kan dus verder de constructie volgen, die in de Aanmerking op het CXCII. Voorstel is aangewezen.

De uitdrukking, die in de gevondene formulen onder het wortelteeken staat, kan, door dezelve in factoren te ontbinden, herleid worden tot den vorm

$$\left(p - \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}a^2\right)\left(p - \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}b^2\right);$$

daar nu a de grootste der gegevene stralen voorstelt, is klaarblijkelijk $\frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}a^2$ grooter dan $\frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}b^2$; is derhalve $p > \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}a^2$, dan zijn de beide bovenstaande factoren positief, is $p < \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}b^2$, dan zijn

beide negatief, in beide gevallen is hun product positief; maar is p tusschen de grenzen $\frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}a^2$ en $\frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}b^2$ gegeven, dan is de eerste factor negatief, de tweede positief en dus hun product negatief; de bestaanbaarheid der wortelgrootheid vordert dus, dat p niet tusschen de genoemde grenzen gegeven zij.

Zal het voorstel voor eene oplossing in den eigenlijken zin vatbaar zijn, dan moet BC positief en dus $p > \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b}$ zijn; is nu $p > \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}a^2$ gegeven, dan zal van zelve $p > \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b}$ wezen; maar is $p < \frac{2a}{(a-b)\sqrt{ab}}b^2$, dan zal ook van zelve $p < \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b}$ zijn. Voor eene eigenlijke oplossing der vraag, wordt dus gevorderd, dat p boven de grootste der genoemde grenzen gegeven zij; is p beneden de kleinste der genoemde grenzen gegeven, dan wordt slechts BC negatief, en is de vraag voor eene oneigenlijke oplossing vatbaar, door cirkels in aanmerking te nemen, die de zijden des driehoeks niet alle inwendig raken; maar werd p tusschen die grenzen gegeven, dan zou de oplossing ook in den uitgestrektsten zin onmogelijk zijn.

CCXIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

De integraal van $\frac{\delta\phi\sqrt{(1 - Cos.\phi)}}{Tang.^2\phi}$ *te vinden?*

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. Bassan, F. C. Radijs, W. Smaasen *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* D. W. Hinse.

Omdat men in het algemeen heeft

$$\frac{1}{Tang.^2\phi} = \frac{1}{Sin.^2\phi} - 1 = \frac{1}{4Sin.^2\frac{1}{2}\phi Cos.^2\frac{1}{2}\phi} - 1,$$

$$\sqrt{(1 - Cos.\phi)} = (\sqrt{2})Sin.\tfrac{1}{2}\phi$$

en

$$\delta\phi = 2\delta\tfrac{1}{2}\phi,$$

zoo is

$$\frac{\delta\phi\sqrt{(1-Cos.\phi)}}{Tang.^2\phi} = (2\sqrt{2})\delta\tfrac{1}{2}\phi.Sin.\tfrac{1}{2}\phi.\left\{\frac{1}{4Sin.^2\frac{1}{2}\phi Cos.^2\frac{1}{2}\phi} - 1\right\},$$

of $\frac{\partial\phi\sqrt{(1-Cos.\phi)}}{Tang.^2\phi}=(\frac{1}{2}\sqrt{2})\left\{\frac{\partial.\frac{1}{2}\phi}{Sin.\frac{1}{2}\phi Cos.^2\frac{1}{2}\phi}-4Sin.\frac{1}{2}\phi\partial\frac{1}{2}\phi\right\}$

en bijgevolg

$$\int\frac{\partial\phi\sqrt{(1-Cos.\phi)}}{Tang.^2\phi}=(\frac{1}{2}\sqrt{2})\left\{4Cos.\tfrac{1}{2}\phi+\int\frac{\partial\frac{1}{2}\phi}{Sin.\frac{1}{2}\phi Cos.^2\frac{1}{2}\phi}\right\}.$$

Nu is (volgens J. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 251, 1e druk)

$$\int\frac{\partial\frac{1}{2}\phi}{Sin.\frac{1}{2}\phi Cos.^2\frac{1}{2}\phi}=\frac{1}{Cos.\frac{1}{2}\phi}+Nep.\,Log.\,Tang.\tfrac{1}{4}\phi$$
$$=Sec.\tfrac{1}{2}\phi+Nep.\,Log.\,Tang.\tfrac{1}{4}\phi,$$

en dus wordt, door substitutie dezer waarde,

$$\int\frac{\partial\phi\sqrt{(1-Cos.\phi)}}{Tang.^2\phi}=(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\left\{4Cos.\tfrac{1}{2}\phi+Sec.\tfrac{1}{2}\phi+Nep.Log.Tang.\tfrac{1}{4}\phi+C\right\}.$$

CCXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

De integraal te vinden van

$$\partial\phi(Sin.\phi-Cos.\phi)\sqrt{(1-Sin.\phi-Cos.\phi-Sin.2\phi)}.$$

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, J. BASSAN, D. W. HINSE *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Stellen wij

$$1-Sin.\phi-Cos.\phi=x \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

dan wordt $\qquad Sin.\phi+Cos.\phi=1-x \quad \ldots \quad (2);$

door nu (1) te differentiëren, vinden wij

$$\partial\phi(Sin.\phi-Cos.\phi)=\partial x \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

en door (2) in het vierkant te brengen

$$Sin.^2\phi+Cos.^2\phi+2Sin.\phi\,Cos.\phi=1-2x+x^2$$

of, omdat $Sin.^2\phi+Cos.^2\phi=1$ en $2Sin.\phi\,Cos.\phi=Sin.2\phi$ is,

$$Sin.2\phi=x^2-2x \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Door substitutie der waarden (1), (3) en (4), gaat de opgegevene uitdrukking over in $\partial x\sqrt{(3x-x^2)}$, zoodat wij, de te vindene integraal y noemende, hebben

$$y=\int\partial x\sqrt{(3x-x^2)}.$$

Nu is (Zie J. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 209, 1e druk) in het algemeen,

$$\int\partial x\sqrt{(2rx-x^2)}=-\tfrac{1}{2}(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}-\tfrac{1}{2}r^2 Boog Sin.\frac{r-x}{r};$$

wij behoeven dus hierin slechts $2r=3$ of $r=\frac{3}{2}$ te nemen, om dadelijk te vinden

$y = -\frac{1}{4}(3-2x)\sqrt{(3x-x^2)} - \frac{9}{8}\,Boog\,Sin.\,(1-\frac{2}{3}x) + C$;
of, zoo wij wederom $x = 1 - Sin.\phi - Cos.\phi$ substitueren,
$$y = -\tfrac{1}{4}(1+2Sin.\phi+2Cos.\phi)\sqrt{(1-Sin.\phi-Cos.\phi-Sin.2\phi)}$$
$$-\tfrac{9}{8}Boog\,Sin.\tfrac{1}{3}(1+2Sin.\phi+2Cos.\phi)+C.$$

AANMERKING uit *de oplossing van* J. S. SPEIJER. Wil men de integraal voor $\phi = 0$, of $x = 0$ laten verdwijnen, dan zal men $C = \frac{9}{8}\,Boog\,Sin.1 = \frac{9}{16}\pi$ moeten nemen; alsdan wordt
$$y = -\tfrac{1}{4}(3-2x)\sqrt{(3x-x^2)} + \tfrac{9}{8}(\tfrac{1}{2}\pi - Boog\,Sin.(1-\tfrac{2}{3}x))$$
zoodat men, omdat in het algemeen
$$\tfrac{1}{2}\pi - Boog\,Sin.\,p = Boog\,Sin.\sqrt{(1-p^2)}$$
is, na behoorlijke herleiding ook nog vindt
$$y = -\tfrac{1}{4}(3-2x)\sqrt{(3x-x^2)} + \tfrac{9}{8}\,Boog\,Sin.\,\tfrac{2}{3}\sqrt{(3x-x^2)};$$
of, voor x hare waarde stellende,
$$y = -\tfrac{1}{4}(1+Sin.2\phi+Cos.2\phi)\sqrt{(1-Sin.\phi-Cos.\phi-Sin.2\phi)}$$
$$+\tfrac{9}{8}\,Boog\,Sin.\,\tfrac{2}{3}\sqrt{(1-Sin.\phi-Cos\,\phi-Sin.2\phi)},$$
waarbij men nu weder eene nieuwe standvastige kan voegen.

CCXXI. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Zeker getal van twee cijfers is het product van twee ongelijke factoren; de som van de beide cijfers is gelijk aan den grootsten factor en tevens een volkomen vierkant; terwijl het bedoelde getal juist de pronik van den kleinsten factor is. Welk getal is dit?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, G. KOSTER, J. A. HANSEN, A. B. BRAVE, S. DIK, CORNSZ., D. W. HINSE, P. KROM, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS, J. HEEMSKERK, ABZ., J. SJOENIS *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

I. OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat den kleinsten factor gelijk x gesteld worden, dan is het getal volgens de laatste voorwaarde gelijk $x^2 + x$, en dus de grootste factor gelijk $x + 1$.

Men stelle verder voor de cijfers van het bedoelde getal y en z, dan heeft men de vergelijkingen
$$10y + z = x^2 + x \text{ en } y + z = x + 1;$$
deze beide van elkander aftrekkende, verkrijgt men
$$9y = x^2 - 1$$
of wel
$$9y = (x+1)(x-1),$$

in welke vergelijking x en y geheele getallen, kleiner dan 10, moeten zijn.

Omdat nu $x + 1$ en $x - 1$ niet beide door 3 deelbaar kunnen zijn, zoo volgt hieruit, dat

$$x + 1 = 9 \text{ en } x - 1 = y$$

zal moeten wezen. Men heeft dus $x = 8$ en $y = 7$; en het gevraagde getal is alzoo $x^2 + x = 72$.

Aanmerking. Uit deze oplossing blijkt, dat de voorwaarde, dat de grootste factor een vierkant moet zijn, overtollig is.

II. Oplossing van G. Koster.

Daar het gevraagde getal een pronik is en uit twee cijfers bestaat, kan het geen ander zijn dan 12, 20, 30, 42, 56, 72 of 90. Daar de som der cijfers een volkomen vierkant moet zijn, kunnen, van de genoemde getallen, alleen 72 of 90 in aanmerking komen. Zoo men nu elk dezer getallen, door den kleinsten factor, dat is door deszelfs pronikwortel 8 of 9, deelt, komt er 9 of 10 voor den grootsten factor. En daar eindelijk deze grootste factor een volkomen vierkant en tevens gelijk aan de som der cijfers van het gevraagde getal moet zijn, ziet men hieruit duidelijk, dat 72 het bedoelde getal is.

Aanmerking. Uit deze oplossing blijkt, dat de voorwaarden, dat de grootste factor een vierkant en tevens gelijk aan de som der cijfers zijn moet, niet beide noodig zijn, om het gevraagde getal te bepalen, en dat dus een van beide konde gemist worden.

CCXXII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Wanneer men het getal 10 *door het enkele teeken* ɪ *voorstelt, wordt een zeker jaartal, in twee onderscheidene talstelsels, wier grondtallen* 4 *verschillen, aldus uitgedrukt:*

106ɪ en 712.

Welk jaartal wordt hier bedoeld?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., A. B. Brave, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Abz., D. W. Hinse, G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, F. C. Radijs, J. Sjoernis, J. S. Speijer *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Daar het getal in het eerste talstelsel met meer cijfers geschreven wordt dan in het tweede, moet het grondtal van het eerste stelsel kleiner dan dat van het tweede zijn. Stellende dus het grondtal van het eerste stelsel door x voor, dan zal dat van het tweede $x + 4$ zijn. Het bedoelde jaartal, uit het eerste talstelsel in het tientallige overgebragt, zal dan zijn

$$x^3 + 6x + 10 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A);$$

en dit jaartal uit het tweede talstelsel in het tientallige overbrengende, komt er

$$7(x + 4)^2 + (x + 4) + 2 \quad \ldots \quad (B).$$

Wij hebben dus de vergelijking

$$x^3 + 6x + 10 = 7(x + 4)^2 + (x + 4) + 2,$$

die na herleiding overgaat in

$$x^3 - 7x^2 - 51x - 108 = 0,$$

en waarvan alleen $x = 12$ een bestaanbare wortel is. Het bedoelde jaartal wordt dus door 1061 in het twaalftallig en door 712 in het zestientallig stelsel uitgedrukt; terwijl men, door $x = 12$ in eene der vormen (A) of (B) te substitueren, voor dat jaartal, in het tientallig stelsel uitgedrukt, 1810 vindt.

CCXXIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Van twee gelijke en gelijkvormige ellipsen, wentelt de eene om de groote, de andere om de kleine as; in elk der hierdoor ontstaande ellipsoïden wordt een grootstmogelijke cilinder beschreven. Wat is nu het verschil van de inhouden dezer cilinders?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., D. W. Hinse, J. A. Hansen, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* J. Sjoernis.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Laat EF (Fig. 82) een cilinder voorstellen, beschreven in de ellipsoide, die ontstaan is door de omwenteling der ellips ADBC om hare groote as AB, en zij E'F' (Fig. 83) een cilinder in de ellipsoide beschreven, die door de omwenteling derzelfde ellips om hare kleine as CD is voortgebragt, dan hebben wij, de inhouden dezer cilinders I en I' noemende,

$$I = EG^2\pi \times 2.GO \text{ en } I' = E'G'^2\pi \times 2.G'O.$$

Laat nu gegeven zijn $AB = 2a$, $CD = 2b$, en stellen wij $OG = x$, $OG' = x'$, dan is, volgens de bekende middelpuntsvergelijking der ellips,

$$EG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ en } E'G'^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x'^2),$$

zoodat wij door substitutie dezer waarden hebben

$$I = \frac{2\pi b^2}{a^2}(a^2x - x^3) \text{ en } I' = \frac{2\pi a^2}{b^2}(b^2x' - x'^3).$$

Zullen nu I en I' de inhouden der grootstmogelijke cilinders voorstellen, dan moeten x en x' zoodanig bepaald worden, dat de functiën $a^2x - x^3$ en $b^2x' - x'^3$ maxima zijn; stellen wij daartoe

$$z = a^2x - x^3,$$

dan verkrijgen wij, door te differentiëren,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a^2 - 3x^2 \text{ en } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x,$$

en alsnu $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ stellende, vinden wij daaruit $x = \pm \frac{1}{3}a\sqrt{3}$;

daar $x = +\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, aan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ eene negatieve en aan z eene positieve waarde geeft, wijst zij voor z een maximum aan; voor $x = -\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, zou $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ positief, en dus z een minimum worden, maar dan zou ook z zelve negatief zijn. Wij hebben dus voor het verlangde maximum $x = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. De functie $b^2x' - x'^3$ zal blijkbaar even zoo een maximum zijn, indien $x' = \frac{1}{3}b\sqrt{3}$ wordt genomen; door dus, in de bovenstaande formulen voor I en I', te substitueren $x = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ en $x' = \frac{1}{3}b\sqrt{3}$, verkrijgen wij, voor de inhouden der bedoelde grootstmogelijke cilinders,

$$I = \tfrac{4}{9}\pi ab^2\sqrt{3} \text{ en } I' = \tfrac{4}{9}\pi a^2b\sqrt{3},$$

zoodat het gevraagde verschil is

$$I' - I = \tfrac{4}{9}\pi ab(a - b)\sqrt{3}.$$

AANMERKINGEN. 1°. De inhouden der ellipsoiden zelven, worden zoo als bekend is uitgedrukt door de formulen

$$E = \tfrac{4}{3}\pi ab^2 \text{ en } E' = \tfrac{4}{3}\pi a^2b;$$

derhalve is

$$E : I = E' : I' = E' - E : I' - I = 3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1.$$

2°. Indien de cilinders EF en E'F', in plaats van de grootstmogelijke in de ellipsoiden te zijn, ontstaan waren door de omwenteling van den grootstmogelijken regthoek, die in de ellips beschreven kan worden, zou men hebben (Zie *Nieuwe Wis- en Natuurk. Verh.* des Genootschaps, bl. 87. § 10.)

$$OG = E'G' = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \text{ en } EG = OG' = \tfrac{1}{2}b\sqrt{2};$$

zoodat dan, de inhouden dezer cilinders door i en i' voorstellende,

$$i = EG^2\pi \times 2GO = \tfrac{1}{2}\pi ab^2\sqrt{2} \text{ en } i' = E'G'^2\pi \times 2G'O = \tfrac{1}{2}\pi a^2 b\sqrt{2}$$

zou wezen. Hieruit volgt dan verder

$$I : i = I' : i' = 8\sqrt{3} : 9\sqrt{2} = \sqrt{192} : \sqrt{162},$$

waaruit blijkt, dat de cilinders, door de omwenteling van den grootstmogelijken in de ellips beschreven regthoek ontstaan, merkelijk kleiner zijn, dan de grootstmogelijke cilinders, die men in de ellipsoiden beschrijven kan.

CCXXIV. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Men begeert een getal te vinden, zoodanig, dat de som van de tweede- en derdemagtswortels uit dat getal een pronik zij, waarvan de pronikwortel 1 *minder is dan het verschil der genoemde tweede- en derdemagtswortels?*

OPGELOST *door* D. W. HINSE, A. B. BRAVE, J. A. HANSEN, G. KOSTER, P. KROM, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS, J. SJOERNIS, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* D. W. HINSE.

Stellen wij voor het gevraagde getal . . . . x^6,
dan is de tweedemagtswortel . . . . x^3,
— — de derdemagtswortel . . . . x^2
en de genoemde pronikwortel . . . . . . $x^3 - x^2 - 1$;
wij hebben dus de vergelijking

$$x^3 + x^2 = (x^3 - x^2 - 1)^2 + x^3 - x^2 - 1$$

of $$x^3 + x^2 = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1 + x^3 - x^2 - 1,$$

dat is, $$x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 = 0;$$

en, zoo wij het voorste lid in factoren ontbinden,

$$x^3(x^2 + 1)(x - 2) = 0.$$

Door elken dezer factoren gelijk nul te stellen, vindt men achtervolgens

$x^6 = 0$, $x^6 = -1$ en $x^6 = 64$;

wil men dus, dat de genoemde wortels bestaanbare positieve getallen zijn, dan is het gevraagde getal 64; terwijl, zoo men de onbestaanbare of negatieve getallen niet uitsluit, ook 0 en -1 aan de gestelde voorwaarden voldoen.

CCXXV. Voorstel.

Door J. Teixeira de Mattos, Jr.

Zoek een getal van twee cijfers, zoodanig, dat de derde magt van de som der cijfers gelijk is aan de tweede magt van het verschil hunner vierkanten; terwijl het product der cijfers gelijk is aan hunne dubbele som?

Opgelost *door* A. B. Brave, D. W. Hinse, J. S. Speijer, J. P. A. François, J. A. Hansen, A. Hulscher, G. Koster, P. Krom, H. Middelburg, F. C. Radijs, J. Heemskerk, Abz., J. Sjoenis *en* J. Teixeira de Mattos, Jr.

Oplossing *van* A. B. Brave.

Als men het cijfer der tientallen door x en dat der eenheden door y voorstelt, geeft de opgave aanleiding tot de vergelijkingen

$$(x + y)^3 = (x^2 - y^2)^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en

$$xy = 2(x + y) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

De vergelijking (1) is door $(x + y)^2$ deelbaar, en wordt daardoor

$$x + y = (x - y)^2,$$

waaruit in verband met (2) volgt

$$xy = 2(x - y)^2 \quad \ldots \ldots \quad (3);$$

zoo men nu de vergelijking (2) in het vierkant brengt, en daarvan vervolgens het dubbel der vergelijking (3) aftrekt, komt er

$$(xy)^2 - 2xy = 4(x + y)^2 - 4(x - y)^2$$

of

$$x^2y^2 - 2xy = 16xy,$$

dat is,

$$x^2y^2 = 18xy,$$

waaruit volgt

$$xy = 18;$$

deze waarde voor xy in (2) en (3) overbrengende, vindt men

$$x + y = 9$$

en

$$x - y = \pm 3;$$

en zoo men nu ten laatste de halve som en het halve verschil dezer vergelijkingen neemt, komt er

$$x = 6 \text{ of } 3 \quad \text{en} \quad y = 3 \text{ of } 6,$$

weshalve het begeerde getal zijn moet 36 of 63.

CCXXVI. Voorstel.

Door A. Hulscher.

Drie getallen te vinden, zoodanig: dat het eerste gelijk is aan den vierkantswortel uit de som der beide overige; dat het tweede gelijk is aan den vierkantswortel uit de dubbele som der beide overige; en dat het derde gelijk is aan den vierkantswortel uit de som van de vierkanten der beide overige?

Opgelost *door* D. W. Hinse, J. S. Speijer., A. B. Brave, J. A. Hansen, G. Koster, H. Middelburg, F. C. Radijs, J. Teixeira de Mattos, Jr., A. Hulscher, J. Bassan, J. P. A. François, J. Heemskerk, Abz., en J. Sjoenis.

Oplossing van D. W. Hinse.

Stelt men voor de gevraagde getallen $x^2 - y^2$, $2xy$ en $x^2 + y^2$, dan is aan de derde voorwaarde voldaan.

Volgens de beide eerste voorwaarden, moet men dan nog hebben

$$x^2 - y^2 = x + y$$

en

$$2xy = 2x.$$

Zoo men de tweede vergelijking in de gedaante $2x(y-1)=0$ schrijft, ziet men terstond, dat of $x = 0$, of $x = 1$ moet wezen.

Neemt men om aan de tweede vergelijking te voldoen $x = 0$, en substitueert men deze waarde voor x in de eerste vergelijking, dan komt er

$$y^2 + y = 0 \quad \text{of} \quad y(y+1) = 0,$$

waaraan voldoet $y = 0$ en $y = -1$. Neemt men nu, nevens $x = 0$, ook $y = 0$, dan zijn de drie begeerde getallen alle nul. Neemt men echter, nevens $x=0, y=-1$, dan zijn de begeerde getallen -1, 0 en $+1$.

Neemt men, om aan de tweede vergelijking te voldoen, $y = 1$, en substitueert men deze waarde voor y in de eerste vergelijking, dan komt er

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ of } (x+1)(x-2) = 0,$$

waaraan voldoet $x = -1$ en $x = 2$. Neemt men nu, nevens $y = 1$, $x = -1$, dan worden de begeerde ge-

tallen 0, — 2 en + 2. Neemt men echter, nevens $y = 1$, $x = 2$, dan vindt men, voor de getallen 3, 4 en 5.

De gevraagde getallen zijn dus: 1°. 0, 0 en 0;
2°. —1, 0 en +1;
3°. 0, —2, en +2;
of 4°. 3, 4, en 5;

van welke vier antwoorden, zoo men wezenlijke getallen verlangt, alleen het laatste in aanmerking komt.

CCXXVII. Voorstel.

Door A. Hulscher.

Hoe vindt men, door middel van een enkel gewigt P, en eene in genoegzame onderdeelen verdeelde lengtemaat, het gewigt van eene staaf ijzer, welke ondersteld wordt overal van gelijke dikte en digtheid te zijn?

Opgelost *door* A. Hulscher, J. P. A. François, J. A. Hansen, F. C. Radijs, J. Sjoenis *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* A. Hulscher.

Men hange het gewigt P aan het eene uiteinde der staaf, en zoeke in welk punt men de staaf zal moeten ondersteunen, opdat zij zich, met het gewigt P op genoemde wijze belast, in evenwigt bevinde. Daarna mete men, met de aanwezige lengtemaat, de afstanden, waarop het gevondene steunpunt zich van de uiteinden der staaf bevindt; dan kan het gewigt der staaf op de volgende wijze gevonden worden.

Laat Z het zwaartepunt zijn der staaf AB, (Fig. 84), die in A met het gewigt P is belast, en in S ondersteund zijnde, zich in evenwigt bevindt; indien dan gemeten zijn de afstanden $AS = m$ en $BS = n$, is $AB = m + n$ en, wegens de gelijkmatige dikte en digtheid der staaf, $AZ = \frac{1}{2}(m+n)$; waaruit volgt $SZ = AZ - AS = \frac{1}{2}(m+n) - m = \frac{1}{2}(n - m)$. Stellen wij verder het gewigt der staaf door X voor, dan volgt uit het evenwigt, dat de momenten van X en P ten opzigte van het punt S, even groot moeten zijn; en dat wij alzoo hebben de vergelijking

$$AS \times P = SZ \times X$$

of

$$m\,P = \tfrac{1}{2}(n - m)X,$$

waaruit terstond gevonden wordt

$$X = \frac{2m}{n - m}P.$$

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door W. Smaasen.

Welke kromme lijnen hebben de eigenschap, dat, voor een willekeurig punt van dezelve, de kromtestraal even groot is als de normaal?

Opgelost *door* W. Smaasen, D. W. Hinse, J. S. Speijer *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. Smaasen.

Indien $y = F(x)$ de vergelijking eener kromme lijn is, en wij $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$ stellen, wordt voor een willekeurig punt dier kromme, de lengte der normaal door $y\sqrt{(1+p^2)}$ en die der kromtestraal door $-\frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}$ of $+\frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}$ uitgedrukt, naar gelang wij willen onderstellen, dat de kromtestralen met de normalen aan dezelfde zijde der kromme en dus op elkander vallen, of dat de kromtestralen en normalen ter wederzijde van de kromme en dus in elkanders verlengde liggen.

In de eerste onderstelling, zullen wij volgens de opgave moeten hebben

$$y\sqrt{(1+p^2)} = -\frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}$$

of, met q vermenigvuldigende en door $\sqrt{(1+p^2)}$ deelende,

$$yq = -(1+p^2) \quad \ldots \ldots \quad (1);$$

daar $p^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ is, vinden wij door differentiatie

$$2p\partial p = 2\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 y}{\partial x} = 2\partial y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2q\partial y,$$

waaruit volgt

$$q = \frac{p\partial p}{\partial y};$$

deze waarde voor q in (1) overbrengende, komt er

$$\frac{yp\partial p}{\partial y} = -(1+p^2)$$

of

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{p\partial p}{1+p^2} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Deze vergelijking kan onmiddellijk geïntegreerd worden; die integraal is

$$Log.y = Log.c - Log.\sqrt{(1 + p^2)}$$

of
$$y = \frac{c}{\sqrt{(1 + p^2)}};$$

zonderen wij hieruit p af, dan vinden wij

$$p = \frac{\sqrt{(c^2 - y^2)}}{y};$$

derhalve is
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{(c^2 - y^2)}}{y}$$

of
$$\partial x = \frac{y \partial y}{\sqrt{(c^2 - y^2)}},$$

zoodat wij, door nogmaals te integreren, verkrijgen

$$x = c' + \sqrt{(c^2 - y^2)},$$

of ook
$$(x - c')^2 + y^2 = c^2 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Deze vergelijking behoort tot eenen cirkel, waarvan c de straal is, en welks middelpunt op de as der x, en op den afstand c' van den oorsprong der coördinaten, ligt.

In de tweede onderstelling, moeten wij volgens de opgave hebben

$$y\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{\sqrt{(1 + p^2)^3}}{q}$$

of
$$yq = (1 + p^2) \quad \ldots\ldots \quad (1'),$$

waaruit men, even als boven, afleiden kan

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{p \partial p}{1 + p^2} \quad \ldots\ldots \quad (2');$$

als nu is de integraal dezer vergelijking

$$Log.y = Log.c + Log.\sqrt{(1 + p^2)}$$

of
$$y = c\sqrt{(1 + p^2)},$$

waaruit gevonden wordt

$$p = \frac{\sqrt{(y^2 - c^2)}}{c};$$

hier is dus
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{(y^2 - c^2)}}{c}$$

of
$$\partial x = \frac{c \partial y}{\sqrt{(y^2 - c^2)}},$$

waarvan de integraal is

$$x = c\, Log. \frac{y + \sqrt{(y^2 - c^2)}}{c} + c'$$

of
$$x - c' = c\, Log. \frac{y + \sqrt{(y^2 - c^2)}}{c} \quad \ldots \quad (3').$$

Deze vergelijking behoort tot eene kettinglijn, bij welke c de kromtestraal van den top is, en die ten opzigte van de coördinaten-assen zoodanig is geplaatst, als in Fig. 85 is voorgesteld; OX en OY zijn aldaar de coördinaten-assen, MA $= c'$ en MB $= c$ zijn de coördinaten van den top M, terwijl de verticale as MU der kettinglijn evenwijdig met OY loopt. Verplaatsen wij dan ook den oorsprong naar het punt M, de coördinaten-assen evenwijdig aan zich zelven latende blijven, dan zullen wij in (3') moeten stellen $x = c' + t$ en $y = c + u$, en daardoor

$$t = c \; Log. \frac{c + u + \sqrt{(2cu + u^2)}}{c},$$

dat is, de gewone vergelijking der kettinglijn, bekomen.

De cirkel en de kettinglijn hebben dus beide de eigenschap, van de normaal gelijk aan den kromtestraal te hebben; mits de as der abscissen, van welker plaatsing de lengte der normaal afhankelijk is, bij den cirkel door het middelpunt gaat, en bij de kettinglijn horizontaal onder den top geplaatst is, op eenen afstand van dien top gelijk aan deszelfs kromtestraal.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. De gevondene eigenschap is, wat den cirkel betreft, algemeen bekend; wat de kettinglijn aangaat, kan zij gemakkelijk geverifiëerd worden.

Zij namelijk MP (Fig. 85) eene kettinglijn, M haar top, MU hare verticale as, P een willekeurig punt van dezelve, PR $= u$ en PQ $= t$ tot coördinaten hebbende, en eindelijk de kromtestraal van het punt M gelijk c, dan is de vergelijking dezer kettinglijn

$$t = c \; Log. \frac{c + u + \sqrt{(2cu + u^2)}}{c},$$

MU de as der u en M de oorsprong zijnde.

Nemen wij nu, op het verlengde van MU, een stuk MB$=c$, trekken wij door B eene horizontale lijn BX, die wij tot as der abscissen aannemen, en trekken wij door P eene lijn, loodregt op de kettinglijn gerigt en BX in S snijdende, dan is PS de normaal van het punt P, waarvoor, zoo wij *hoek* SNB $= \phi$ stellen, uit de figuur dadelijk gevonden wordt

$$PS = QB \; Sec.\phi = (c + u) \; Sec.\phi.$$

Zij verder r de kromtestraal van het punt P, dan is, volgens de bekende formulen voor dien kromtestraal, (Zie L. R. SCHMIDT, *Beg. der Statica.* § 124)

$$r = \frac{(c+u)^2}{c} \text{ of ook } r = c\,Sec.^2\phi,$$

waaruit volgt

$$c + u = \sqrt{cr} \text{ en } Sec.\phi = \sqrt{\frac{r}{c}};$$

en zoo wij nu deze waarden, in de bovenstaande uitdrukking voor PS, overbrengen, dan komt er, overeenkomstig de oplossing des voorstels,

$$PS = r.$$

CCXXIX. VOORSTEL.

Door W. SMAASEN.

De vergelijking $\delta x^2 = \delta^2 y + \delta y^2$ *te integreren.*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. BASSAN *en* D. W. HINSE.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Men deele de beide leden der gegevene vergelijking door δx^2, dan komt er

$$1 = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2.$$

Laat nu $\frac{\delta y}{\delta x} = z$ gesteld worden, dan is $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\delta z}{\delta x}$; hierdoor gaat onze vergelijking over in

$$1 = \frac{\delta z}{\delta x} + z^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$\delta x = \frac{\delta z}{1 - z^2};$$

hieruit vloeit nu achtervolgens voort:

$$2\delta x = \frac{2\delta z}{1 - z^2} = \frac{\delta z}{1 + z} + \frac{\delta z}{1 - z},$$

$$2x = Log.(1 + z) - Log.(1 - z) + Log.\,C,$$

$$2x = Log.\,\frac{1 + z}{1 - z}C,$$

en

$$e^{2x} = \frac{1 + z}{1 - z}C,$$

waarin e het grondtal van het Neperiaansche Logarithmen-stelsel beteekent.

Uit de laatste vergelijking z afzonderende, komt er

$$z = \frac{e^{2x} - C}{e^{2x} + C},$$

en dus is
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{e^{2x} - C}{e^{2x} + C}$$

of
$$\partial y = \frac{e^{2x} - C}{e^{2x} + C}\partial x.$$

Om deze vergelijking te integreren, stelle men

$$e^{2x} = u, \text{ dan is } 2x = Log.u \text{ en } \partial x = \frac{\partial u}{2u},$$

en dan heeft men

$$\partial y = \frac{u - C}{2u(u + C)}\partial u = \frac{\partial u}{u + C} - \frac{\partial u}{2u},$$

waaruit volgt

$$y = Log.(u + C) - \tfrac{1}{2} Log\, u + C';$$

stellende nu hierin voor u hare waarde e^{2x}, in acht nemende, dat $Log.u = 2x$ is, dan komt er eindelijk

$$y = Log.(e^{2x} + C) - x + C',$$

hetgeen de begeerde integraal is.

CCXXX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

In elken driehoek is de straal des ingeschreven cirkels gelijk aan het product van de drie loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijden nedergelaten, gedeeld door de som van de producten dezer loodlijnen op alle mogelijke wijzen twee aan twee genomen. Men vraagt naar het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, A. B. BRAVE, J. A. HANSEN, J. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HIMME, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS en J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING VAN W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij de zijden des driehoeks door a, b, c, de overeenkomstige loodlijnen door a', b', c', den inhoud door I, en den straal des ingeschreven cirkels door r voor, dan hebben wij, zoo als algemeen bekend is,

$$I = \tfrac{1}{2} r(a + b + c),$$

$$I = \tfrac{1}{2}\,aa',\ I = \tfrac{1}{2}\,bb' \text{ en } I = \tfrac{1}{2}\,cc'.$$

Trekken wij nu uit de drie laatste vergelijkingen

$$a = \frac{2I}{a'},\ b = \frac{2I}{b'} \text{ en } c = \frac{2I}{c'},$$

en brengen wij deze waarden in de eerste vergelijking over, dan komt er

$$I = \tfrac{1}{2}\,r\left(\frac{2I}{a'} + \frac{2I}{b'} + \frac{2I}{c'}\right)$$

of door I deelende, en den factor $\tfrac{1}{2}$ in het tweede lid binnen de haken brengende,

$$1 = r\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}\right),$$

waaruit volgt

$$r = \frac{1}{\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}}$$

of na herleiding

$$r = \frac{a'b'c'}{b'c' + a'c' + a'b'},$$

waardoor de stelling bewezen is.

In de *Meetkunstige Analysis* van Prof. J. de Gelder, (bladz. 66) is het bewijs dezer stelling uit andere beginselen afgeleid.

Is de driehoek gelijkbeenig, en dus bijv. $b = c$, dan is ook $b' = c'$ en dus

$$r = \frac{a'b'}{2a' + b'}.$$

Is de driehoek gelijkzijdig, dan is $a = b = c$, dus ook $a' = b' = c'$ en bijgevolg

$$r = \frac{a'}{3}.$$

Aanmerking *uit de oplossing van* J. S. Speijer. Indien men de stralen der cirkels, die twee zijden des driehoeks inwendig, maar de derde uitwendig raken, r', r'' en r''' noemt, zal men, in plaats van de eerste der bovenstaande vergelijkingen hebben:

$$I = \tfrac{1}{2}\ r'(a + b - c),$$
$$I = \tfrac{1}{2}\ r''(a - b + c),$$
$$I = \tfrac{1}{2}\ r'''(-a + b + c);$$

met elk dezer vergelijkingen even als boven handelende, vindt men

$$r' = \frac{a'b'c'}{b'c' + c'a' - a'b'},$$

$$r'' = \frac{a'b'c'}{b'c' - c'a' + a'b'},$$

$$r''' = \frac{a'b'c'}{-b'c' + c'a' + a'b'}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} - \frac{1}{c'},$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'},$$

$$\frac{1}{r'''} = -\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'},$$

en dus door optelling

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'};$$

maar uit de voorgaande oplossing volgt ook

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'},$$

dus is

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}$$

of

$$r = \frac{r'r''r'''}{r'r'' + r'r''' + r'''r'}.$$

De straal van den ingeschreven cirkel eens driehoeks is dus ook *gelijk aan het product van de stralen der drie overige cirkels, die de zijden des driehoeks raken, gedeeld door de som van de producten twee aan twee der laatstgenoemde stralen.*

CCXXXI. VOORSTEL.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Welken weg kan men inslaan, om kromme lijnen te bepalen, die gerectificeerd kunnen worden?

Opgelost door W. J. C. Rammelman Elsevier en J. S. Speijer.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Indien x en y de onderling regthoekige coördinaten van een onbepaald punt eener kromme lijn, en s de lengte van

eenen boog dier kromme lijn voorstellen, heeft men in het algemeen

$$\partial s = \partial x \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}.$$

Stellende hierin $\partial y = z\partial x$ . . . . (1),

dan is $\partial s = \partial x\sqrt{(1 + z^2)}$ . . . . (2).

Uit (1) volgt $y = \int z\partial x$

of $y = xz - \int x\partial z$ . . . . . . (3),

en uit (2)

$$s = \int \partial x\sqrt{(1+z^2)} = x\sqrt{(1+z^2)} - \int x\partial.\sqrt{(1+z^2)}$$

of $s = x\sqrt{(1 + z^2)} - \int \frac{zx\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}}$ . . . (4).

Beschouwen wij nu de integralen, die in (3) en (4) voorkomen, als functiën van eene zelfde veranderlijke grootheid u, dat is, stellen wij

$\int x\partial z = P$ of $x\partial z = \partial P$ . . . (5)

en $\int \frac{zx\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = Q$ of $\frac{zx\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = \partial Q$. (6),

waarin P en Q functiën van u verbeelden, dan geeft het quotiënt der beide laatste vergelijkingen

$$\frac{\sqrt{(1 + z^2)}}{z} = \frac{\partial P}{\partial Q};$$

lossen wij hieruit z op, dan vinden wij

$$z = \frac{\partial Q}{\sqrt{\{(\partial P)^2 - (\partial Q)^2\}}} \quad . . . . . (7),$$

terwijl uit (5) volgt

$$x = \frac{\partial P}{\partial z} \quad . . . . (8),$$

alsmede uit (3) en (5) $y = xz - P$ . . . . (9),

en uit (4) en (6) $s = x\sqrt{(1 + z^2)} - Q$ . . . . (10).

De vergelijkingen (7), (8), (9) en (10) zijn genoegzaam, om de vergelijking eener kromme lijn te vinden, die gerectificeerd kan worden. Neemt men namelijk voor P en Q willekeurige algebraïsche functiën van u, dan zal men, door deze vergelijkingen, ook achtervolgens voor z, x, y en s algebraïsche functiën van u verkrijgen. Elimineert men daarna u tusschen (8) en (9), dan zal men de vergelijking eener kromme lijn bekomen, en deze zal kunnen gerectificeerd worden, indien men slechts voor P en Q zulke

functiën genomen hebbe, dat de eliminatie van u, het zij tusschen (8) en (10), het zij tusschen (9) en (10) geene hoogeremagtsvergelijking in s oplevere, waaruit men s niet zou kunnen afzonderen. Voorts zullen ook P en Q zoodanig genomen moeten worden, dat men voor s geene onbestaanbare, oneindige of standvastige waarden verkrijgt.

Tot een eerste voorbeeld, nemen wij

$$P = u \text{ en } Q = \frac{u^2}{2a},$$

dan is $$\delta P = \delta u \text{ en } \delta Q = \frac{u\delta u}{a};$$

hierdoor wordt dan volgens (7)

$$s = \frac{u}{\sqrt{(a^2 - u^2)}},$$

waaruit wij vinden

$$\delta s = \frac{a^2 \delta u}{\sqrt{(a^2 - u^2)^3}};$$

verder is nu volgens (8)

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 - u^2)^3}}{a^2}$$

en volgens (9) $$y = -\frac{u^3}{a^2}.$$

Elimineren wij voorts u tusschen de beide laatste vergelijkingen, door uit beide de waarde van u^2 af te leiden en deze waarden aan elkander gelijk te stellen, dan vinden wij

$$a\sqrt[3]{ay^2} = a^2 - a\sqrt[3]{ax^2}$$

of na herleiding $$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Men zal bij de proef bevinden, dat de rectificatie der kromme lijn, waartoe deze vergelijking behoort, tot uitkomst geeft

$$s = \int\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2} + C.$$

Nemen wij, tot een tweede voorbeeld,

$$P = \frac{a^2 - u^2}{2a} \text{ en } Q = u,$$

dan is $$\delta P = -\frac{u\delta u}{a} \text{ en } \delta Q = \delta u;$$

hierdoor wordt volgens (7)

$$s = \frac{a}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}$$

en dus $$\delta z = -\frac{au\delta u}{\sqrt{(u^2 - a^2)^3}};$$
verder is dan volgens (8)
$$x = \frac{\sqrt{(u^2 - a^2)^3}}{a^2}$$
en volgens (9) $$y = \frac{3(u^2 - a^2)}{2a}.$$

Trekken wij, ter eliminatie van u, uit elk dezer vergelijkingen de waarde van $u^2 - a^2$ en stellen wij deze waarden aan elkander gelijk, dan vinden wij
$$\tfrac{2}{3}ay = \sqrt[3]{a^4x^2}$$
of na herleiding $$y^3 = \tfrac{27}{8}ax^2,$$
welke vergelijking tot de cubische parabool behoort, die zoo als bekend is, gemakkelijk kan gerectificeerd worden.

CCXXXII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Indien uit een gegeven punt P *regte lijnen getrokken worden, die elk in het bijzonder eene gegevene kromme lijn van den tweeden graad in twee punten* M *en* N *snijden; en daarna op elk dezer regte lijnen een vierde punt* Q *genomen wordt, zoodat de punten* P *en* Q *harmonisch gepaard zijn, ten opzigte van de snijpunten* M *en* N, *verlangt men de meetkunstige plaats van al deze punten* Q *te vinden?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat P het gegeven punt zijn (Fig. 86 of 87) en ABC eene kromme lijn van den tweeden graad; zij verder PR eene der lijnen, die de genoemde kromme lijn in M en N snijdt, dan zal, naar gelang P buiten of tusschen M en N ligt, Q tusschen of buiten M en N moeten genomen worden, zoodanig dat men altijd heeft
$$PM : PN = QM : QN;$$
dit volgt uit de bepaling, dat de punten P en Q harmonisch gepaard moeten zijn, ten opzigte van de punten M en N.

Nemen wij nu twee lijnen PX en PY, onderling regthoekig door het gegeven punt P getrokken, tot coördinaten-

assen aan, dan kunnen wij voor de vergelijking der kromme lijn nemen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad . \quad (1)$$

en voor de vergelijking van de lijn PR

$$y = \alpha x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Elimineren wij y tusschen (1) en (2), dan vinden wij

$$x^2 + \frac{2(d + e\alpha)}{a + 2b\alpha + c\alpha^2}\, x + \frac{f}{a + 2b\alpha + c\alpha^2} = 0;$$

de wortels dezer vierkantsvergelijking, zullen de abscissen zijn der snijpunten M en N; stellen wij dus die abscissen door m en n voor, dat is stellen wij in Fig. 86 $PM' = m$ en $PN' = n$ of in Fig. 87 $PM' = m$ en $PN' = -n$, dan hebben wij, volgens eene bekende eigenschap der vierkantsvergelijkingen,

$$m + n = -\frac{2(d + e\alpha)}{a + 2b\alpha + c\alpha^2}$$

en

$$mn = \frac{f}{a + 2b\alpha + c\alpha^2};$$

hieruit volgt

$$\frac{m + n}{mn} = -\frac{2(d + e\alpha)}{f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Laten wijders $PQ' = u$ en $QQ' = v$ de coördinaten van het punt Q zijn, dan volgt uit de reeds aangehaalde evenredigheid, dat wij ook zullen hebben

$$PM' : PN' = Q'M' : Q'N';$$

deze evenredigheid wordt, zoo wij Fig. 86 in aanmerking nemen,

$$m : n = u - m : n - u,$$

of zoo wij Fig. 87 beschouwen

$$m : -n = u - m : u - n,$$

waaruit in beide gevallen gevonden wordt

$$u = \frac{2mn}{m + n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4);$$

uit het verband van (3) en (4) volgt oogenblikkelijk

$$u = -\frac{f}{d + e\alpha}$$

of

$$u(d + e\alpha) + f = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

terwijl de coördinaten u en v van het punt Q, omdat dit

punt op de lijn PR ligt; ook nog aan de vergelijking (2) voldoen moeten, waaruit volgt

$$v = ax \quad \ldots \quad (6).$$

De beide vergelijkingen (5) en (6) bepalen volkomen de coördinaten van het punt Q, zoodra de stand der lijn PR of de grootheid a gegeven is; laat men echter de lijn PR om het punt P draaijen, dan verandert ook a; men verkrijgt dus voor elken nieuwen stand dier lijn ook een ander punt Q, maar de coördinaten van dit veranderlijke punt, moeten toch altijd blijven voldoen, aan de vergelijking die er komt, wanneer k tusschen (5) en (6) geëlimineerd wordt. Elimineren wij dus werkelijk a, dan vinden wij

$$du + ev + f = 0,$$

voor de vergelijking van de meetkunstige plaats der punten Q.

Deze vergelijking van den eersten graad zijnde, toont aan, dat al de bedoelde punten Q in eene regte lijn liggen.

Aanmerking *van* J. Badon Ghijben. De hier gevondene uitkomst is gedeeltelijk begrepen in eene bekende eigenschap der kegelsneden, die men onder anderen opgegeven vindt bij Kluegel, *Math. Wörterb.* ad. voc. *Harmonische Theilung*. Zij is deze:

Wanneer men uit een punt P *buiten eene kegelsnede, twee raaklijnen aan dezelve trekt en de raakpunten door eene koorde vereenigt, wanneer men vervolgens uit* P *eene lijn trekt, die eerst de kegelsnede in een punt* M*, daarna de genoemde koorde in een punt* Q*, en eindelijk weder de kegelsnede in een punt* N *snijdt, dan zal de lijn* PN *door de punten* M *en* Q *harmonisch verdeeld worden.*

CCXXXIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Het moment van traagheid te vinden, van eenen gelijkslachtigen massieven driehoek, wentelende om eene lijn, die door een der hoekpunten gaat, maar niet in het vlak des driehoeks ligt.

Opgelost *door* J. Badon Ghijben *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABC (Fig. 88) de driehoek en AB de verticaal geplaatste omwentelings-as zijn; trekken wij dan, door een

willekeurig punt M van den driehoek, lijnen evenwijdig aan AB en AC, en, op een' oneindig kleinen afstand van deze, wederom lijnen evenwijdig aan de eerstgetrokkene, dan ontstaat er in den driehoek een oneindig klein vierhoekje M m, dat eene tweede differentiaal van den massieven driehoek is.

Laten wij verder uit M eene loodlijn MR op AB vallen, en merken wij op, dat, wegens de gelijkslachtigheid van den driehoek, de inhouden in plaats van de massa's genomen kunnen worden, dan hebben wij, voor het moment van traagheid van het vierhoekje M m,

$$\text{RM}^2 \times \textit{Inh. Vierh.}\ \text{M m}$$

en, dus voor het moment van traagheid des geheelen driehoeks, dat wij door X zullen voorstellen,

$$\text{X} = \int\!\!\int \text{RM}^2 \times \textit{Inh Vierh.}\ \text{M m}.$$

Brengen wij, door een willekeurig punt A' van de as AB, een horizontaal vlak en projecteren wij daarop de geheele figuur; stellen wij $A'B' = b$, $A'C' = c$, hoek $B'A'C' = \alpha$, $AP = QM' = x$, $AQ = PM' = y$ en zij β de hoek, welken het vlak des driehoeks ABC met het horizontale vlak maakt, dan hebben wij, volgens bekende regels:

$$\textit{Inh. Vierk.}\ \text{M'm'} = \delta x \delta y\ \textit{Sin.}\alpha,$$

$$\textit{Inh. Vierh.}\ \text{M m} = \textit{Sec.}\beta \times \textit{Inh. Vierh.}\ \text{M'm'} = \delta x \delta y\ \textit{Sin.}\alpha\ \textit{Sec.}\beta,$$

en, $\quad \text{RM} = \text{A'M'} = \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy\ \textit{Cos.}\alpha)},$

waardoor wij nu verkrijgen

$$\text{X} = \int\!\!\int (x^2 + y^2 + 2xy\ \textit{Cos.}\alpha)\ \delta x \delta y\ \textit{Sin.}\alpha\ \textit{Sec.}\beta;$$

of, zoo wij deze uitdrukking eerst ten opzigte van y en vervolgens ten opzigte van x willen integreren,

$$\text{X} = \textit{Sin.}\alpha\ \textit{Sec.}\beta \int (\delta x \int (x^2 + y^2 + 2xy\ \textit{Cos.}\alpha)\ \delta y).$$

Beschouwen wij vooreerst $x = \text{AP}$ als standvastig, dan hebben wij

$$\int (x^2 + y^2 + 2xy\ \textit{Cos.}\alpha)\ \delta y = x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 + xy^2\ \textit{Cos.}\alpha + \text{C};$$

deze integraal moet klaarblijkelijk van $y = 0$ tot $y = \text{PN}$ genomen worden, maar uit de figuur volgt

$$\text{A'B'} : \text{A'C'} = \text{PB'} : \text{PN},$$

dat is $\quad b : c = b - x : \text{PN},$

zoodat $\quad \text{PN} = \frac{c}{b}(b - x)$

is; wij nemen derhalve de gevondene integraal van $y = 0$

E e 4

tot $y = \frac{c}{b}(b - x)$, en verkrijgen daardoor

$$\int(x^2 + y^2 + 2xy\ Cos.\alpha)\partial y = \frac{cx^2(b-x)}{b} + \frac{c^3(b-x)^3}{3b^3} + \frac{c^2x(b-x)^2}{b^2}Cos.\alpha\,,$$

alsmede
$$X = Sin.\alpha\ Sec.\beta \int\partial x\left(\frac{cx^2(b-x)}{b} + \frac{c^3(b-x)^3}{3b^3} + \frac{c^2x(b-x)^2}{b^2}Cos.\alpha\right)$$

of
$$X = Sin.\alpha\ Sec.\beta\left\{\frac{c}{b}\int x^2(b-x)\partial x + \frac{c^3}{3b^3}\int(b-x)^3\partial x + \frac{c^2 Cos.\alpha}{b^2}\int x(b-x)^2\partial x\right\},$$

waarin de integralen klaarblijkelijk van $x = 0$ tot $x = A'B' = b$ moeten genomen worden.

Nu is, tusschen deze grenzen integrerende,

$$\int x^2(b-x)\partial x = \tfrac{1}{3}bx^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + C = \tfrac{1}{3}b^4 - \tfrac{1}{4}b^4 = \tfrac{1}{12}b^4,$$
$$\int(b-x)^3\partial x = -\int(b-x)^3\partial(b-x) = -\tfrac{1}{4}(b-x)^4 + C = \tfrac{1}{4}b^4,$$
$$\int x(b-x)^2\partial x = \int(b^2x - 2bx^2 + x^3)\partial x = \tfrac{1}{2}b^2x^2 - \tfrac{2}{3}bx^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + C$$
$$= \tfrac{1}{2}b^4 - \tfrac{2}{3}b^4 + \tfrac{1}{4}b^4 = \tfrac{1}{12}b^4,$$

en wij verkrijgen, door substitutie dezer waarden,

$$X = Sin.\alpha\ Sec.\beta\left\{\tfrac{1}{12}b^3c + \tfrac{1}{12}bc^3 + \tfrac{1}{12}b^2c^2\ Cos.\alpha\right\}$$

of
$$X = \tfrac{1}{12}bc\ Sin.\alpha\ Sec.\beta(b^2 + c^2 + bc\ Cos.\alpha).$$

Stellen wij eindelijk de massa van den omwentelenden driehoek voor μ voor, dan hebben wij

$$\mu = Inh.\ Drieh.\ ABC = Sec.\beta \times Inh.\ Drieh.\ A'B'C' =$$
$$= Sec.\beta \times \tfrac{1}{2}A'B' \times A'C' \times Sin.\ B'A'C' = \tfrac{1}{2}bc\ Sin.\alpha\ Sec.\beta,$$

waardoor wij eindelijk voor het gevraagde moment van traagheid vinden

$$X = \tfrac{1}{6}\mu(b^2 + c^2 + bc \, Cos.\alpha).$$

Uit deze oplossing blijkt, dat bij alle gelijkslachtige massieve driehoeken, die denzelfden driehoek A'B'C' tot projectie hebben, de verhouding van het moment van traagheid tot de massa, dezelfde zal wezen.

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Het moment van traagheid te vinden van eene gelijkslachtige driehoekige piramide, die om eene van hare ribben wentelt.

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat ABCD (Fig. 89) de piramide en hare ribbe AB, die wij verticaal geplaatst onderstellen, de omwentelings-as zijn; snijden wij dan deze piramide door twee oneindig digt bij elkander geplaatste vlakken evenwijdig met het zijvlak ABC en door twee dergelijke vlakken evenwijdig met het zijvlak ABD, dan wordt door deze vlakken uit de piramide een oneindig klein ligchaampje Mm gesneden, dat eene tweede differentiaal van den inhoud der piramide is en als een parallelopipedum kan aangemerkt worden. Laten wij verder, uit een willekeurig punt M van dit ligchaampje, eene loodlijn MR op de omwentelings-as vallen, dan is het moment van traagheid van dit ligchaampje, omdat wij ter zake der gelijkslachtigheid de massa's door de inhouden kunnen vervangen, $MR^2 \times$ *Inh.* Mm; en wij hebben alzoo, het begeerde moment van traagheid der geheele piramide door X voorstellende,

$$X = \int\int MR^2 \times Inh. \, Mm.$$

Projecteren wij, de piramide met de snijdende vlakken, op een horizontaal vlak, dan verkrijgen wij voor die projectie eenen driehoek B'C'D', waarin twee oneindig digt bij elkander liggende lijnen evenwijdig met B'C' en twee dergelijke lijnen evenwijdig met B'D' loopen; de snijding dezer lijnen vormt een vierhoekje M'm', en de inhoud der differentiaal Mm wordt dan klaarblijkelijk uitgedrukt door de formule

$$Inh.\ Mm = MN \times Inh.\ Vierk.\ M'm'.$$

Stellen wij nu $B'D' = p$, $B'C' = q$, *hoek* $C'B'D' = \alpha$, $AB = h$, $B'P = QM' = x$, $B'Q = PM' = y$, dan hebben wij dadelijk

$$Inh.\ Vierk.\ M'm' = \delta x \delta y\ Sin.\alpha$$

en $$M\beta^2 = B'M'^2 = x^2 + y^2 + 2xy\ Cos.\alpha,$$

waardoor wij verkrijgen

$$Inh.\ Mm = MN \times \delta x \delta y\ Sin.\alpha$$

en $$X = \int\int (x^2 + y^2 + 2xy\ Cos.\alpha) \delta x \delta y\ Sin.\alpha \times MN.$$

Uit de figuur volgt onmiddellijk de evenredigheid

$$PT : PD' = B'C' : B'D'$$

of $$PT : p - x = q : p,$$

derhalve is $$PT = \frac{q(p-x)}{p}$$

en $$M'T = PT - PM' = \frac{q(p-x)}{p} - y = \frac{pq - qx - py}{p};$$

brengen wij dus door AB en MN een vlak, de ribbe CD in S snijdende, als wanneer de projectie S', van het punt S, in het verlengde van de lijn $B'M'$ komt te vallen, dan zal, uit de aaneengeschakelde evenredigheid

$$MN : AB = MS : AS = M'S' : B'S' = M'T : B'C',$$

klaarblijkelijk volgen

$$MN = \frac{AB \times M'T}{B'C'} = \frac{h(pq - qx - py)}{pq},$$

en hierdoor wordt nu

$$X = \int\int \frac{h\,Sin.\alpha}{pq} (pq - qx - py)\ (x^2 + y^2 + 2xy\ Cos.\alpha)\ \delta x \delta y,$$

waarvoor wij, eerst ten opzigte van y en vervolgens ten opzigte van x willende integreren, ook kunnen schrijven

$$X = \frac{h\,Sin.\alpha}{pq} \int \left\{ \delta x \int (q(p-x) - py)(x^2 + 2xy\,Cos.\alpha + y^2) \delta y \right\}.$$

Het product $(q\ (p - x) - py)\ (x^2 + 2xy\ Cos.\alpha + y^2)$ ontwikkelende, naar de opklimmende magten van y rangschikkende, met δy vermenigvuldigende, daarna ten opzigte van y integrerende, en deze integraal van $y = 0$ tot $y = PT = \frac{q(p-x)}{p}$ nemende, vinden wij

$$\int(q(p-x)-py)\,(x^2+2xy\ Cos.\alpha+y^2)\partial y=$$
$$=\int q(p-x)x^2\partial y+\int(2q(p-x)\ Cos.\alpha-px)xy\partial y+\int(q(p-x)-2px\ Cos.\alpha)y^2\partial y-\int py^3\partial y$$
$$=q(p-x)x^2y+\tfrac{1}{2}(2q(p-x)\ Cos.\alpha-px)xy^2+\tfrac{1}{3}(q(p-x)-2px\ Cos.\alpha)y^3-\tfrac{1}{4}py^4+C$$
$$=\frac{q^2(p-x)^2x^2}{p}+\frac{q^3(p-x)^3xCos.\alpha}{p^2}-\frac{q^2(p-x)^2x^2}{2p}+\frac{q^4(p-x)^4}{3p^3}-\frac{2q^3(p-x)^3xCos.\alpha}{3p^2}-\frac{q^4(p-x)^4}{4p^3}$$
$$=\frac{q^2(p-x)^2x^2}{2p}+\frac{q^4(p-x)^4}{12p^3}+\frac{q^3(p-x)^3xCos.\alpha}{3p^2},$$

en hierdoor wordt nu

$$X=hSin.\alpha\left\{\frac{q}{2p^2}\int(p-x)^2x^2\partial x+\frac{q^3}{12p^4}\int(p-x)^4\partial x+\frac{q^2Cos.\alpha}{3p^3}\int(p-x)^3x\partial x\right\}.$$

Berekenen wij nu de integralen, die in deze laatste uitdrukking voorkomen, elk afzonderlijk tusschen de grenzen $x=0$ en $x=B'D'=p$, dan vinden wij:

$$\int(p-x)^2x^2\partial x=\int(p^2x^2-2px^3+x^4)\partial x$$
$$=\tfrac{1}{3}p^2x^3-\tfrac{1}{2}px^4+\tfrac{1}{5}x^5+C$$
$$=\tfrac{1}{3}p^5-\tfrac{1}{2}p^5+\tfrac{1}{5}p^5=\tfrac{1}{30}p^5;$$
$$\int(p-x)^4\partial x=-\int(p-x)^4\partial(p-x)=-\tfrac{1}{5}(p-x)^5+C=\tfrac{1}{5}p^5;$$
$$\int(p-x)^3x\partial x=\int(p^3x-3p^2x^2+3px^3-x^4)\partial x$$
$$=\tfrac{1}{2}p^3x^2-p^2x^3+\tfrac{3}{4}px^4-\tfrac{1}{5}x^5+C$$
$$=\tfrac{1}{2}p^5-p^5+\tfrac{3}{4}p^5-\tfrac{1}{5}p^5=\tfrac{1}{20}p^5;$$

waardoor dan gevonden wordt

$$X = hSin.\alpha\left\{\frac{qp^3}{60} + \frac{q^3p}{60} + \frac{p^2q^2Cos.\alpha}{60}\right\}$$

of $$X = \tfrac{1}{60}hpq\ Sin.\alpha(p^2 + q^2 + pqCos.\alpha).$$

Willen wij nu ook nog de massa of den inhoud der piramide in dezelfde gegevens uitdrukken, zoo hebben uit de vergelijking

$$Inh.\ \mathrm{Mm} = \mathrm{MN} \times Vierh.\ \mathrm{M'm'}$$

dadelijk

$$\delta^2\mu = \frac{h(pq-qx-py)}{pq} \times \delta x\delta y\ Sin.\alpha,$$

waarin μ de te vindene massa voorstelt; hieruit volgt nu

$$\mu = \frac{hSin.\alpha}{pq}\int\left\{\delta x\int(q(p-x)-py)\delta y\right\}.$$

Van $y = 0$ tot $y = \dfrac{q(p-x)}{p}$ integrerende, vinden wij

$$\int(q(p-x)-xy)\delta y = q(p-x)y - \tfrac{1}{2}py^2 + C$$

$$= \frac{q^2(p-x)^2}{p} - \frac{q^2(p-x)^2}{2p} = \frac{q^2(p-x)^2}{2p},$$

derhalve is

$$\mu = \frac{hSin.\alpha}{pq}\int\frac{q^2(p-x)^2\delta x}{2p} = \frac{hqSin.\alpha}{2p^2}\int(p-x)^2\delta x;$$

vervolgens van $x = 0$ tot $x = p$ integrerende, vinden wij

$$\int(p-x)^2\delta x = -\int(p-x)^2\delta(p-x) = -\tfrac{1}{3}(p-x)^3 + C = \tfrac{1}{3}p^3,$$

hierdoor wordt

$$\mu = \tfrac{1}{6}hpq\ Sin.\alpha.$$

Brengen wij dus eindelijk deze waarde van μ in de voor X gevondene over, dan verkrijgen wij, voor het begeerde moment van traagheid,

$$x = \tfrac{1}{10}\mu(p^2 + q^2 + pq\ Cos.\alpha).$$

Uit deze oplossing blijkt, dat de verhouding tusschen de massa en het moment van traagheid der piramide, noch van de lengte der ribbe waarom de omwenteling plaats heeft, noch van de hoeken, waaronder deze ribbe door de zijvlakken gesneden wordt, maar alleen van de afmetingen des driehoeks afhangt, volgens welken de piramide zich projecteert op een vlak, dat de as regthoekig snijdt.

CCXXXV. Voorstel.

Door J. R. T. Ortt.

Iemand, zonder nabestaanden stervende, heeft bij testament bepaald, dat twee zijner vrienden zijn geld, hetwelk uit een geheel aantal tienguldenstukken bestaat, op de volgende wijze onder elkander zullen verdeelen. Zij moeten beurtelings met drie dobbelsteenen werpen, welke ieder vijf witte zijden hebben, terwijl de zesde zijden met 1, 2 en 3 oogen gemerkt zijn, en telkens moeten zij van de erfenis zoo vele tienguldens trekken, als zij oogen werpen, totdat de erfenis is uitgeput; zijn er echter van de erfenis minder tienguldens over dan zij oogen werpen, zoo zullen zij niet trekken, maar voor ieder oog dat zij meer werpen tien gulden aan den ouden bedienden des overledenen betalen. Met hoe veel kunnen zij dezen bedienden zijn aandeel op de erfenis afkoopen, zonder dat er van weerskanten eenige schade geleden wordt? (*)

Opgelost *door* J. R. T. Ortt *en* J. Badon Ghijben.

1. Oplossing *van* J. R. T. Ortt.

Het aantal worpen, dat met drie dobbelsteenen kan plaats hebben, is 6^3 of 216. Daar de hier bedoelde dobbelsteenen ieder vijf witte zijden hebben, zijn er onder deze 216 worpen een aantal van 5^3 of 125, die geheel blank zijn, zoodat er 91 van 1, 2, 3, 4, 5 of 6 oogen overblijven. Daar de blanke worpen volstrekt geene verandering in het overschot der erfenis te weeg brengen, en voor den bedienden noch vóór- noch nadeelig zijn, knnnen wij deze geheel buiten rekening laten, en als niet gedaan beschouwen. Onder de overige 91 zijn er:

25	worpen	van	1	oog,
25	»	»	2	oogen,
30	»	»	3	»
5	»	»	4	»
5	»	»	5	»
1	»	»	6	»

(*) Deze opgaaf is eigenlijk de berekening van de waarde van *het katie*, in het zoogenaamde *Schimmelspel*; met dit onderscheid, dat hier *drie* in plaats van zes dobbelsteenen genomen worden.

Zal er namelijk 1 of 2 geworpen worden, dan moet bij den eersten of tweeden dobbelsteen 1 of 2, en bij elk der beide overige steenen, eene der vijf witte zijden boven komen, welk laatste op 5^2 of 25 verschillende wijzen kan plaats hebben. Het werpen van 3 kan even zoo op 25 wijzen geschieden, wanneer de derde steen alleen 3 en elk der andere steenen eene witte zijde oplevert; maar daarenboven kan men 3 werpen, indien de eerste steen 1, de tweede 2 en de derde eene witte zijde geeft; dit kan op 5 wijzen gebeuren en dus zijn er in het geheel 30 worpen van 3 oogen. Zal er 4 of 5 geworpen worden, dan moet het werpen van 1 en 3 of van 2 en 3 met twee der dobbelsteenen, zich paren met het bovenvallen van eene der vijf witte zijden van den derden steen; dit kan dus op 5 wijzen geschieden. Eindelijk is het werpen van 6 oogen slechts op eene wijze mogelijk, namelijk indien bij elken steen de gemerkte zijde boven komt.

Derhalve zijn de kansen;

dat	er	1	geworpen	wordt	$\frac{25}{91}$,
»	»	2	»	»	$\frac{25}{91}$,
»	»	3	»	»	$\frac{30}{91}$,
»	»	4	»	»	$\frac{5}{91}$,
»	»	5	»	»	$\frac{5}{91}$,
»	»	6	»	»	$\frac{1}{91}$.

De kans, die er bestaat, dat eens het overschot der erfenis juist uit een bepaald getal van n tienguldenstukken zal bestaan, is, daar men het juiste bedrag der erfenis niet weet, voor alle waarden van n even groot; want zoo na eenige worpen, het overschot n tienguldens is, zou de erfenis slechts eenige, bij voorbeeld p, tienguldens meer of minder hebben behoeven te zijn, om te maken, dat er na diezelfde worpen $n+p$ of $n-p$ waren overgebleven. Het tienguldenstuk als eenheid aannemende, zijn dus de kansen, dat het overschot der erfenis eens 0, 1, 2, 3, 4 of 5 zal bedragen, even groot, maar de som dezer gelijke kansen, die wij elk gelijk P zullen stellen, is niet gelijk aan de eenheid; want het nederkomen op een overschot kleiner dan 6, sluit niet uit, dat men nogmaals op een overschot kleiner dan 6 kan nederkomen. De som echter der kansen,

dat het eerste overschot der erfenis, waarbij de bediende kan beginnen te trekken, dat is het eerste overschot beneden 6, een der getallen 0, 1, 2, 3, 4 of 5 zal bedragen, moet gelijk aan de eenheid zijn, omdat deze omstandigheden een van alle, met uitsluiting der overige, moeten plaats hebben. Stellen wij dus de laatstgenoemde kansen respectievelijk door Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 voor, dan moeten wij hebben

$$Q + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 1 \quad . \quad (1)$$

en het is deze voorwaarde, die wij, ter bepaling van de door P voorgestelde kansen, kunnen gebruiken.

Al dadelijk hebben wij

$$Q_5 = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2);$$

omdat 5 het naastkleinere getal zijnde, dat op 6 volgt, de kans, dat het overschot 5, of dat het eerste overschot 5 zal wezen, blijkbaar dezelfde is.

Daar de kans, dat het overschot eens 5 zal bedragen, P is, en men dan $\frac{25}{91}$ kans heeft, dat er 1 oog geworpen en dus het overschot 4 wordt, zoo is de kans

$\frac{25}{91}P$ } dat het overschot 4 wordt, na eerst 5 geweest te zijn,

maar de kans, dat het overschot eens 4 wordt, is P in het geheel; de kans, dat het overschot 4 wordt, zonder alvorens 5 geweest te zijn, is dus $P - \frac{25}{91}P$ en alzoo hebben wij

$$Q_4 = P - \frac{25}{91}P = \frac{66}{91}P \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Het overschot eens 5 zijnde, heeft men $\frac{25}{91}$ kans, dat er 2 oogen geworpen worden, en men dus op een overschot van 3 nederkomt; het overschot eens 4 zijnde, heeft men $\frac{25}{91}$ kans, dat er 1 oog geworpen en dus het overschot 3 wordt; maar de kansen, dat het overschot eens 5 of 4 zij, elk gelijk P zijnde, zoo is de kans

$\frac{25}{91}P$, $\frac{25}{91}P$ } dat het overschot 3 wordt, na eerst {5, 4} geweest te zijn;

de kans, dat het overschot eens 3 wordt, in het geheel P zijnde, is dus de kans, dat het 3 wordt, zonder alvorens 5 of 4 geweest te zijn, $P - \frac{25}{91}P - \frac{25}{91}P$ en alzoo is

$$Q_3 = P - \frac{25}{91}P - \frac{25}{91}P = \frac{41}{91}P \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Gelijkerwijze vindt men de volgende kansen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{30}{91}P\\ \frac{25}{91}P\\ \frac{25}{91}P\end{array}\right\}\text{dat het overschot 2 wordt, na eerst}\left\{\begin{array}{c}5\\4\\3\end{array}\right\}\text{geweest te zijn,}$$

en $$Q_2 = P - \tfrac{30}{91}P - \tfrac{25}{91}P - \tfrac{25}{91}P = \tfrac{11}{91}P \quad . \; . \quad (5);$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{91}P\\ \frac{30}{91}P\\ \frac{25}{91}P\\ \frac{25}{91}P\end{array}\right\}\text{dat het overschot 1 wordt, na eerst}\left\{\begin{array}{c}5\\4\\3\\2\end{array}\right\}\text{geweest te zijn,}$$

en $$Q_1 = P - \tfrac{5}{91}P - \tfrac{30}{91}P - \tfrac{25}{91}P - \tfrac{25}{91}P = \tfrac{6}{91}P \quad . \; . \; . \quad (6);$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{91}P\\ \frac{5}{91}P\\ \frac{30}{91}P\\ \frac{25}{91}P\\ \frac{25}{91}P\end{array}\right\}\text{dat het overschot 0 wordt, na eerst}\left\{\begin{array}{c}5\\4\\3\\2\\1\end{array}\right\}\text{geweest te zijn,}$$

en $$Q = P - \tfrac{5}{91}P - \tfrac{5}{91}P - \tfrac{30}{91}P - \tfrac{25}{91}P - \tfrac{25}{91}P = \tfrac{1}{91}P \quad . \; . \quad (7).$$

Brengen wij nu de waarden (2) tot (7) in de vergelijking (1) over, dan komt er

$$\tfrac{216}{91}P = 1;$$

hieruit volgt $P = \frac{91}{216}$,

en dus, door substitutie van deze waarde voor P, in (2) tot (7),

$$\left.\begin{array}{l}Q = \frac{1}{216},\\ Q_1 = \frac{6}{216},\\ Q_2 = \frac{11}{216},\\ Q_3 = \frac{41}{216},\\ Q_4 = \frac{66}{216},\\ Q_5 = \frac{91}{216},\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Stellen wij vervolgens de waarde van het aandeel des bedienden, in de onderstelling, dat het eerste overschot, minder dan 6, de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5 zal bedragen, respectievelijk door R, R_1, R_2, R_3, R_4 en R_5 voor, dan hebben wij dadelijk

$$R = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9);$$

want zoo het overschot der erfenis 0 is, is het zeker, dat de bediende niets zal trekken.

Om R_1 te vinden, merken wij op, dat, zoo het overschot der erfenis 1 is, de bediende vooreerst de volgende kansen heeft:

$\frac{25}{91}$, $\frac{30}{91}$, $\frac{5}{91}$, $\frac{5}{91}$, $\frac{1}{91}$ dat het aantal oogen van den eerstvolgenden worp zijn zal 2, 3, 4, 5, 6, of dat het aantal door hem te trekken tienguldens zijn zal 1, 2, 3, 4, 5,

van welke kansen, altijd het tienguldenstuk als eenheid beschouwd, de gezamenlijke waarde is

$$\tfrac{25}{91}\times 1+\tfrac{30}{91}\times 2+\tfrac{5}{91}\times 3+\tfrac{5}{91}\times 4+\tfrac{1}{91}\times 5=\tfrac{125}{91};$$

maar daarenboven heeft de bediende $\frac{66}{91}$ kans, dat genoemde eerstvolgende worp meer dan 1 zal zijn, en dat dus de tweede worp hem eene kans van evenveel waarde zal geven als de eerste; even zoo heeft hij $\left(\frac{66}{91}\right)^2$ kans, dat ook de derde worp hem eene kans van gelijke waarde zal aanbieden, en zoo vervolgens. Wij hebben dus

$$B_1=\frac{125}{91}\left\{1+\left(\frac{66}{91}\right)+\left(\frac{66}{91}\right)^2+\left(\frac{66}{91}\right)^3+\textit{enz.}\right\},$$

of

$$B_1=\frac{\frac{125}{91}}{1-\frac{66}{91}}=5\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10);$$

Indien het overschot der erfenis 2 is, heeft de bediende vooreerst de volgende kansen:

$\frac{30}{91}$, $\frac{5}{91}$, $\frac{5}{91}$, $\frac{1}{91}$, $\frac{25}{91}$ dat het aantal oogen van den eerstvolgenden worp zijn zal 3, 4, 5, 6 of dat het aantal door hem te trekken tienguldens zijn zal 1, 2, 3, 4; 1 of dat hij de kans zal bekomen, welker waarde is $\{B_1=5\}$;

van deze kansen is de gezamenlijke waarde

$$\tfrac{30}{91}\times 1+\tfrac{5}{91}\times 2+\tfrac{5}{91}\times 3+\tfrac{1}{91}\times 4+\tfrac{25}{91}\times 5=\tfrac{184}{91};$$

maar daarenboven heeft hij $\frac{41}{91}$ kans, dat er meer dan 2 geworpen wordt, en dat dus een tweede worp hem eene kans van gelijke waarde zal aanbieden als de eerste; even zoo heeft hij $\left(\frac{41}{91}\right)^2$ kans, dat een derde worp hem die zal aanbieden, en zoo vervolgens.

Hieruit volgt

$$B_2=\frac{184}{91}\left\{1+\left(\frac{41}{91}\right)+\left(\frac{41}{91}\right)^2+\left(\frac{41}{91}\right)^3+\textit{enz.}\right\},$$

of

$$B_2=\frac{\frac{184}{91}}{1-\frac{41}{91}}=\frac{92}{25}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11).$$

Indien het overschot der erfenis 3 is, zijn de kansen des bedienden de volgende:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{5}{91}\\ \frac{5}{91}\\ \frac{1}{91}\\ \frac{25}{91}\\ \frac{25}{91}\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{dat het aantal}\\ \text{oogen van den}\\ \text{eerstvolgenden}\\ \text{worp zijn zal}\end{array}\left(\begin{array}{c}4\\5\\6\\1\\2\end{array}\right.\begin{array}{l}\text{of dat het aantal tieng. dat}\\ \text{hij trekt zal wezen}\\ \text{of dat hij de kans bekomen}\\ \text{zal, welker waarde is}\end{array}\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\R_2=\frac{92}{25}\\R_1=5\end{Bmatrix},$$

waarvan de gezamenlijke waarde is

$$\tfrac{5}{91}\times 1+\tfrac{5}{91}\times 2+\tfrac{1}{91}\times 3+\tfrac{25}{91}\times\tfrac{92}{25}+\tfrac{25}{91}\times 5=\tfrac{235}{91};$$

en vervolgens $\frac{11}{91}$ dat er meer dan 3 geworpen wordt, waaruit even als boven volgt

$$R_3=\frac{235}{91}\left\{1+\left(\frac{11}{91}\right)+\left(\frac{11}{91}\right)^2+\left(\frac{11}{91}\right)^3+\text{enz.}\right\},$$

of

$$R_3=\frac{\frac{235}{91}}{1-\frac{11}{91}}=\tfrac{47}{16}\quad\ldots\ldots\quad(12).$$

Indien het overschot 4 is, heeft de bediende deze kansen:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{5}{91}\\ \frac{1}{91}\\ \frac{25}{91}\\ \frac{25}{91}\\ \frac{30}{91}\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{dat het aantal}\\ \text{oogen van den}\\ \text{eerstvolgenden}\\ \text{worp zijn zal}\end{array}\left(\begin{array}{c}5\\6\\1\\2\\3\end{array}\right.\begin{array}{l}\text{of dat het aantal tieng. dat}\\ \text{hij trekt zal wezen}\\ \text{of dat hij de kans bekomen}\\ \text{zal, welker waarde is}\end{array}\begin{Bmatrix}1\\2\\R_3=\frac{47}{16}\\R_2=\frac{92}{25}\\R_1=5\end{Bmatrix},$$

waarvan de gezamenlijke waarde is

$$\frac{5}{91}\times 1+\frac{1}{91}\times 2+\frac{25}{91}\times\frac{47}{16}+\frac{25}{91}\times\frac{92}{25}+\frac{30}{91}\times 5=\frac{5159}{16\times 91};$$

daarenboven heeft hij $\frac{6}{91}$ kans, dat er meer dan 4 geworpen wordt, en dus is

$$R_4=\frac{5159}{16\times 91}\left\{1+\left(\frac{6}{91}\right)+\left(\frac{6}{91}\right)^2+\left(\frac{6}{91}\right)^3+\text{enz.}\right\},$$

of

$$R_4=\frac{\frac{5159}{16\times 91}}{1-\frac{6}{91}}=\frac{5159}{1360}\quad\ldots\ldots\quad(13).$$

Indien eindelijk het overschot der erfenis 5 is, zijn de kansen van den bedienden:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{91}\\ \frac{25}{91}\\ \frac{25}{91}\\ \frac{30}{91}\\ \frac{5}{91}\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{dat het aantal}\\ \text{oogen van den}\\ \text{eerstvolgenden}\\ \text{worp zijn zal}\end{array}\left(\begin{array}{c}6\\1\\2\\3\\4\end{array}\right.\begin{array}{l}\text{of dat hij trekken}\\ \text{zal tieng.}\\ \text{of dat hij de kans}\\ \text{zal bekomen, wel-}\\ \text{ker waarde is}\end{array}\begin{Bmatrix}1\\R_4=\frac{5159}{1360}\\R_3=\frac{47}{16}\\R_2=\frac{92}{25}\\R_1=5\end{Bmatrix},$$

waarvan de gezamenlijke waarde is

$$\frac{1}{91}\times 1+\frac{25}{91}\times\frac{5159}{1360}+\frac{25}{91}\times\frac{47}{16}+\frac{30}{91}\times\frac{92}{25}+\frac{5}{91}\times 5=\frac{207177}{91\times 680};$$

daarenboven heeft hij nog $\frac{1}{91}$ kans, dat er meer dan 5 geworpen werdt, en dus is

$$R_5=\frac{207177}{91\times 680}\left\{1+\left(\frac{1}{91}\right)+\left(\frac{1}{91}\right)^2+\left(\frac{1}{91}\right)^3+\text{enz.}\right\},$$

of

$$R_5=\frac{\frac{207177}{91\times 680}}{1-\frac{1}{91}}=\frac{69059}{20400}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

Om nu de geheele waarde van het aandeel des bedienden te vinden, moeten wij klaarblijkelijk de waarden R, R_1, R_2, R_3, R_4 en R_5, die dat aandeel heeft, in elk der onderstelde gevallen, dat het eerste overschot minder dan 6, de getallen 0, 1, 2, 3, 4 en 5 zal bedragen, vermenigvuldigen met de respectieve kansen Q, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 en Q_5, dat die onderstelde gevallen zullen plaats hebben, en vervolgens de som van die producten nemen. Noemen wij dus die geheele waarde X, dan is

$$X=QR+Q_1R_1+Q_2R_2+Q_3R_3+Q_4R_4+Q_5R_5$$

of, door substitutie der waarden (8) tot (14),

$$X=\frac{1}{216}\times 0+\frac{6}{216}\times 5+\frac{11}{216}\times\frac{92}{25}+\frac{41}{216}\times\frac{47}{16}+\frac{66}{216}\times\frac{5159}{1360}+\frac{91}{216}\times\frac{69059}{20400}=3\,\frac{64603}{137700}=3,4691\ldots$$

Het aandeel van den bedienden zal dus afgekocht moeten worden met 3,4691 tienguldenstukken, of met 34 gulden 69 cent.

II. Oplossing van J. Badon Ghijben.

Stellen wij, de blanke worpen buiten rekening latende, de kansen, dat er 1, 2, 3, 4, 5 en 6 oogen geworpen worden, respectievelijk door a, b, c, d, e en f voor, dan is

$a = \frac{25}{91}$, $b = \frac{25}{91}$, $c = \frac{30}{91}$, $d = \frac{5}{91}$, $e = \frac{5}{91}$ en $f = \frac{1}{91}$,

en $$a + b + c + d + e + f = 1 \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Stellen wij verder, het tienguldenstuk als eenheid aannemende, de waarde van het aandeel des bedienden, in de onderstelling dat de erfenis uit n tienguldenstukken bestaat, door X_n voor, dan hebben wij dadelijk

$$X_0 = 0;$$

want is de erfenis 0, dan heeft ook het aandeel van den bedienden geene waarde.

Indien $n = 1$ is, en dus de erfenis slechts een enkel tienguldenstuk bevat, bestaat de waarde X_1 van het aandeel des bedienden, uit:

	$a\,X_0$	voor	de	kans	dat	men	1	werpt,
	$b\,(1+X_1)$	»	»	»	»	»	2	»,
	$c\,(2+X_1)$	»	»	»	»	»	3	»,
	$d\,(3+X_1)$	»	»	»	»	»	4	»,
	$e\,(4+X_1)$	»	»	»	»	»	5	»,
en	$f\,(5+X_1)$	»	»	»	»	»	6	»;

werpt men namelijk 1, waarvan de kans a is, dan komt hij in den toestand, waarin zijn aandeel X_0 waardig is; en werpt men 2, 3, 4, enz., waarvan de kansen b, c, d, enz. zijn, dan trekt hij 1, 2, 3, enz. tienguldenstukken en blijft bovendien in den toestand, waarin zijn aandeel X_1 waardig is. Wij hebben dus

$$X_1 = aX_0 + b(1+X_1) + c(2+X_1) + d(3+X_1) + e(4+X_1) + f(5+X_1),$$

waaruit volgt

$$X_1 = \frac{aX_0 + b + 2c + 3d + 4e + 5f}{1 - b - c - d - e - f},$$

of daar volgens (1) de noemer gelijk a is

$$X_1 = \frac{aX_0 + b + 2c + 3d + 4e + 5f}{a}.$$

Indien $n = 2$ is, bestaat de waarde X_2 van het aandeel des bedienden, uit:

$a\,X_1$ voor de kans dat men 1 werpt,
$b\,X_0$ " " " " " 2 " ,
$c(1+X_2)$ " " " " " 3 " ,
$d(2+X_2)$ " " " " " 4 " ,
$e(3+X_2)$ " " " " " 5 " ,
$f(4+X_2)$ " " " " " 6 " ,

werpt men namelijk 1 of 2, zoo komt hij in toestanden, waarin zijn aandeel X_1 of X_0 waardig is, en werpt men 3, 4, 5 of 6, zoo trekt hij 1, 2, 3 of 4 tienguldenstukken, en blijft bovendien in den toestand, waarin zijn aandeel X_2 waardig is. Wij hebben dus:

$$X_2 = aX_1 + bX_0 + c(1+X_2) + d(2+X_2) + e(3+X_2) + f(4+X_2),$$

waaruit volgt

$$X_2 = \frac{aX_1 + bX_0 + c + 2d + 3e + 4f}{1 - c - d - e - f},$$

of volgens (1), voor den noemer $a+b$ schrijvende

$$X_2 = \frac{aX_1 + bX_0 + c + 2d + 3e + 4f}{a+b}.$$

Indien $n = 3$ is, komen wij even zoo tot de vergelijking

$$X_3 = aX_2 + bX_1 + cX_0 + d(1+X_3) + e(2+X_3) + f(3+X_3),$$

waaruit volgt

$$X_3 = \frac{aX_2 + bX_1 + cX_0 + d + 2e + 3f}{1 - d - e - f},$$

of $$X_3 = \frac{aX_2 + bX_1 + cX_0 + d + 2e + 3f}{a+b+c}.$$

Indien $n = 4$ of $n = 5$ is, vinden wij gelijkerwijze

$$X_4 = \frac{aX_3 + bX_2 + cX_1 + dX_0 + e + 2f}{a+b+c+d},$$

en $$X_5 = \frac{aX_4 + bX_3 + cX_2 + dX_1 + eX_0 + f}{a+b+c+d+e}.$$

Wij behoeven, in de gevondene formulen, slechts de getallenwaarden voor de daarin voorkomende letters te substitueren, om achtervolgens te vinden

$$X_0 = 0, X_1 = 5, X_2 = \tfrac{92}{25}, X_3 = \tfrac{47}{10}, X_4 = \tfrac{5152}{1000} \text{ en } X_5 = \tfrac{62952}{20400} \ldots\ldots (2).$$

Indien $n = 6$ of meer is, bestaat de waarde X_n van het aandeel des bedienden, in het algemeen, uit:

aX_{n-1} voor de kans dat men 1 werpt,
bX_{n-2} » » » » » 2 » ;
cX_{n-3} » » » » » 3 » ,
dX_{n-4} » » » » » 4 » ,
eX_{n-5} » » » » » 5 » ,
en fX_{n-6} » » » » » 6 » ;

want, door het werpen van 1, 2, 3, enz. komt hij in toestanden, waarin zijn aandeel X_{n-1}, X_{n-2}, X_{n-3}, enz. waardig is. Derhalve is in het algemeen

$$X_n = aX_{n-1} + bX_{n-2} + cX_{n-3} + dX_{n-4} + eX_{n-5} + fX_{n-6} \quad \ldots \ldots (3);$$

door deze formule zal men, met behulp der waarden (2), achtervolgens X_6, X_7, X_8, enz. zoo ver, men goedvindt kunnen berekenen, en hierdoor wordt dan de waarde van het aandeel des bedienden gevonden, indien men bepaaldelijk weet, uit hoe vele tienguldenstukken de erfenis bestaat.

Het blijkt hieruit, dat de waarde van dit aandeel, afhankelijk is van de hoegrootheid der erfenis. Het is echter klaar, dat hoe grooter deze is, haar juiste bedrag des te minder invloed op de waarde van het aandeel des bedienden moet hebben; weshalve men de omstandigheid, dat haar juiste bedrag onbekend is, in rekening zal kunnen brengen, door haar groot genoeg te onderstellen, om te maken, dat de zes grootheden X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, X_{n-3}, X_{n-4} en X_{n-5} als gelijkwaardig mogen beschouwd worden; en alsdan zullen deze, ieder in het bijzonder, de waarde van het aandeel des bedienden uitdrukken.

Hiertoe hebben wij volgens (3) de vergelijkingen:

$$X_6 = aX_5 + bX_4 + cX_3 + dX_2 + eX_1 + fX_0,$$
$$X_7 = aX_6 + bX_5 + cX_4 + dX_3 + eX_2 + fX_1,$$
$$X_8 = aX_7 + bX_6 + cX_5 + dX_4 + eX_3 + fX_2,$$

enz. enz. tot

$$X_n = aX_{n-1} + bX_{n-2} + cX_{n-3} + dX_{n-4} + eX_{n-5} + fX_{n-6};$$

nemen wij daarvan de som, daarbij

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \text{enz.} \ldots + X_{n-1} + X_n = S$$

stellende, dan komt er

$$S - (X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) =$$
$$a\{S - (X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_n)\} +$$
$$b\{S - (X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_{n-1} + X_n)\} +$$
$$c\{S - (X_0 + X_1 + X_2 + X_{n-2} + X_{n-1} + X_n)\} +$$
$$d\{S - (X_0 + X_1 + X_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} + X_n)\} +$$
$$e\{S - (X_0 + X_{n-4} + X_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} + X_n)\} +$$
$$f\{S - (X_{n-5} + X_{n-4} + X_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} + X_n)\}.$$

Daar volgens (1)

$$S = aS + bS + cS + dS + eS + fS$$

is, gaan in deze vergelijking de termen, die S bevatten, tegen elkander weg; zoo wij voorts de teekens omkeeren, en volgens het aangevoerde stellen, dat $X_n = X_{n-1} = X_{n-2} = X_{n-3} = X_{n-4} = X_{n-5} = X_\infty$ de te berekenen waarde van het aandeel des bedienden is, gaat de vergelijking over in

$$X_0+X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 =$$
$$= a(X_0+X_1+X_2+X_3+X_4+X_\infty)+b(X_0+X_1+X_2+X_3+2X_\infty)+ c(X_0+X_1+X_2+3X_\infty)+d(X_0+X_1+4X_\infty)+e(X_0+5X_\infty)+f(6X_\infty);$$

en zoo wij dan verder stellen:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - a = p, \\ 1 - a - b = q, \\ 1 - a - b - c = r, \\ 1 - a - b - c - d = s, \\ 1 - a - b - c - d - e = t, \end{array}\right\} \ldots\ldots (4),$$

als wanneer

$$p = \frac{66}{91},\ q = \frac{41}{91},\ r = \frac{11}{91},\ s = \frac{6}{91} \text{ en } t = \frac{1}{91}$$

is, vinden wij uit deze vergelijking

$$X_\infty = \frac{X_5+pX_4+qX_3+rX_2+sX_1+tX_0}{1+p+q+r+s+t} \quad \ldots (5).$$

Hierin nu voor X_5, X_4, enz. de vroeger berekende waarden, alsmede voor p, q, r, s en t de getallenwaarden substituerende, komt er, voor de waarde van het aandeel des bedienden op de erfenis,

$$X_\infty = 3\,\frac{64603}{137700},$$

even als in de vorige oplossing.

Aanmerking. De achtervolgende waarden X_0, X_1, X_2, X_3, enz. maken blijkbaar eene wederkeerige reeks uit, welke de vergelijking (3) tot betrekkingsschaal heeft; volgens het

bekende verband, dat er tusschen de betrekkingsschaal eener wederkeerige reeks en den noemer harer voortbrengende breuk bestaat, moeten dus X_0, X_1, X_2, X_3, *enz.* de coëfficiënten zijn van de magten van x, voorkomende in de ontwikkeling van het gebroken

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5 - fx^6} = X_0 + X_1x + X_2x^2 + X_3x^3 + \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Daar nu de coëfficiënten van den noemer bekende getallen zijn, en ook de coëfficiënten van de zes eerste termen dezer ontwikkeling reeds berekend zijn, kan men de coëfficiënten van den teller op de gewone wijze bepalen. Wij vinden voor dezelve:

$$\left.\begin{array}{l} A = X_0, \\ B = X_1 - aX_0, \\ C = X_2 - aX_1 - bX_0, \\ D = X_3 - aX_2 - bX_1 - aX_0, \\ E = X_4 - aX_3 - bX_2 - cX_1 - dX_0, \\ F = X_5 - aX_4 - bX_3 - cX_2 - dX_1 - eX_0, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

of de getallenwaarden berekenende

$$A = 0,\ B = 5,\ C = \frac{5247}{2275},\ D = \frac{115}{208},\ E = \frac{2891}{8840},\ F = \frac{89459}{1856400}.$$

Van het gebroken (1) zijn dan nu al de coëfficiënten bekend, en de waarde van het aandeel des bedienden wordt, indien men weet, dat de erfenis uit een bepaald getal van n tienguldenstukken bestaat, door den coëfficiënt van x^n, in de ontwikkeling van dat gebroken voorkomende, uitgedrukt.

De bekortingen, door (4) aangewezen, in het oog houdende, zal men zich gemakkelijk overtuigen, dat de

noemer van het gebroken (I) de ontwikkeling is van het product

$$(1 - x)\,(1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + tx^5);$$

het gebroken (I) zelve, zal dus in twee andere kunnen verdeeld worden, door te stellen

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5}{(1 - x)\,(1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + tx^5)} = \frac{G}{1 - x} + \frac{H + Ix + Kx^2 + Lx^3 + Mx^4}{1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + tx^5},$$

en vervolgens G, H, I, K, L en M te bepalen, uit de identiteit der vergelijking

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5 = G(1+px+qx^2+rx^3+sx^4+tx^5)+(1-x)(H+Ix+Kx^2+Lx^3+Mx^4) \;\ldots\; (7).$$

Nu is

$$\frac{G}{1 - x} = G + Gx + Gx^2 + Gx^3 + \text{enz.} \;\ldots\ldots\; (II);$$

stellen wij dus

$$\frac{H + Ix + Kx^2 + Lx^3 + Mx^4}{1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + tx^5} = Y_0 + Y_1x + Y_2x^2 + Y_3x^3 + \text{enz.} \;\ldots\; (III),$$

dan zullen wij, omdat de som der gebrokens (II) en (III) het gebroken (I) oplevert, moeten hebben

$$X_0 = Y_0 + G,\quad X_1 = Y_1 + G,\quad X_2 = Y_2 + G,\ \text{enz.}$$

of in het algemeen

$$X_n = Y_n + G \;\ldots\ldots\ldots\; (8).$$

Om G te bepalen, behoeven wij in de vergelijking (7), die voor alle waarden van x moet doorgaan, slechts $x = 1$ te stellen, hierdoor wordt die vergelijking

$$A + B + C + D + E + F = G(1 + p + q + r + s + t);$$

maar nemen wij nu ook de som der vergelijkingen (6), dan vinden wij, met behulp van (4),

$$A + B + C + D + E + F = X_5 + pX_4 + qX_3 + rX_2 + sX_1 + tX_0,$$

alzoo is

$$G(1 + p + q + r + s + t) = X_5 + pX_4 + qX_3 + rX_2 + sX_1 + tX_0$$

of $$G = \frac{X_5+pX_4+qX_3+rX_2+sX_1+tX_0}{1+p+q+r+s+t};$$

volgens (5) is dan ook $G = X_\infty$,

waardoor de vergelijking (8) verandert in

$$X_n = Y_n + X_\infty$$
$$Y_n = X_n - X_\infty \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Het verschil dus tusschen de waarden, die het aandeel van den bedienden heeft, in de beide onderstellingen, dat de erfenis uit een bepaald getal van n tienguldenstukken bestaat, of dat zij groot genoeg is, opdat het juiste getal tienguldenstukken van dezelve op de waarde van het aandeel geen invloed hebbe, wordt aangewezen door den coëfficiënt van x^n, in de ontwikkeling van het gebroken (III) voorkomende.

Stellen wij in (9) $n = \infty$, dan komt er

$$Y_\infty = 0;$$

de reeks (III) moet dus, wat hare coëfficiënten betreft, convergerend eindigen.

CCXXXVI. Voorstel.

Door P. Krom.

Van eene rekenkunstige reeks van vijf termen is bekend, dat de som der vier eerste termen, vermenigvuldigd met den laatsten, tot product geeft 6000; en dat de som der vier laatste termen, vermenigvuldigd met den eersten, 4488 tot product oplevert. Welke is deze reeks?

Opgelost *door* J. S. Speijer, D. W. Hinse, F. G. Radijs, J. A. Hansen, J. Heemskerk, Abs., P. Krom, G. Koster, J. Teixeira de Mattos, Jr., J. Sjoenis, J. P. A. François *en* H. Middelburg.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stellen wij voor de termen der reeks

$$x - 2y, \; x - y, \; x, \; x + y, \; x + 2y,$$

dan is de som der vier eerste termen . . . . $4x - 2y$

en die der vier laatste . . . . $4x + 2y$,

zoodat wij volgens het voorstel hebben de vergelijkingen

$$(4x - 2y)(x + 2y) = 6000$$

en $$(4x + 2y)(x - 2y) = 4488,$$

of wel $$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 6000$$

en $$4x^2 - 6xy - 4y^2 = 4488.$$

Nemen wij nu de som en het verschil dezer vergelijkingen, dan komt er

$$8x^2 - 8y^2 = 10488 \text{ of } x^2 - y^2 = 1311 \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$12xy = 1512 \text{ of } xy = 126 \quad . \quad . \quad (2).$$

Nemen wij vervolgens het vierkant van (1), en tellen wij daarbij viermaal het vierkant van (2) op, dan komt er

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (1311)^2 + 4(126)^2$$

of

$$(x^2 + y^2)^2 = 1782225,$$

waaruit, daar $x^2 + y^2$ niet negatief kan zijn, zonder voor x en y onbestaanbare waarden op te leveren, alleen volgt

$$x^2 + y^2 = 1335.$$

Deze vergelijking met (1) verbindende, vinden wij

$$x^2 = 1323 \text{ en } y^2 = 12$$

waaruit volgt

$$x = \pm 21\sqrt{3} \text{ en } y = \pm 2\sqrt{3};$$

kunnende hier slechts gelijktijdig de bovenste en onderste teekens gebruikt worden, omdat volgens (2) het product xy positief moet wezen.

Wij hebben derhalve voor de gevraagde reeks:

$$\pm 17\sqrt{3}, \pm 19\sqrt{3}, \pm 21\sqrt{3}, \pm 23\sqrt{3} \text{ en } \pm 25\sqrt{3}.$$

CCXXXVII. VOORSTEL.

Door J. A. HANSEN.

Wanneer er geene andere munten in omloop waren, dan achtste Zeeuwsche Rijksdaalders, vierde Hollandsche Rijksdaalders en halve Ducatons; hoe zou men dan één gulden betalen?

OPGELOST door D. W. HINSE, J. A. HANSEN, J. HEEMSKERK, ABR., G. KOSTER, H. MIDDELBURG, F. C. RASSIJS, J. SIDENIUS, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, H. en A. VOLKERSZ.

OPLOSSING van D. W. HINSE.

Stellen wij, dat tot de betaling van één gulden gebruikt worden x achtste Zeeuwsche Rijksdaalders, y vierde Hollandsche Rijksdaalders en z halve Ducatons, en beschouwen wij alles als door den betaler uitgegeven, dan is

$$32\tfrac{1}{2}x + 62\tfrac{1}{2}y + 157\tfrac{1}{2}z = 100$$

of

$$13x + 25y + 63z = 40,$$

en dus

$$x = \frac{40 - 25y - 63z}{13}$$

of $$z = 3 - y - 4x + \frac{1 - 12y - 11x}{13};$$

stellen wij vooreerst

$$1 - 12y - 11x = 13a,$$

dan volgt hieruit

$$x = \frac{1 - 12y - 13a}{11}$$

of $$x = -y - a + \frac{1 - y - 2a}{11};$$

en verder stellende

$$1 - y - 2a = 11b,$$

zoo wordt

$$y = 1 - 2a - 11b,$$
$$x = -1 + a + 12b,$$

en $$z = 6 - a - 37b.$$

Hierin kunnen nu voor a en b willekeurige geheele getallen, hetzij positieve, hetzij negatieve, genomen worden, en het aantal antwoorden op de vraag is dus *oneindig groot*.

Wanneer wij $a = 0$ en $b = 0$ nemen, wordt $z = 6$, $y = 1$ en $x = -1$; de betaling kan dus geschieden met 6 achtste Z. Rijksd., en 1 vierde Holl. Rijksd., tegen teruggave van 1 halve Ducaton.

Wil men de achtste Z. Rijksd. niet gebruiken, zoo stelle men $a = 6$ en $b = 0$; alsdan wordt $z = 0$, $y = -11$ en $x = 5$, zoodat de betaling met 5 halve Duc., tegen teruggave van 11 vierde Holl. Rijksd. kan plaats hebben.

Wil men zich van geene dertiendhalven bedienen, zoo stelle men $a = 6$ en $b = -1$, waardoor $z = 37$, $y = 0$ en $x = -7$ wordt; in dit geval betaalt men met 37 achtste Z. Rijksd. tegen teruggave van 7 halve Ducatons.

Wil men eindelijk geene halve Ducatons bezigen, zoo stelle men $a = 1$ en $b = 0$, dan wordt $z = 5$, $y = -1$ en $x = 0$; zoodat de betaling geschieden kan met 5 achtste Z. Rijksd. tegen teruggave van 1 vierde Holl. Rijksd.

Bij alle mogelijke antwoorden, zal altijd teruggave van muntstukken plaats hebben, want wat men ook voor a en b neemt, moeten er altijd voor een of twee onzer onbekenden negatieve getallen komen. Om dit duidelijk te zien, leide

men uit de gevondene formulen af

$$x + z = 5 - 25b \quad \text{en} \quad y + 2z = 13b - 1,$$

dan blijkt, dat, zoo geen der onbekenden negatief zou wezen, $5 - 25b$ en $13b - 1$ gelijktijdig positief zouden moeten zijn, dat dus ook gelijktijdig $b < \frac{1}{5}$ en $b > \frac{1}{13}$ zou moeten wezen, hetgeen, daar b geen gebroken zijn mag, onmogelijk is.

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door J. A. HANSEN.

In eenen driehoek ABC (Fig. 90) *is uit* C *eene lijn getrokken, snijdende* AB *in* D. *Zoo nu gegeven is* $AD = a = 48$, $BD = b = 52$, $CD = c = 29$ *en* $AC : BC = p : q = 7 : 15$, *vraagt men* AC *en* BC *te vinden?* (*)

OPGELOST *door* J. A. HANSEN, J. P. A. FRANÇOIS, D. W. HINSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS, J. SJOENIS, J. S. SPEIJER *en* J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

OPLOSSING *van* J. A. HANSEN.

Stellen wij $AC = px$, dan is $BC = qx$; laten wij voorts uit C eene loodlijn CE op AB vallen, dan is volgens eene bekende eigenschap der driehoeken

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2.\ AD \times DE$$

en

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 + 2.\ BD \times DE.$$

Uit elk dezer vergelijkingen 2 DE afzonderende, en de alzoo verkregene waarden aan elkander gelijk stellende, vinden wij

$$\frac{CD^2 + AD^2 - AC^2}{AD} = \frac{BC^2 - (CD^2 + BD^2)}{BD}$$

of

$$\frac{c^2 + a^2 - p^2x^2}{a} = \frac{q^2x^2 - (c^2 + b^2)}{b}.$$

Uit deze vergelijking kunnen wij verder achtervolgens afleiden:

$$b(c^2+a^2) - bp^2x^2 = aq^2x^2 - a(c^2+b^2),$$

$$a(c^2+b^2) + b(c^2+a^2) = aq^2x^2 + bp^2x^2,$$

$$x^2 = \frac{a(c^2+b^2)+b(c^2+a^2)}{aq^2+bp^2},$$

en

$$x = \sqrt{\frac{a(c^2+b^2)+b(c^2+a^2)}{aq^2+bp^2}};$$

(*) GIETERMAKER, *Konst der Stuurlieden*, Tweede Boek, XII Voorstel, XIV Exempel. (Negende Uitgave, 1774.)

derhalve is

$$AC = px = p\sqrt{\frac{a(c^2+b^2)+b(c^2+a^2)}{aq^2+bp^2}}$$

en

$$BC = qx = q\sqrt{\frac{a(c^2+b^2)+b(c^2+a^2)}{aq^2+bp^2}}.$$

Stellen wij in deze formulen voor a, b, c, p en q de gegevene getallenwaarden, dan komt er:

$$x = 5,\ AC = px = 35 \text{ en } BC = qx = 75.$$

Wanneer men in de formulen, voor AC en BC gevonden, p en q onder het wortelteeken brengt, door p^2 en q^2 in den noemer der breuk te deelen, geeft dit reden van de bewerking door GIETERMAKER, zonder bewijs opgegeven.

CCXXXIX. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR.

Vier getallen te vinden, zoodanig: dat de sommen van de beide eerste, van de beide middelste en van de beide laatste, vierkanten zijn; dat de wortels uit de eerste en laatste sommen tot elkander staan als 1 *tot* 2; *en dat de som van het eerste en derde getal, tot die van het tweede en vierde staat, als* 2 *tot* 3.

OPGELOST door F. C. RADIJS, J. A. HANSEN, J. HEEMSKERK, ABZ., D. W. HENSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, J. S. SPEIJER, J. TEIXEIRA DE MATTOS, JR. *en* J. SIOENIS.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Stelt men de getallen door x, y, z en v voor, dan is volgens de tweede voorwaarde

$$\sqrt{(x+y)} : \sqrt{(z+v)} = 1 : 2$$

of

$$4(x+y) = z+v \quad \ldots\ldots \quad (1);$$

en volgens de derde voorwaarde

$$x+z : y+v = 2 : 3$$

of

$$3(x+z) = 2(y+v) \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Lost men de vergelijkingen (1) en (2) ten opzigte van x en y op, dan vindt men

$$x = \tfrac{1}{2}(v-z) \text{ en } y = \tfrac{1}{4}(3z-v),$$

zoodat men in plaats van de gestelde getallen heeft

$$\tfrac{1}{2}(v-z),\ \tfrac{1}{4}(3z-v),\ z \text{ en } v.$$

Voor de som der beide eerste getallen, vindt men nu $\frac{1}{4}(z+v)$; voor de som der beide middelste, $\frac{1}{4}(7z-v)$, terwijl de som der beide laatste $z+v$ is; volgens de eerste

voorwaarde moeten dus nog $\frac{1}{4}(x+v)$, $\frac{1}{4}(7x-v)$ en $x+v$ vierkanten zijn, maar indien $\frac{1}{4}(x+v)$ een vierkant is, zal $x+v$ dit natuurlijk ook zijn, zoodat wij slechts $\frac{1}{4}(x+v)$ en $\frac{1}{4}(7x-v)$ tot vierkanten te maken hebben. Stellen wij daartoe

$$\tfrac{1}{4}(x+v) = (p-q)^2 \text{ en } \tfrac{1}{4}(7x-v) = (p+q)^2,$$

dan vinden wij, door x en v uit deze vergelijkingen op te lossen,

$$x = p^2 + q^2 \text{ en } v = 3p^2 - 8pq + 3q^2;$$

hierdoor wordt

$$\tfrac{1}{2}(v-x) = p^2 - 4pq + q^2 \text{ en } \tfrac{1}{4}(3x-v) = 2pq;$$

zoodat dan de begeerde getallen zijn

$$p^2 - 4pq + q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2 \text{ en } 3p^2 - 8pq + 3q^2.$$

In deze vormen, die aan al de gestelde voorwaarden voldoen, kan men voor p en q willekeurige waarden nemen; stelt men b. v. $p = 4$ en $q = 1$, zoo vindt men voor de verlangde getallen 1, 8, 17 en 19; enz.

Om positieve getallen te bekomen, zal men p en q zoodanig moeten nemen, dat het vierkant van hun verschil grooter is dan hun dubbel product; want alsdan heeft men

$$p^2 - 2pq + q^2 > 2pq,$$

waaruit volgt $$p^2 + q^2 > 4pq$$
en $$3p^2 + 3q^2 > 12pq,$$
zoodat men dan ook heeft
$$3p^2 + 3q^2 > 8pq,$$
en bijgevolg al de getallen positief worden.

CCXL. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Uit een parabolisch segment, bepaald door eene koorde, welke loodregt op de as staat, is een gelijkvormig deel uitgesneden, hetwelk tot het eerste in reden staat als 1 *tot* m. *Men vraagt naar het zwaartepunt van het overblijvende gedeelte?*

Opgelost *door* J. A. Hansen, F. C. Radijs *en* J. S. Speijer.

Oplossing van J. A. Hansen.

Het vraagstuk bepaalt niet, *hoe* uit het gegeven segment het daaraan gelijkvormige is uitgesneden; wij nemen dus

aan, dat dit zoo geschied zij, dat van de beide segmenten de assen en de koorden langs elkander vallen.

Laat dan BAC (Fig. 91) het gegevene en b a c het daaruit gesnedene segment zijn; zij Z′ het zwaartepunt van BAC, Z″ dat van b a c en Z dat van het overblijvende gedeelte BACcab, dan is, volgens de theorie der zwaartepunten, $PZ' \times Inh.BAC = PZ'' \times Inh.bac + PZ \times (Inh.BAC - Inh.bac)$; maar zoo als men weet (Zie I. R. SCHMIDT, *Beg. der Statica.* § 97) is $PZ' = \frac{2}{5}AP$ en $PZ'' = \frac{2}{5}aP$, wij hebben alzoo $\frac{2}{5}AP \times Inh.BAC = \frac{2}{5}aP \times Inh.bac + PZ \times (Inh.BAC - Inh.bac)$ of, door $\frac{2}{5}AP \times Inh.BAC$ deelende en de termen verplaatsende,

$$\tfrac{5}{2}.\frac{PZ}{AP}\left(1 - \frac{Inh.bac}{Inh.BAC}\right) = 1 - \frac{aP}{AP} \times \frac{Inh.bac}{Inh.BAC}.$$

Nu is volgens de opgave

$$Inh.bac : Inh.BAC = 1 : m;$$

en daar, in gelijkvormige figuren, de gelijkstandige lijnen evenredig zijn met de vierkantswortels uit de inhouden,

$$aP : AP = 1 : \sqrt{m};$$

zoo wij nu in de vorige vergelijking de verhoudingen

$$\frac{Inh.bac}{Inh.BAC} = \frac{1}{m} \text{ en } \frac{aP}{AP} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

substitueren, verandert zij in

$$\tfrac{5}{2}.\frac{PZ}{AP}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{1}{m\sqrt{m}},$$

waaruit gemakkelijk afgeleid wordt

$$\tfrac{5}{2}.\frac{PZ}{AP}\left(\frac{m\sqrt{m} - \sqrt{m}}{m\sqrt{m}}\right) = \frac{m\sqrt{m} - 1}{m\sqrt{m}},$$

$$\tfrac{5}{2}.\frac{PZ}{AP}(m - 1)\sqrt{m} = m\sqrt{m} - 1,$$

$$PZ = \tfrac{2}{5}.\frac{m\sqrt{m} - 1}{(m-1)\sqrt{m}} \times AP,$$

of ook

$$PZ = \tfrac{2}{5}.\frac{m^2 - \sqrt{m}}{m^2 - m} \times AP.$$

Door deze formule de afstand PZ bekend wordende, is hierdoor de plaats van het zwaartepunt Z gevonden.

Was het gelijkvormige segment uit het gegevene zoodanig gesneden, dat de assen en de toppen in elkander vielen, zoo als in Fig. 92, dan zou even zoo, ter bepaling van het

zwaartepunt Z van het overblijvende gedeelte, de formule

$$AZ = \tfrac{3}{4}.\ \frac{m^2 - \sqrt{m}}{m^2 - m} \times AP$$

gevonden worden.

CCXLI. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

In eenen bol is een regte cirkelvormige kegel beschreven; deze kegel wordt, door het vlak van eenen grooten cirkel des bols, volgens eene ellips gesneden. Men vraagt de verhouding te vinden tusschen de inhouden van die ellips en van dien grooten cirkel?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. P. A. François, D. W. Hense, G. Koster, H. Middelburg *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat ABC (Fig. 93) een assedriehoek des kegels, loodregt op het snijdende vlak genomen, voorstellen; zij verder CP de as des kegels, M het middelpunt en ABECD een groote cirkel van den bol, waarin de kegel beschreven is, DE de middellijn, volgens welke de laatstgenoemde cirkel door het snijdende vlak gesneden wordt, en FIGK de bedoelde ellips, FG tot groote as hebbende.

Deelen wij dan FG in H middendoor en brengen wij door het punt H een vlak, evenwijdig met het grondvlak des kegels, dan snijdt dit vlak den kegel volgens eenen cirkel LKNI, en de ellips volgens eene lijn IK, die dan de kleine as der ellips is.

Zij nu gegeven de halve tophoek des kegels $ACP = BCP = \alpha$, de hoek waaronder het snijdende vlak de as des kegels snijdt $CMG = \beta$, dan is *hoek* $CGM = 180° - (\alpha + \beta)$, *hoek* $CFG = \beta - \alpha$, *hoek* $HGN = \beta + \alpha$, *hoek* $HNG = 90° - \alpha$ en *hoek* $FLH = 90° + \alpha$; stellen wij verder den straal des bols $CM = r$, de halve groote as der ellips $FH = HG = a$, de halve kleine as $KH = HI = b$, dan hebben wij:

uit den driehoek MGC,

$$GC = \frac{CM Sin.CMG}{Sin.CGM} = \frac{r Sin.\beta}{Sin.(\beta+\alpha)},$$

uit den driehoek CFG,

$$FG = \frac{GC Sin. FCG}{Sin. CFG} = GC. \frac{Sin. 2\alpha}{Sin.(\beta-\alpha)} = \frac{r Sin.\beta Sin.2\alpha}{Sin.(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)},$$

en dus $a = \frac{1}{2} FG = \frac{r Sin.\beta Sin.\alpha Cos.\alpha}{Sin.(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)}$;

uit den driehoek GHN,

$$HN = \frac{HG Sin. HGN}{Sin. HNG} = \frac{a Sin.(\beta+\alpha)}{Cos.\alpha};$$

uit den driehoek LHF,

$$LH = \frac{FH Sin. LFH}{Sin. FLH} = \frac{a Sin.(\beta-\alpha)}{Cos.\alpha};$$

en uit den cirkel LKNI,

$$KH^2 = HN \times LH = \frac{a^2 Sin(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)}{Cos.^2\alpha}$$

dus $b = KH = \frac{a}{Cos.\alpha}\sqrt{Sin.(\beta + \alpha)\ Sin.(\beta - \alpha)}$,

of, hierin voor a de bovengevondene waarde stellende,

$$b = \frac{r Sin.\beta Sin.\alpha}{\sqrt{Sin.(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)}}.$$

Noemen wij nu den inhoud der ellips I, dien des grooten cirkels I', dan is gelijk men weet $I = ab\pi$ en $I' = r^2\pi$; wij hebben dus

$$I : I' = ab : r^2$$

welke evenredigheid, door daarin voor a en b de verkregene waarden te substitueren, overgaat in

$$I : I' = \frac{r^2 Sin.^2\beta Sin.^2\alpha Cos.\alpha}{\sqrt{\{Sin.(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)\}^3}} : r^2,$$

of $I : I' = Sin.^2\beta Sin.^2\alpha Cos.\alpha : \sqrt{\{Sin.(\beta+\alpha) Sin.(\beta-\alpha)\}^3}$.

CCXLII. VOORSTEL.

Door F. C. RADIJS.

In welke reden wordt de kegel, in het voorgaande vraagstuk bedeeld, door het snijdende vlak verdeeld?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. P. A. FRANÇOIS, D. W. HINSE, G. KOSTER, H. MIDDELBURG *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laten wij, uit den top des kegels, eene loodlijn CO (Fig. 93) op het snijdende vlak FG neder, dan hebben wij voor den inhoud van het bovenstuk CFKGI, dat van den kegel afgesneden wordt,

Inh. Bovenst. $= \frac{1}{3}$ CO $\times$ *Inh. Ellips* FKGI.

Stellen wij nu alles als in de vorige oplossing, dan is

$$CO = CM \times Sin.\ CMG = rSin.\beta$$

en

$$Inh.\ Ellips\ FKGI = ab\pi,$$

waardoor wij vinden

$$Inh.\ Bovenst. = \tfrac{1}{3}\pi\ abrSin.\beta.$$

Voor den geheelen kegel hebben wij

$$Inh.\ Kegel = \tfrac{1}{3}\ CP \times AP^2\pi,$$

of daar AM getrokken zijnde, *hoek* AMP $= 2\alpha$, dus AP $= AMSin.2\alpha = rSin.2\alpha = 2rSin.\alpha Cos.\alpha$, MP $= AM\ Cos.2\alpha = rCos.2\alpha$ en CP $= CM + MP = r(1 + Cos.2\alpha) = 2rCos.^2\alpha$ is,

$$Inh.\ Kegel = \tfrac{8}{3}\pi\ r^3Cos.^4\alpha\ Sin.^2\alpha;$$

door hiervan den inhoud van het bovenstuk af te trekken, vinden wij

$$Inh.\ Benedenst. = \tfrac{1}{3}\pi r(8r^2Cos.^4\alpha\ Sin.^2\alpha - abSin.\beta);$$

alzoo is dan

$$Inh.\ Bovenst. : Inh.\ Benedenst. = abSin.\beta : 8r^2Cos.^4\alpha\ Sin.^2\alpha - abSin.\beta.$$

Brengen wij nu hierin voor a en b de waarden over, die in de vorige oplossing gevonden zijn, dan komt er

$$Inh.\ Bovenst. : Inh.\ Benedenst. = \frac{r^2Sin.^3\beta Sin.^2\alpha Cos.\alpha}{\sqrt{\{Sin.(\beta+\alpha)Sin.(\beta-\alpha)\}^3}} : 8r^2Cos.^4\alpha\ Sin.^2\alpha - \frac{r^2Sin.^3\beta Sin.^2\alpha Cos.\alpha}{\sqrt{\{Sin.(\beta+\alpha)Sin.(\beta-\alpha)\}^3}}$$

$$= Sin.^3\beta : 8Cos.^3\alpha \sqrt{\{Sin.(\beta+\alpha)\ Sin.(\beta-\alpha)\}^3} - Sin.^3\beta.$$

CCXLIII. VOORSTEL.

Door F. C. RADIJS.

Wanneer men eenen cirkel, waarin een driehoek beschreven is, laat omwentelen om eene lijn, buiten den

cirkel, doch in deszelfs vlak gelegen, verlangt men den inhoud te vinden van het ligchaam, dat door de omwenteling der drie gezamenlijke segmenten wordt voortgebragt?

Opgelost *door* J. Sjoenis.

Oplossing *van* J. Sjoenis.

Zij Z (Fig. 94) het middelpunt en dus tevens het zwaartepunt van den cirkel, Z′ het zwaartepunt van den driehoek en XY de omwentelings-as. Latende dan uit Z en Z′ loodlijnen ZA en Z′B op XY vallen, dan kunnen wij deze als gegeven aanmerken, gelijk ook de inhouden van den cirkel en van den driehoek.

Stellen wij dus den inhoud des cirkels door p, dien des driehoeks door q voor en zij ZA $= r'$, Z′B $= r''$, dan is, volgens den regel van Guldin,

$$Inh.\ omw.\ cirk. = 2\pi r' p$$

en

$$Inh.\ omw.\ drieh. = 2\pi r'' q;$$

nemen wij nu het verschil van deze inhouden, dan zal dit verschil de inhoud zijn van het ligchaam, door de omwenteling der gezamenlijke segmenten ontstaande. Dezen gevraagden inhoud X noemende, hebben wij alzoo onmiddellijk

$$X = 2\pi(r'p - r''q).$$

Was de driehoek gelijkzijdig, dan zou het punt Z′ in Z vallen en dus $r'' = r'$ zijn; den straal des cirkels r noemende, zouden wij in dit geval verder hebben $p = r^2\pi$ en $q = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, en bijgevolg

$$X = 2\pi r'(p - q) = 2\pi r'(r^2\pi - \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\pi r' r^2(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

CCXLIV. Voorstel.

Door F. C. Radijs.

Men begeert, in een gegeven parallelogram, een vierkant te beschrijven, zoodanig, dat één hoekpunt des vierkants in elke zijde van het parallelogram valt?

Opgelost *door* J. S. Speijer *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* F. C. Radijs.

Zij ABCD (Fig. 95) het gegevene parallelogram, en onderstellen wij, dat het vierkant EFGH daarin beschreven ware, dan komt het er slechts op aan, om AH en AE te bepalen. Stellen wij dus AH $= x$, AE $= y$ en laat gegeven zijn AD $= a$, AB $= b$ en *hoek* BAD $= \alpha$, dan is BE $= b - y$ en HD $= a - x$; maar de driehoeken EBF

en HDG zijn gelijk en gelijkvormig, omdat hunne zijden evenwijdig loopen en bovendien EF = HG is; bijgevolg is ook BF = HD = $a - x$. Zij verder *hoek* AEH = ϕ, HE = EF = z, dan is *hoek* AHE = 180° − $(\alpha + \phi)$, *hoek* EBF = 180° − α, *hoek* FEB = 90° − ϕ en *hoek* EFB = $\alpha + \phi$ − 90°.

Nu volgt uit den driehoek AEH,

$$AE : HE = Sin.\,AHE : Sin.\,HAE,$$

$$AH : HE = Sin.\,AEH : Sin.\,HAE;$$

en uit den driehoek EBF,

$$BF : EF = Sin.\,FEB : Sin.\,EBF,$$

$$BE : EF = Sin.\,EFB : Sin.\,EBF;$$

zoodat wij volgens de gestelde notatiën hebben

$$y : z = Sin.(\alpha + \phi) : Sin.\alpha,$$

$$x : z = Sin.\phi : Sin.\alpha,$$

$$a - x : z = Cos.\phi : Sin.\alpha,$$

$$b - y : z = -Cos.(\alpha + \phi) : Sin.\alpha,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{z\,Sin.(\alpha+\phi)}{Sin.\alpha} \dots\dots\dots (1),$$

$$Sin.\phi = \frac{x\,Sin.\alpha}{z} \dots\dots\dots (2),$$

$$Cos.\phi = \frac{(a-x)\,Sin.\alpha}{z} \dots\dots\dots (3),$$

$$y - b = \frac{z\,Cos.(\alpha+\phi)}{Sin.\alpha} \dots\dots\dots (4).$$

Door de vergelijkingen (1) en (4) van elkander af te trekken, komt er

$$b = \frac{z}{Sin.\alpha}\left\{Sin.(\alpha+\phi) - Cos.(\alpha+\phi)\right\},$$

of na ontwikkeling van $Sin.(\alpha+\phi)$ en $Cos.(\alpha+\phi)$

$$b = \frac{z}{Sin.\alpha}\left\{(Sin.\alpha - Cos.\alpha)Cos.\phi + (Sin.\alpha + Cos.\alpha)Sin.\phi\right\};$$

hierin voor $Sin.\phi$ en $Cos.\phi$ de waarden (2) en (3) substituerende, komt er

$$b = \frac{z}{Sin.\alpha}\left\{\frac{(Sin.\alpha - Cos.\alpha)(a-x)Sin.\alpha}{z} + \frac{(Sin.\alpha + Cos.\alpha)x\,Sin.\alpha}{z}\right\},$$

dat is: $b = (Sin.\alpha - Cos.\alpha)(a-x) + (Sin.\alpha + Cos.\alpha)x$;
waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{b + a(Cos.\alpha - Sin.\alpha)}{2Cos.\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (5);$$

de vergelijking (1) geeft verder, na ontwikkeling van $Sin.(\alpha + \phi)$,

$$y = \frac{xSin.\alpha Cos.\phi}{Sin.\alpha} + \frac{xCos.\alpha Sin.\phi}{Sin.\alpha} x,$$

door hierin de waarden (2) en (3) over te brengen

$y = (a-x)\ Sin.\alpha + xCos.\alpha = aSin.\alpha - x(Sin.\alpha - Cos.\alpha)$, en door hierin vervolgens de waarde (5) voor x te substitueren, na herleiding

$$y = \frac{a + b(Cos.\alpha - Sin.\alpha)}{2Cos.\alpha} \quad \ldots \quad (6).$$

Door (5) en (6) de waarden van x en y bekend wordende, is alzoo het vraagstuk door berekening opgelost.

De voor x en y gevondene waarden geven eene gemakkelijke constructie aan de hand, om het vierkant in het gegevene parallelogram te beschrijven. Men trekke namelijk CI loodregt op AB, make IK = CI en stelle LH, uit het midden van AK, loodregt op AK, dan zal het punt H, waar deze laatste loodlijn, de zijde AD des parallelograms snijdt, een hoekpunt des vierkants zijn, want door deze constructie heeft men:

$$CI = CB \times Sin.\ CBI = AD \times Sin.\ BAD = aSin.\alpha,$$
$$BI = BC \times Cos.\ CBI = AD \times Cos.\ BAD = aCos.\alpha,$$
$$AK = AB + BI - CI = b + a(Cos.\alpha - Sin.\alpha)$$

en
$$AH = \frac{AL}{Cos.\alpha} = \frac{AK}{2Cos.\alpha} = \frac{b + a(Cos.\alpha - Sin.\alpha)}{2Cos.\alpha},$$

hetgeen juist de voor x = AH berekende waarde is.

Trekt men even zoo AM loodregt op BC, maakt men MN = AM en stelt men OG loodregt op het midden van CN, dan zal ook het punt G, waar deze loodlijn CD snijdt, een hoekpunt des vierkants zijn; want door deze constructie zal men bevinden, dat CG = AE juist de voor y gevondene waarde (6) verkrijgt. Door de beide alzoo geconstrueerde hoekpunten, is dan nu ook het geheele vierkant ligtelijk te voltooijen.

Aanmerkingen. 1°. Is $\alpha = 90°$, dan is $Cos.\alpha = 0$; $x = \frac{b-a}{0} = \infty$ en $y = \frac{a-b}{0} = \infty$; waaruit volgt, dat

in een regthoek geen vierkant geconstrueerd kan worden. Is echter nevens $\alpha = 90°$ ook $a = b$, dan wordt $x = \frac{0}{0}$ en $y = \frac{0}{0}$; in een vierkant kan dus een onbepaald aantal vierkanten beschreven worden. Voor $b = a$, vindt men door de som van (5) en (6) te nemen, $x + y = a(Sec.\alpha - Tang.\alpha) + a$; hierin wordt voor $\alpha = 90°$, $Sec.\alpha = Tang.\alpha$ en dus $x + y = a$; om een vierkant in een vierkant te construeren, kan men alzoo voor x ééne willekeurige waarde en vervolgens $y = a - x$ nemen.

2°. Het vierkant zal geheel binnen het parallelogram vallen, indien x en y beide positief en tevens $x < a$ en $y < b$ is; hiertoe wordt gevorderd, indien wij α scherp onderstellen, dat men hebbe

$$a > b(Sin.\alpha - Cos.\alpha) \text{ en } a < b(Sin.\alpha + Cos.\alpha),$$
alsmede
$$b > a(Sin.\alpha - Cos.\alpha) \text{ en } b < a(Sin.\alpha + Cos.\alpha).$$

Mogten deze voorwaarden niet vervuld zijn, dan blijft de opgegevene constructie dezelfde, om de vierkanten te construeren, waarvan de hoekpunten op de zijden van het parallelogram *of op het verlengde* van die zijden vallen. Deze constructie hebben wij in Fig. 96 voorgesteld, waar alles door dezelfde letters als in Fig. 95 is aangewezen.

CCXLV. VOORSTEL.

Door W. Smaasen.

Twee punten gegeven zijnde, wordt naar de meetkunstige plaats van alle andere punten gevraagd, die zoodanig gelegen zijn, dat de beide voerstralen, uit de gegevene punten naar die andere punten getrokken, een standvastig product hebben.

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Siohnis, W. Smaasen en F. C. Radijs.

Oplossing van J. S. Speijer.

Laten A en B (Fig. 97) de gegevene punten en derzelver afstand $AB = 2a$ zijn, en zij b^2 het standvastige product der voerstralen. Men deele de lijn AB middendoor in O, en neme O tot oorsprong der onderling regthoekige coördinaten, alsmede AB tot as der abscissen. Om dan de meetkunstige plaats der punten M te bepalen, trekke men de voerstralen AM en BM, alsmede de loodlijn MP op AB, dan is $OP = x$ en $PM = y$ stellende, $AP = a + x$,

$BP = a + x$, $AM = \sqrt{\{y^2+(a-x)^2\}}$, $BM = \sqrt{\{y^2+(a+x)^2\}}$, en bijgevolg

$$AM \times BM = \sqrt{\{y^2+(a+x)^2\}}\sqrt{\{y^2+(a-x)^2\}} = b^2,$$

of $$\{y^2+(a+x)^2\}\{y^2+(a-x)^2\} = b^4;$$

na ontwikkeling hebben wij dus voor de vergelijking der meetkunstige plaats

$$y^4+2a^2y^2+2x^2y^2+x^4-2a^2x^2+a^4 = b^4 \quad . \; . \quad (1).$$

Uit deze vergelijking y^2 afzonderende, komt er

$$y^2 = -(a^2+x^2) \pm \sqrt{(b^4+4a^2x^2)},$$

maar hierin is alleen het bovenste teeken bruikbaar, omdat anders y^2 negatief en dus y onbestaanbaar zou worden; wij hebben dus alleen

$$y^2 = -(a^2+x^2) + \sqrt{(b^4+4a^2x^2)} \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Omdat in deze vergelijking slechts evene magten van x en y voorkomen, zoo volgt hieruit, dat de kromme lijn, die de bedoelde meetkunstige plaats uitmaakt, door de coördinaten-assen in vier gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld wordt, zoodat het onderzoek naar deze kromme lijn zich slechts tot één dezer deelen, b. v. dat, waarvoor x en y positief zijn, behoeft te bepalen.

Neemt men in (2) $x = 0$, dan wordt $y = \pm\sqrt{(b^2-a^2)}$. Naargelang $b > a$, $b = a$ of $b < a$ is, wordt deze waarde voor y bestaanbaar, nul of onbestaanbaar, en zal dus de kromme de as der y in twee punten snijden, of door den oorsprong gaan, of geene punten met de as der y gemeen hebben.

Onderzoeken wij elk dezer gevallen afzonderlijk.

Eerste geval; $b > a$ zijnde.

Als nu is voor $x = 0$, $y = \pm\sqrt{(b^2 - a^2)}$; neemt men dus $AY = AY' = b$, dan zijn Y en Y' de punten, waar de kromme de as der y snijdt.

Voor $y = 0$, vindt men uit (1) $(x^2 - a^2)^2 = b^4$ en dus $x^2 = a^2 \pm b^2$; uit de onderstelling, dat $b > a$ is, kan hier alleen het bovenste teeken gebruikt worden, daar anders x onbestaanbaar zou wezen; voor $y = 0$ is alzoo alleen $x = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$; neemt men dus $OX = OX' = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, of wat op hetzelfde nederkomt $YX = YX' = b\sqrt{2}$, dan zijn X en X' de punten, waar de kromme de as der x snijdt.

Blijkens (2) zal y onbestaanbaar worden, indien men heeft:

$$a^2 + x^2 > \sqrt{(b^4 + 4a^2x^2)},$$
$$a^4 + 2a^2x^2 + x^4 > b^4 + 4a^2x^2,$$
$$(a^2 - x^2)^2 > b^4;$$

dat is, naargelang $x <$ of $> a$ is,

$$a^2 - x^2 > b^2 \quad \text{of} \quad x^2 - a^2 > b^2$$

en $\quad x^2 < a^2 - b^2 \quad$ of $\quad x^2 > a^2 + b^2$;

de eerste dezer ongelijkheden zal, wegens $b > a$ nimmer kunnen plaats hebben, zonder dat x zelve onbestaanbaar zij; de tweede toont aan, dat y onbestaanbaar wordende voor $\pm x > \sqrt{(a^2 + b^2)}$, de kromme lijn zich niet verder dan tot in X en X' van de as der y verwijderen kan.

Uit (1) x^2 afzonderende, vinden wij

$$x^2 = a^2 - y^2 \pm \sqrt{(b^4 - 4a^2y^2)} \quad . \quad . \quad (3);$$

hieruit blijkt, dat x onbestaanbaar zal worden, indien $4a^2y^2 > b^4$ of $y > \frac{b^2}{2a}$ is. Voor $y = \frac{b^2}{2a}$, wordt $x^2 = \frac{4a^4 - b^4}{4a^2}$; zoo lang nu $b^2 < 2a^2$ is, komen met $y = \frac{b^2}{2a}$ twee bestaanbare waarden voor x overéén, en is dus $y = \frac{b^2}{2a}$ een maximum. Dit zelfde besluit kan men uit de differentiaal quotiënten afleiden.

Differentiëren wij daartoe de vergelijking (1) twee achtereenvolgende malen, bij de tweede differentiatie δy als veranderlijk en δx als standvastig aanmerkende, dan vinden wij

$$y\delta y(a^2 + x^2 + y^2) - x\delta x(a^2 - x^2 - y^2) = 0$$

en

$$y\delta^2 y(a^2+x^2+y^2)-(a^2-y^2-3x^2)\delta x^2+4xy\,\delta x\delta y+(a^2+x^2+3y^2)\delta y^2=0,$$

waaruit, ter bekorting $\frac{\delta y}{\delta x} = p$ en $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = q$ stellende, volgt

$$p = \frac{x(a^2-x^2-y^2)}{y(a^2+x^2+y^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en $$q = \frac{(a^2-y^2-3x^2)-4xyp-(a^2+x^2+3y^2)p^2}{y(a^2+x^2+y^2)} \quad . \quad (5).$$

Nu zal $p = 0$ worden, indien $x^2 = a^2 - y^2$ of indien

$x = 0$ wordt genomen; kunnende geene andere waarden voor x, $p = 0$ maken.

Nemende nu in de eerste plaats $x^2 = a^2 - y^2$, dan wordt, volgens (3), $b^4 - 4a^2y^2 = 0$ en dus $y = \frac{b^2}{2a}$, waarmede overeenstemt $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - b^4)}}{2a}$, terwijl $p = 0$ en dus volgens (5) $q = -\frac{2x^2}{y(a^2 + x^2 + y^2)}$ wordt; zoo lang derhalve als $b^2 < 2a^2$ is, wordt voor $y = \frac{b^2}{2a}$, x bestaanbaar, p nul en q negatief, en bijgevolg is $y = \frac{b^2}{2a}$ een maximum. Dit maximum vervalt echter, indien $b^2 > 2a^2$ is.

Nemende in de tweede plaats $x = 0$; dan is, volgens (2), $y = \sqrt{(b^2 - a^2)}$, en daar $p = 0$ is, volgens (5) $q = \frac{2a^2 - b^2}{y(a^2 + y^2)}$; deze waarde van q is positief of negatief naar gelang $b^2 < 2a^2$ of $b^2 > 2a^2$ is, bijgevolg is $x = 0$ zijnde, $y = \sqrt{(b^2 - a^2)}$ een minimum, indien $b^2 < 2a^2$, en een maximum, indien $b^2 > 2a^2$ is. Indien $b^2 = 2a^2$ ware, zou voor $x = 0$ gelijktijdig $p = 0$ en $q = 0$ zijn; maken wij voor dat geval de differentiaal-quotiënten $\frac{\delta^3 y}{\delta x^3}$ en $\frac{\delta^4 y}{\delta x^4}$ op, in de onderstelling, dat $p = 0$ en $q = 0$ is, dan vinden wij

$$\frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = -\frac{6x}{y(a^2+x^2+y^2)} \text{ en } \frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = -\frac{6}{y(a^2+x^2+y^2)};$$

als nu wordt voor $x = 0$, $y = a$, $\frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = 0$ en $\frac{\delta^4 y}{\delta x^4} = -\frac{6}{2a^3}$, zoodat dan voor $x = 0$, $y = a$ een maximum is.

Uit dit alles volgt nu, dat $b > a$ zijnde de kromme lijn de gedaante van Fig. 97, Fig. 98 of Fig. 99 zal hebben, naargelang $b^2 > 2a^2$, $b^2 = 2a^2$ of $b^2 < 2a^2$ is. In de beide eerste figuren is alleen voor $x = 0$, y een maximum; maar in de derde figuur is, voor $x = 0$, y een

minimum en voor $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - b^4)}}{2a}$, y een maximum. In dit laatste figuur moet dus de kromme lijn buigpunten hebben, welker plaats men door $y = 0$ te stellen zou kunnen bepalen.

Tweede geval; $b = a$ zijnde.

In dit geval wordt de vergelijking (1)

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

waaruit blijkt, dat dan de kromme lijn eene gewone *Lemniscate* is, die de gedaante van Fig. 100 heeft. Omdat voor $x = 0$ ook $y = 0$ wordt, gaat zij door den oorsprong O. Voor het punt O neemt, volgens (4), p den vorm $\frac{0}{0}$ aan; schrijven wij echter de vergelijking in de gedaante

$$y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 = 2a^2\left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right),$$

dan zien wij, dat voor $x = 0$ en $y = 0$, $\frac{x^2}{y^2} = 1$, dus $\frac{x}{y} = \pm 1$ en $p = \pm 1$ wordt; de kromme lijn heeft dus in het punt O twee raaklijnen, die de assen der coördinaten onder hoeken van 45° snijden.

Als nu wordt voor $y = \frac{b^2}{2a} = \frac{1}{2}a$, $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - b^4)}}{2a} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $p = 0$ en $q = -\frac{3}{2a}$, zoodat $y = \frac{1}{2}a$ een maximum is. Verder hebben wij voor de punten der kromme, die zich het verst van de as der y verwijderen, in dit geval $OX = OX' = a\sqrt{2}$.

Derde geval; $b < a$ zijnde.

In dit geval wordt, voor $x = 0$, y onbestaanbaar; de kromme lijn snijdt dus de as der y niet. Voor $y = 0$, wordt nu volgens (3) $x = \pm\sqrt{(a^2 \pm b^2)}$; nemende dus (Fig. 101) $OX = OX' = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ en $OV = OV' = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, dan zullen X, X', V en V' de punten zijn, waarin de kromme lijn de as der x snijdt.

Zoo als in het eerste geval is aangetoond, zal y onbestaanbaar wezen, indien men heeft

$$x^2 < a^2 - b^2 \text{ of } x^2 > a^2 + b^2;$$

geene punten der kromme kunnen dus nader bij de as

der y gelegen zijn dan V en V'; en geene kunnen zich verder van die as verwijderen dan X en X'.

Voor de vier genoemde punten wordt volgens (4) $p = \infty$, zoodat in die punten de raaklijnen evenwijdig met de as der y loopen; voorts blijft het gevondene maximum voor y, waarbij $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - b^4)}}{2a}$ en $y = \frac{b^2}{2a}$ is, in dit geval bestaan. De kromme lijn bestaat dus nu, uit twee afzonderlijk staande geslotene deelen, zoo als in Fig. 101 is afgebeeld.

Om in elk der drie behandelde gevallen, den kromtestraal voor eenig punt onzer kromme lijn te berekenen, hebben wij de bekende formule

$$r = -\frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q};$$

hierin voor p de waarde (4) overbrengende, komt er

$$r = -\frac{\sqrt{\{y^2(a^2+x^2+y^2)^2+x^2(a^2-x^2-y^2)^2\}^3}}{qy^3(a^2+x^2+y^2)^3} \quad . \quad . \quad (6);$$

zoo wij hierin $x = 0$ stellen, waardoor $y = \sqrt{(b^2 - a^2)}$ en $q = \frac{2a^2 - b^2}{b^2\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ wordt, vinden wij

$$r = \frac{b^2\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b^2 - 2a^2}.$$

Is nu $b > a$, dan is r positief, oneindig of negatief, naargelang $b^2 > 2a^2$, $b^2 = 2a^2$ of $b^2 < 2a^2$ is. In het punt Y van Fig. 97 keert dus de kromme hare holle, in het punt Y van Fig. 99 hare bolle zijde naar de as der x, terwijl in het punt Y van Fig. 98, hare kromming zoo gering is, dat zij aldaar nagenoeg regtlijnig wordt.

Brengen wij de waarde van p volgens (4), in (5) over, dan komt er voor q eene uitdrukking van den vorm

$$q = \frac{T}{y^3(a^2 + x^2 + y^2)^3},$$

waarin voor $y = 0$, $T = -x^2(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)^2$ is. Daar nu volgens (6)

$$r = -\frac{\sqrt{\{y^2(a^2+x^2+y^2)^2+x^2(a^2-x^2-y^2)^2\}^3}}{T}$$

is, vinden wij voor $y = 0$,

$$r = \frac{x^3(a^2-x^2)^3}{x^2(a^2+x^2)(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\,x,$$

dat is, dewijl voor $y = 0$, $x = \mp \sqrt{(a^2 \pm b^2)}$ wordt,

$$r = -\frac{b^2}{2a^2+b^2}\sqrt{(a^2+b^2)} \text{ of } r = \frac{b^2}{2a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)}.$$

De eerste dezer twee waarden van r wijst den kromtestraal aan, van het punt X, in elk der figuren 97 tot 101; de tweede waarde van r is de kromtestraal van het punt V in Fig. 101. In het tweede geval, waar $b = a$ is, worden deze waarden van r,

$$r = -\tfrac{1}{3}a\sqrt{2} \text{ en } r = 0;$$

alzoo is in Fig. 100, de kromtestraal van het O nul en die van het punt X is juist een derde gedeelte van OX.

Om de polaire vergelijking van de kromme op te maken, de pool in O en OX tot oorsprong der hoeken aannemende, stelle men, na OM (Fig. 97) getrokken te hebben, *hoek* XOM $= \phi$ en OM $= z$. Alsdan is

$$AM^2 = a^2+z^2 - 2azCos.\phi,$$

$$BM^2 = a^2+z^2 + 2azCos.\phi,$$

derhalve $AM^2 \times BM^2 = (a^2+z^2)^2 - 4a^2z^2Cos.^2\phi$,

waaruit volgt $z^4+2(1-2Cos.^2\phi)a^2z^2+a^4 = b^4$,

$$z^4-2a^2z^2Cos.2\phi+a^4-b^4 = 0$$

en ten laatste $z^2 = a^2Cos2\phi \pm \sqrt{(b^4-a^4Sin.^22\phi)}$.

CCXLVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Het middelpunt* M *van den cirkel, om eenen willekeurigen driehoek* ABC *beschreven* (Fig. 102), *en het gemeenschappelijk snijpunt* S *der loodlijnen, uit de hoekpunten des driehoeks op de overstaande zijden vallende, liggen met het zwaartepunt* Z *des driehoeks in ééne regte lijn; en wel zoodanig, dat de afstand* ZS *het dubbel van den afstand* ZM *is. Men vraagt het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, G. KOSTER, H. MIDDELBURG, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER *en* J. SJOERNIA.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zij M (Fig. 102) het middelpunt des omgeschreven cirkels, en S het gemeenschappelijke snijpunt der loodlijnen AD, BE en CF, uit de hoekpunten des driehoeks op de overstaande zijden nedergelaten; trekken wij dan eene lijn BH, uit een hoekpunt B des driehoeks, naar het midden H van de over-

staande zijde, en zij Z het snijpunt van deze lijn met de lijn, die de punten M en S vereenigt, zoo zal het er vooreerst op aankomen, te bewijzen, dat $ZB = 2ZH$ is; want dit zoo zijnde, zal Z het zwaartepunt des driehoeks zijn, en dus zal dan dit zwaartepunt met M en S op eene zelfde regte lijn liggen. Verder hebben wij dan nog te bewijzen, dat $ZS = 2ZM$ is.

Tot deze bewijzen trekken wij, behalve de lijn MH, die loodregt op AC staat, ook nog MG en MI respectievelijk loodregt op BC en AB; vervolgens uit A eene middellijn AMN, en uit het uiteinde N dezer middellijn de lijnen NB en NC, dan is BNCS een parallelogram; want de hoeken ABN en ACN zijn regt als staande in een' halven cirkel, dus zijn NB en CF evenwijdig als staande beide loodregt op AB, gelijk mede NC en BE evenwijdig als staande beide loodregt op AC, hieruit volgt

$$BS = NC.$$

Maar MH en NC beide loodregt op AC staande, terwijl AN het dubbel van AM is, is $NC = 2MH$; bijgevolg ook

$$BS = 2MH.$$

Eindelijk zijn de driehoeken MZH en BZS gelijkvormig; deze gelijkvormigheid verschaft de evenredigheid

$$BS : MH = ZB : ZH = ZS : ZM,$$

maar wij vonden reeds $BS = 2MH$, dus is ook

$$ZB = 2ZH \quad \text{en} \quad ZS = 2ZM$$

hetgeen ons nog te bewijzen stond.

CCXLVII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen vijfhoek ABCDE (Fig. 103) *zijn twee op elkander volgende hoeken* A *en* B *regt. Men verlangt den afstand, waarop de zijde* AB *van het overstaande hoekpunt* D *verwijderd is, in eene functie van de zijden des vijfhoeks uit te drukken?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, J. A. Hansen, D. W. Hinse, H. Middelburg, J. Sjoenis, J. Teixeira de Mattos, Jr. *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat gegeven zijn $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ en $EA = e$, dan zullen wij de loodlijn DF, uit

D op AB nedergelaten, in functie dezer gegevens moeten uitdrukken. Daartoe trekken wij uit C en E loodlijnen CG en EH op DF, deelen GH in I midden door, en stellen DI $= x$, dan is IG $=$ IH $= \frac{1}{2}(b - e)$ IF $= \frac{1}{2}(b + e)$, DG $=$ DI $-$ IG $= x - \frac{1}{2}(b - e)$, DH $=$ DI $+$ IH $= x + \frac{1}{2}(b - e)$, terwijl de te berekenen loodlijn is DF $=$ DI $+$ IF $= x + \frac{1}{2}(b + e)$.

Uit de figuur volgt onmiddellijk

$$EH = \sqrt{(ED^2 - DH^2)} = \sqrt{\{d^2 - (x + \tfrac{1}{2}(b - e))^2\}},$$
$$CG = \sqrt{(CD^2 - DG^2)} = \sqrt{\{c^2 - (x - \tfrac{1}{2}(b - e))^2\}};$$

daar nu klaarblijkelijk de som dezer beide lijnen gelijk aan AB of a is, hebben wij, tevens ter bekorting $\frac{1}{2}(b - e) = m$ stellende, de vergelijking

$$\sqrt{\{d^2 - (x + m)^2\}} + \sqrt{\{c^2 - (x - m)^2\}} = a.$$

Schrijven wij dezelve in de gedaante

$$\sqrt{\{d^2 - (x + m)^2\}} = a - \sqrt{\{c^2 - (x - m)^2\}}$$

en brengen wij haar vervolgens in het vierkant, dan vinden wij

$$d^2 - (x + m)^2 = a^2 - 2a\sqrt{\{c^2 - (x - m)^2\}} + c^2 - (x - m)^2,$$

waaruit volgt

$$2a\sqrt{\{c^2 - (x - m)^2\}} = a^2 + c^2 - d^2 + (x + m)^2 - (x - m)^2$$

of wel

$$2a\sqrt{\{c^2 - (x - m)^2\}} = a^2 + c^2 - d^2 + 4mx;$$

brengen wij deze vergelijking weder in het vierkant, dan komt er

$$4a^2c^2 - 4a^2x^2 + 8a^2mx - 4a^2m^2 =$$
$$= a^4 + c^4 + d^4 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2c^2d^2 + 8a^2mx + 8c\,mx - 8d^2mx + 16m^2x^2,$$

of na vereenvoudiging en kortsheidhalve stellende

$$-a^4-c^4-d^4+2a^2c^2+2a^2d^2+2c^2d^2 = 4n^4,$$
$$(4m^2+a^2)x^2+2(c^2-d^2)mx+a^2m^2-n^4 = 0,$$

waaruit nu afgeleid wordt

$$x^2 + 2x\frac{(c^2-d^2)m}{4m^2+a^2} + \frac{a^2m^2-n^4}{4m^2+a^2} = 0$$

en $x^2 = \frac{-(c^2-d^2)m\pm\sqrt{\{(c^2-d^2)^2m^2-(a^2m^2-n^4)(4m^2+a^2)\}}}{4m^2+a^2}$

Uit de waarde die wij door $4n^4$ hebben voorgesteld, volgt

$$(c^2-d^2)^2 = -a^4 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 - 4n^4,$$

zoo wij nu dezen vorm voor $(c^2 - d^2)^2$ in de plaats stellen, gaat de grootheid, die onder het wortelteeken voorkomt, na ontwikkeling der producten en vereenvoudiging, over in

$$a^2(n^4 + 2m^2(c^2 + d^2 - a^2) - 4m^4)$$

en wij hebben alzoo ook

$$x = \frac{-(c^2-d^2)m\pm a\sqrt{\{n^4+2m^2(c^2+d^2-a^2)-4m^4\}}}{4m^2+a^2}.$$

Daar m hier eene bekende functie van b en e en n^4 eene bekende functie van a, c en d is, behoeven wij deze waarde voor x slechts in de formule

$$DF = x + \tfrac{1}{2}(b + e)$$

over te brengen, om de loodlijn DF in functie van de vijf zijden des vijfhoeks uitgedrukt te zien. Wij zullen deze uitdrukking om hare uitgebreidheid hier niet neêrschrijven.

De gevondene formulen leveren twee verschillende waarden voor x, en dus ook voor de loodlijn DF op; de eene behoort tot het geval, dat de hoek CDE een uitspringende hoek is, de andere tot het geval, dat die hoek inspringende is. De laatste hebben wij in de figuur door D'F' voorgesteld, zijnde ED' = ED en CD' = CD genomen.

Aanmerking. Door te stellen, dat de zijden BC en EA des vijfhoeks nul worden, gaat die vijfhoek over in eenen driehoek, AB tot bazis en DF tot hoogte hebbende. Stellen wij dan ook in de verkregene formulen $b = 0$, $e = 0$ en dus ook $m = 0$, zoo vinden wij

$$DF = x = \frac{1}{a}\sqrt{n^4} = \frac{1}{2a}\sqrt{4n^4} =$$
$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(-a^4-c^4-d^4+2a^2c^2+2a^2d^2+2c^2d^2)},$$

hetwelk de bekende formule is, waardoor de hoogte eens driehoeks in de zijden a, c en d wordt uitgedrukt.

CCXLVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen vierhoek ABCD (Fig. 104) *is de hoek* B *regt; men vraagt den afstand van het over* B *staande hoekpunt* D, *tot eene der aan het hoekpunt* B *zamenkomende zijden, in eene functie van de zijden des vierhoeks uit te drukken?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, J. A. Hansen, D. W. Hinse, H. Middelburg, J. Sjoenis, J. Teixeira de Mattos, Jr. *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Indien men stelt, dat in Fig. 103 der vorige oplossing, de zijde AE nul wordt, dan zal men juist de Fig. 104 verkrijgen, waarin DF dan de gevraagde afstand is. Zij dus in Fig. 104 AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, dan zal men in de uitkomst van de vorige oplossing slechts $e = 0$ moeten stellen, waardoor $m = \frac{1}{2} b$ wordt, om ter oplossing van het tegenwoordige voorstel te vinden

$$x = \frac{-b(c^2-d^2) \pm a\sqrt{\{4a^4+2b^2(c^2+d^2-a^2)-b^4\}}}{2(b^2+a^2)}$$

en

$$DF = x + \tfrac{1}{2}b.$$

In Fig. 104 AD′ $=$ AD en CD′ $=$ CD zijnde, zijn de loodlijnen DF en D′F′ ook hier de beide waarden, die door de oplossing worden opgeleverd.

CCXLIX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De waarde te bepalen van het gebroken $\dfrac{2.4.6.8.10.\ enz.}{3.5.7.9.11.\ enz.}$, *welks teller en noemer respectievelijk bestaan, uit de oneindig voortloopende gedurige producten van de evene en onevene getallen?*

Opgelost *door* J. S. Speijer.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Men vindt bewezen bij J. de Gelder, *Wiskundige Lessen*, § 628, dat

$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times$ *enz. tot in 't oneindige* $= \frac{1}{2}\pi$ is. Deze vergelijking wordt ook op eene geheel andere wijze

bewezen in LACROIX, *Traité Elémentaire du Calcul Intégral*, § 381.

Stelt men nu

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times \textit{ tot } 2n \textit{ factoren} = p,$$

dan zal voor $n = \infty$, $p = \frac{1}{2}\pi$ wezen.

In plaats van de laatste vergelijking, kunnen wij schrijven

$$\frac{(2\times4\times6\times8\times\ldots\ldots\times2n)^2}{(1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1))^2(2n+1)} = p,$$

of ook $$\left(\frac{2\times4\times6\times8\times\ldots\ldots\times2n}{3\times5\times7\times9\times\ldots\times(2n+1)}\right)^2\times(2n+1) = p,$$

waaruit volgt

$$\frac{2\times4\times6\times8\times\ldots\ldots\times2n}{3\times5\times7\times9\times\ldots\times(2n+1)} = \sqrt{\frac{p}{2n+1}};$$

stellende nu hierin $n = \infty$, waardoor $p = \frac{1}{2}\pi$ wordt, dan verkrijgt men eindelijk voor de gevraagde waarde

$$\frac{2\times4\times6\times8\times \textit{ enz. tot in 't oneindige}}{3\times5\times7\times9\times \textit{ enz. tot in 't oneindige}} = 0.$$

CCL. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Op hoe vele en welke wijzen, kan het oppervlak van eenen bol verdeeld worden, in aan elkander sluitende gelijke en gelijkvormige regelmatige bolvormige veelhoeken?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, H. MIDDELBURG, G. KOSTER *en* F. C. RADIJS.

I. OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij dat deze bolvormige veelhoeken ieder x zijden en dus ook x hoeken hebben, dat er in elk hoekpunt y veelhoeken te zamen komen, en dat er in het geheel z veelhoeken zijn, wier zamenvoeging het oppervlak van den bol uitmaakt, dan stellen x, y en z positieve geheele getallen voor; kunnende, uit den aard der zaak, noch x, noch y, kleiner dan 3 wezen.

Dewijl er in elk hoekpunt y veelhoeken zamenkomen, is hun polygoonshoek $\frac{1}{y}\times360°$; alzoo is de som van de hoeken van eenen der veelhoeken $\frac{x}{y}\times360°$.

Daar z veelhoeken het oppervlak van den bol uitmaken, is, zoo wij dit oppervlak O noemen, de inhoud van elken

veelhoek $\frac{O}{z}$. Maar de inhoud van eenen bolvormigen x-hoek staat tot het oppervlak des bols, als de overmaat van de som zijner hoeken boven $(x - 2) \times 180°$, staat tot $720°$; wij hebben dus

$$\frac{O}{z} : O = \frac{x}{y} \times 360° - (x - 2) \times 180° : 720°,$$

of $$1 : z = \frac{2x}{y} - (x - 2) : 4,$$

waaruit volgt

$$z = \frac{4y}{2x + 2y - xy},$$

deze vergelijking wijst nu de betrekking van afhankelijkheid aan, die er tusschen de geheele positieve getallen x, y en z moet bestaan.

Opdat z positief zij, moeten wij hebben

$$xy < 2x + 2y,$$
$$xy - 2x < 2y,$$
$$x < \frac{2y}{y - 2},$$

of $$x < 2 + \frac{4}{y - 2};$$

daar de kleinste waarde, die y hebben kan, 3 is, volgt hieruit, dat de grootste waarde die x hebben kan 5 moet wezen; daar ook x niet grooter dan 3 zijn kan, zijn alzoo $x = 3$, $x = 4$ en $x = 5$ de eenige mogelijke waarden voor x.

Nemen wij *ten eerste* $x = 3$, dan wordt $z = \frac{4y}{6 - y}$, zoodat men geene andere waarden voor y hebben kan, dan

$y = 3$, waarmede $z = 4$,
$y = 4$, » $z = 8$,
$y = 5$ » $z = 20$,

overeenstemt. Men kan derhalve het oppervlak van den bol verdeelen in 4, 8 of 20 regelmatige bolvormige driehoeken, die dan 3 aan 3, 4 aan 4 of 5 aan 5, met hunne hoekpunten aan elkander sluiten.

Nemen wij *ten tweede* $x = 4$, dan wordt $z = \frac{2y}{4 - y}$,

zoodat men nu alleen kan hebben

$$y = 3, \text{ waarmede } x = 6$$

overeenstemt. Men kan dus het oppervlak des bols verdeelen in 6 regelmatige bolvormige vierhoeken, die 3 aan 3 met hunne hoekpunten aan elkander sluiten.

Nemen wij *ten derde* $x = 5$, dan wordt $x = \frac{4y}{10-3y}$; nu kan men ook alleen hebben

$$y = 3, \text{ waarmede } x = 12$$

overeenstemt. Het oppervlak des bols kan dus ook nog verdeeld worden in 12 regelmatige bolvormige vijfhoeken, die 3 aan 3 met hunne hoekpunten samenkomen.

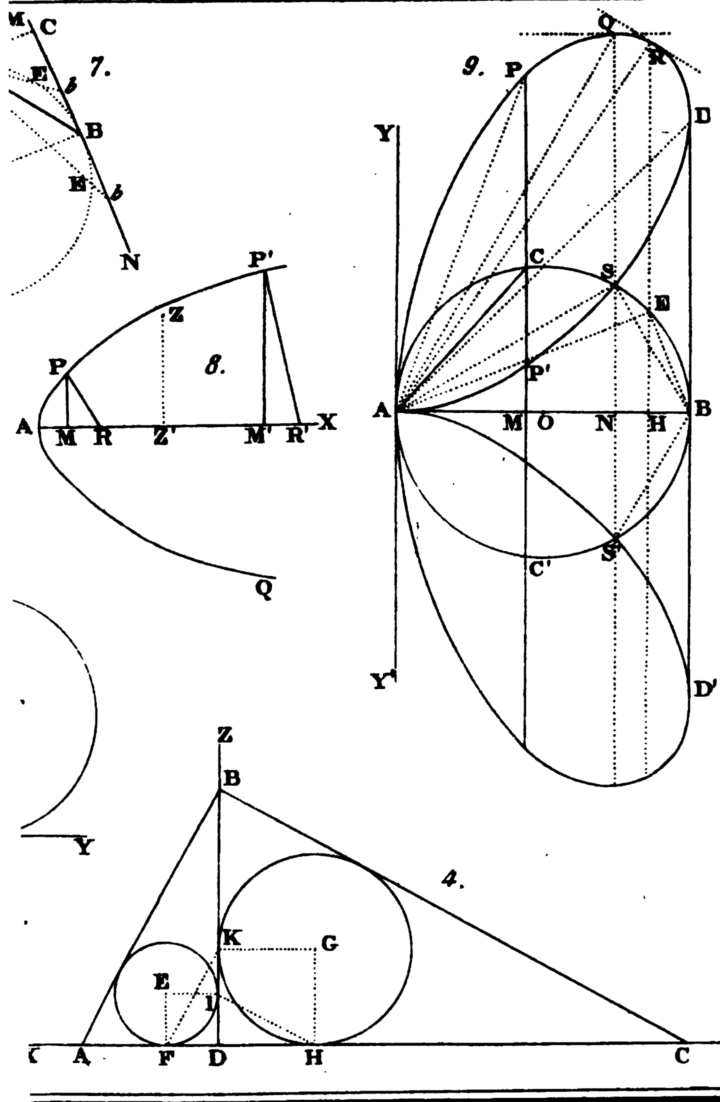
II. Oplossing *van* J. S. Speijer.

Omdat de gelijke bogen, welke eenen regelmatigen bolvormigen veelhoek bepalen, bogen van groote cirkels zijn, zal men door de koorden van deze bogen te trekken, eenen regelmatigen regtlijnigen veelhoek verkrijgen.

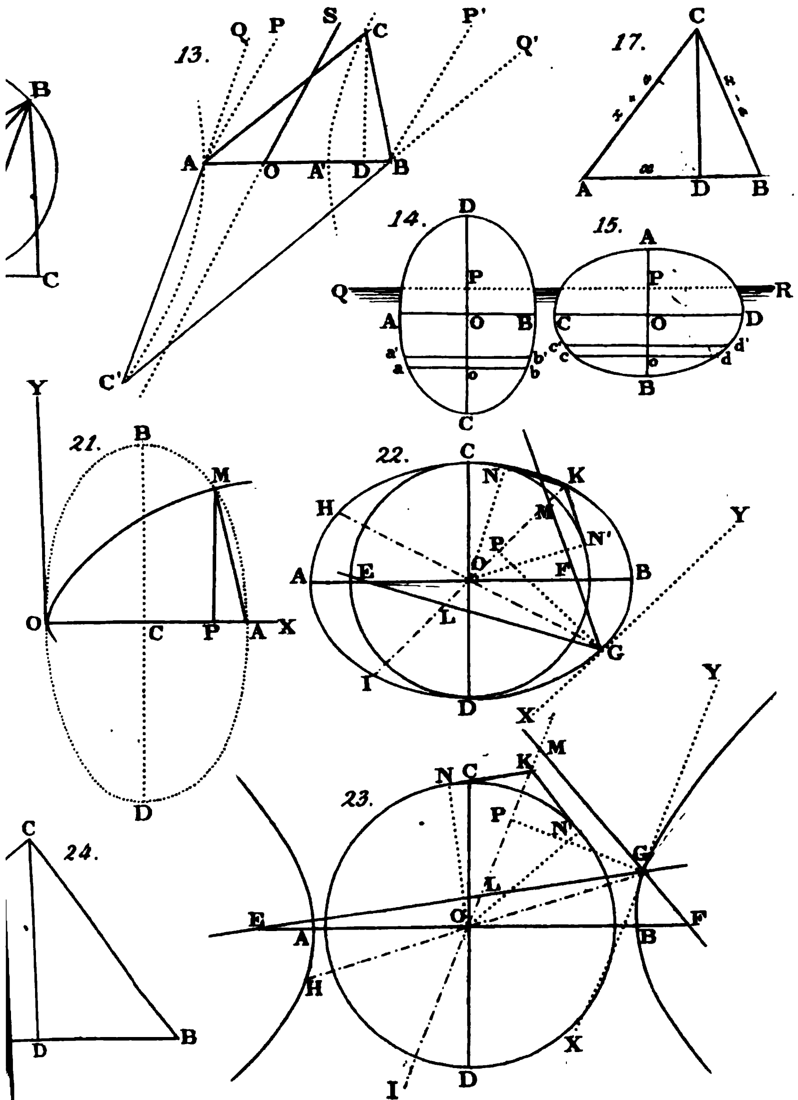
Indien dus het oppervlak van eenen bol, volgens het voorstel, in regelmatige bolvormige veelhoeken verdeeld is, en de koorden van al de zamenstellende bogen getrokken zijn, dan zullen er even zoo vele gelijke en gelijkvormige regelmatige regtlijnige veelhoeken ontstaan, die alsdan insgelijks aan elkander zullen sluiten, en een regelmatig ligchaam zullen bepalen, in dien bol beschreven.

Nu zijn er (Zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* 3e druk, § 838) slechts vijf regelmatige ligchamen mogelijk, om welke een bol kan beschreven worden; waaruit volgt, dat men de gevraagde verdeeling van het oppervlak des bols slechts op vijf wijzen kan verrigten, en wel:

	door het	*viervlak*	in	4	regelm.	bolv.	driehoeken;
	» »	*zesvlak*	»	6	»	»	vierhoeken;
	» »	*achtvlak*	»	8	»	»	driehoeken;
	» »	*twaalfvlak*	»	12	»	»	vijfhoeken;
en	» »	*twintigvlak*	»	20	»	»	driehoeken.

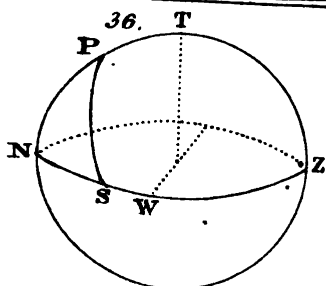


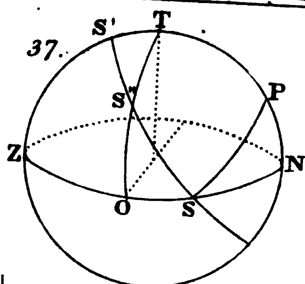
7.
M
C
E
b
B
E
b
N
8.
P'
Z
P
A
M
R
Z'
M'
R'
X
Q
9.
P
Q
R
D
Y
C
S
E
P'
A
M
O
N
H
B
C'
S'
Y'
D'
Y
4.
Z
B
K
G
E
I
A
F
D
H
C

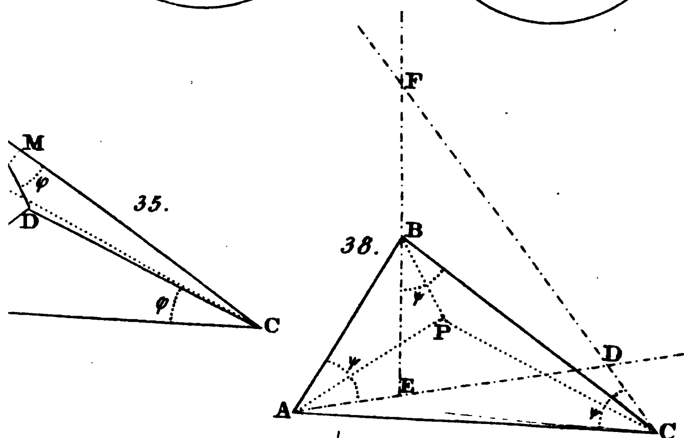

13.
14.
15.
17.
21.
22.
23.
24.

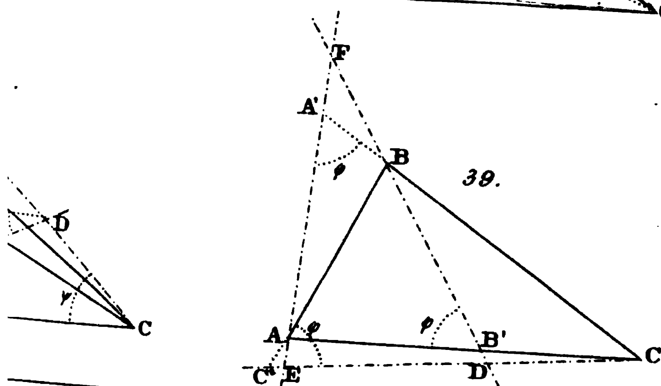
30.

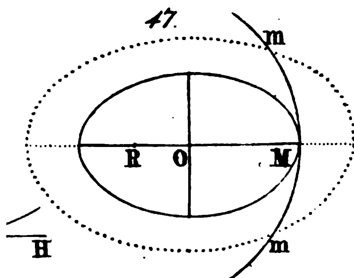
28.

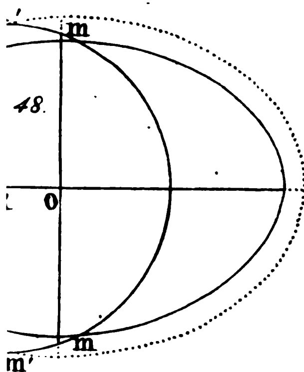

36.
T
P
N
Z
S
W

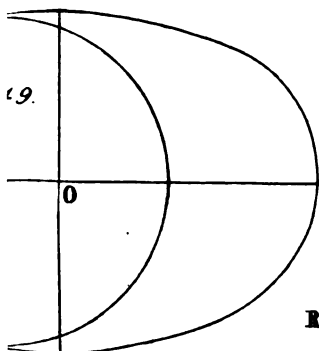

37.
S'
T
S''
P
Z
N
O
S

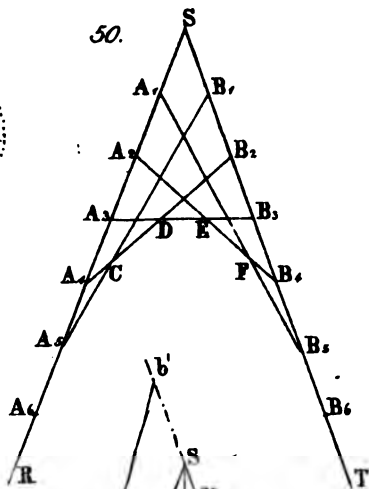

M
φ
35.
D
φ
C
F
B
38.
ψ
P
ψ
E
D
A
ψ
C

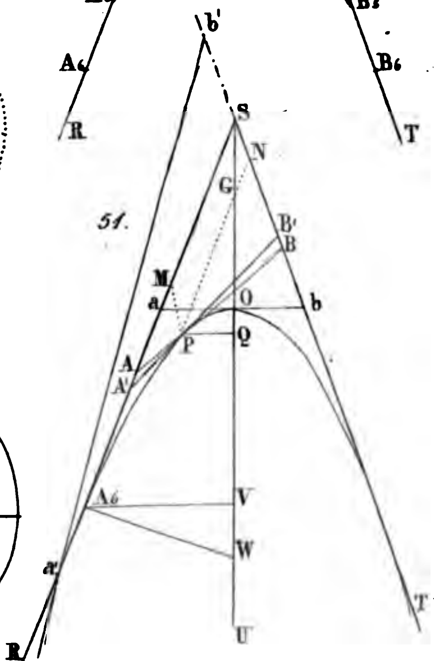

F
A'
B
φ
39.
D
ψ
C
A
φ
φ
B'
C
C''
E
D'

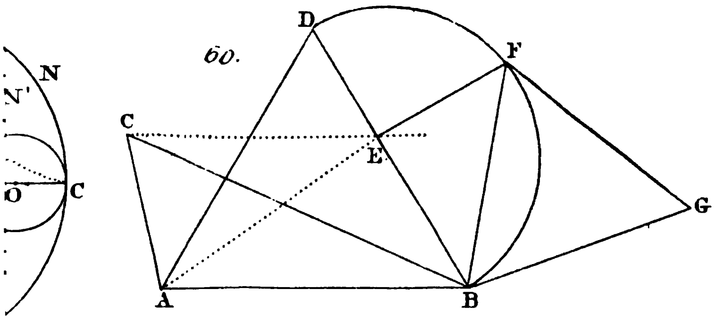

47.
m
R
O
M
m
H


m
48.
O
m
m'

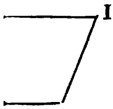

O


50.
S
D
E
C
F
R
T

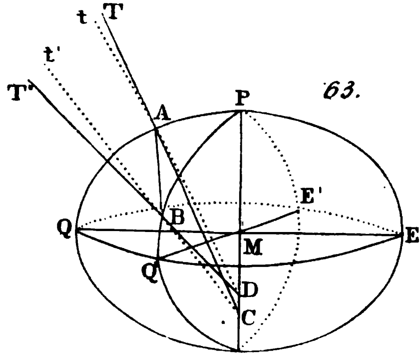

b'
S
N
G
51.
B'
B
M
a
O
b
P
Q
A
A'
V
W
a'
R
T
U



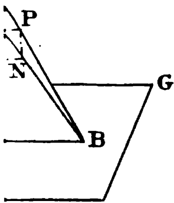
60.
D
F
N
N'
C
E
O
C
G
A
B



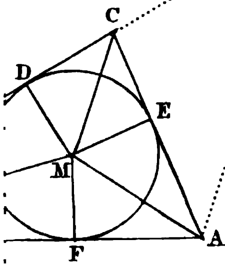
I



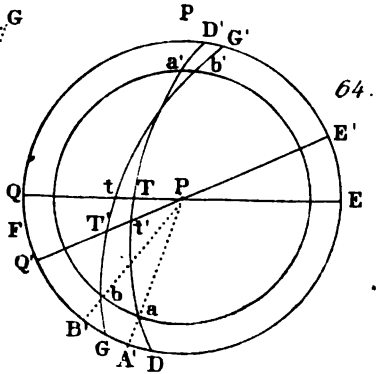
t
T
t'
T'
63.
A
P
E'
Q
B
E
M
Q'
D
C
P



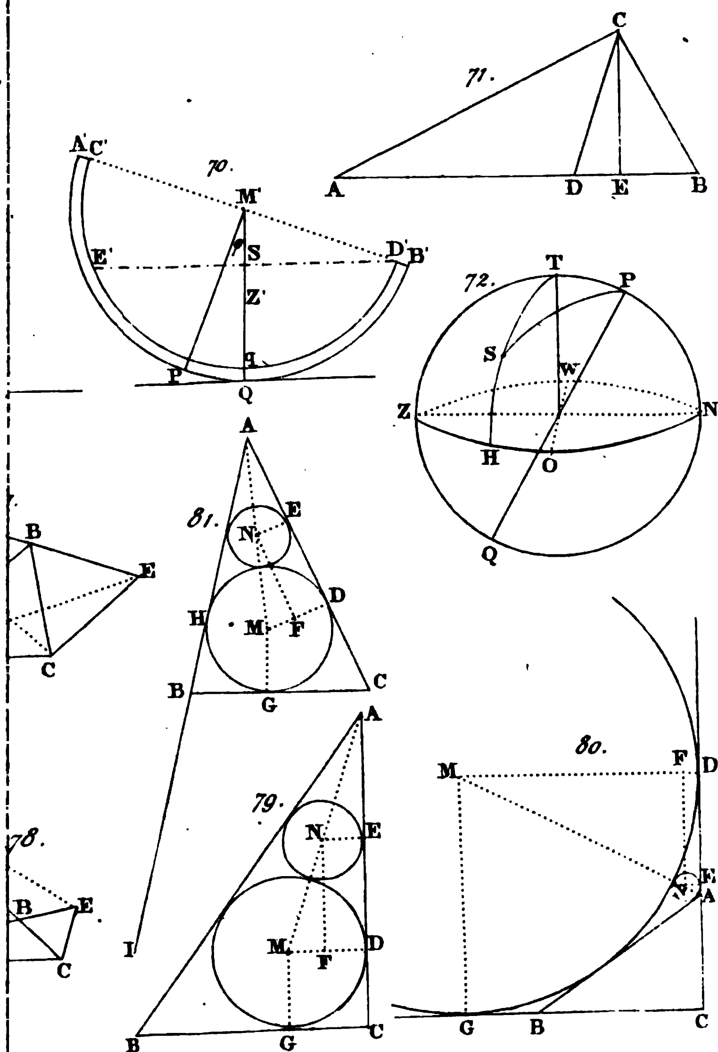
P
N
G
B

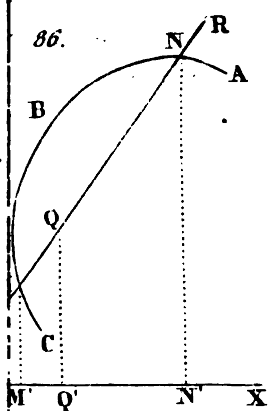


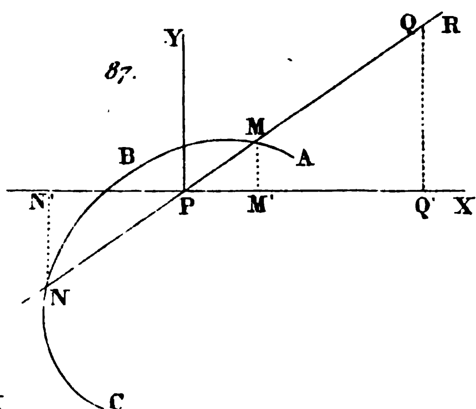
G
C
D
E
M
F
A

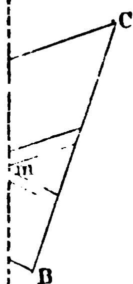


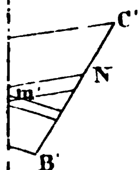
D'
G'
a'
b'
64.
E'
Q
t
T
P
E
F
T'
t'
Q'
b
a
B'
G
A'
D

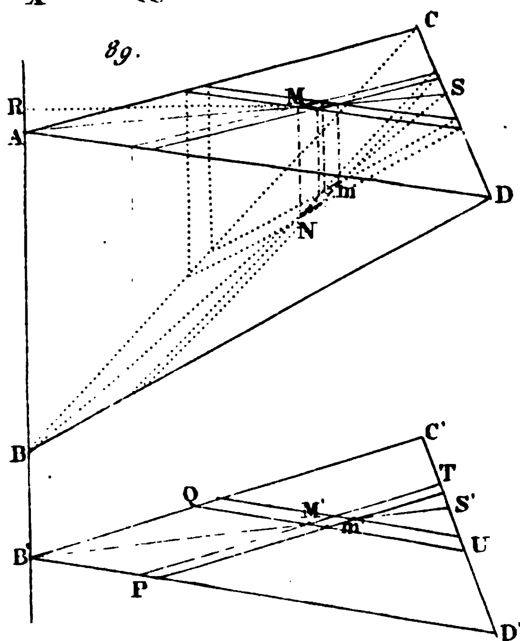

70.
A' C'
M'
E'
S
D' B'
Z'
P
Q
71.
C
A
D
E
B
72.
T
P
S
W
Z
N
H
O
Q
81.
A
E
N
D
H
M
F
B
G
C
I
78.
B
E
C
79.
A
N
E
M
D
F
B
G
C
80.
M
F
D
E
A
G
B
C


86.
N
R
A
B
Q
C
M'
Q'
N'
X


87.
Y
Q
R
M
B
A
N'
P
M'
Q'
X
N
C


C
m
B


C'
N
m'
B'


89.
C
S
R
M
A
m
D
N
B
C'
T
Q
S'
M'
B'
m'
U
P
D'

93.

94.

95.

96.

100.

101.

